Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

# Résultats récents sur les formes positives sur des espaces de fonctions

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° 6, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, n° 6, 3 p.



2 mars 1972

# RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES FORMES POSITIVES SUR DES ESPACES DE FONCTIONS

par Gustave CHOQUET

## Résumé


### 1. Capacités et mesures.

Soit $E$ un espace topologique séparé ; une application $f$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{R}_+$ est dite capacité extérieure fortement sous-additive si

1° $f$ est fortement sous-additive ;

2° $f$ est continue à droite sur $\mathcal{P}(E)$ ;

3° tout ouvert de $E$ est $f$-$\mathcal{K}$-capacitable ( $\mathcal{K}$ ensemble des compacts de $E$ ). On vérifie que c'est une $\mathcal{K}$-capacité. Si alors on a $F \subset E$ et si on pose $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{K}(F)$ , toute capacité e. f. s. a. sur $F$ a une extension du même type sur $E$ .

Il en résulte que si $F$ est un $K$-analytique plongeable dans un $K_\sigma$ séparé, pour toute $f$ sur $F$ de ce type, $F$ est $f$-$\mathcal{K}$-capacitable.

Mesure de Radon sur $E$ . - Par définition, c'est une capacité e. f. s. a. sur $E$ , finie sur $\mathcal{K}$ , et additive pour compacts disjoints.

Alors, pour tout $X \subset E$ qui est $f$-$\mathcal{K}$-capacitable avec $f(X) < \infty$ , l'ensemble des $Y \subset X$ capacitables est une tribu, et la restriction de $f$ à cette tribu est une mesure $\sigma$-additive.

THÉORÈME 1. - Soient $E$ un $K$-analytique complètement régulier, $\varphi : E \to F$ séparé, avec $\varphi$ continue surjective ; pour toute mesure de Radon $f$ sur $F$ , bornée, il existe une mesure de Radon $e$ sur $E$ telle que $f = \varphi(e)$ .

Voici maintenant un théorème de type Stone-Weierstrass pour les mesures :

THÉORÈME 2. - Soient $E$ séparé, $H$ sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(E, \underset{\sim}{R})$ , $\mu$ et $\mu'$ deux mesures de Radon sur $E$ avec $\mu(f) = \mu'(f) < \infty$ pour toute $f \in H^+$ . S'il existe $X \subset E$ portant $\mu$ et $\mu'$ , fortement séparé par $H$ (interpolation sur tout couple de points), alors $\mu = \mu'$ .

### 2. Cônes convexes $X \in \mathcal{S}$ (i. e. saillants faiblement complets).

THÉORÈME 3. - Si $X \in \mathcal{S}$ (avec $X \subset E$ faible) a une topologie métrisable séparable, la topologie de $E = (X - X)$ peut être affaiblie de façon à ce que $E$ devienne métrisable et que $X$ reste complet, avec même topologie qu'initialement.

COROLLAIRE 4. - *Ce cône* $X$ *est polonais.*

Pour tout cône $X \in \mathbb{S}$ , on a l'équivalence :

$[X = \varprojlim (X_n$ localement compact$)] \Longleftrightarrow [0$ a dans $X$ une base dénombrable de voisinages$]$.

On note $\mathbb{S}_D$ la classe de ces cônes.

THÉORÈME 5. - *Soit* $E$ *vectoriel ordonné, positivement engendré ; alors,*

1° *Si* $E^+$ *a un ensemble dénombrable cofinal,* $E^*_+ \in \mathbb{S}_D$

2° *Lorsque* $E^+$ *est algébriquement fermé, l'inverse est vrai.*

Voici maintenant une propriété importante des cônes métrisables :

THÉORÈME 6. - *Tout* $X \in \mathbb{S}$ *métrisable est séparable.*

## 3. Mesures coniques.

Rappelons que, sur tout $E$ faible complet, toute mesure conique $\mu$ est de Daniell. C'est faux si on suppose seulement $\mu$ portée par un cône $X \in \mathbb{S}$ .

PROBLÈME 7. - *Est-ce que, si* $X \in \mathbb{S}$ *n'a pas d'éléments extrémaux, et si* $\mu$ *conique est maximale sur* $X$ , $S(\mu) = \emptyset$ *entraîne que* $\mu$ *n'est pas de Daniell* ? *Réciproque* ?

THÉORÈME 8. - *Soit* $K$ *un chapeau universel d'un cône* $C$ *d'un* e. l. c. s. ; *soient* $\mu$ , $\mu'$ *des mesures de Radon positives sur la "base"* $X$ *de* $K$ ; *et soient* $\tilde{\mu}$ , $\tilde{\mu}'$ *les mesures coniques associées* ; *alors* :

1° $(\tilde{\mu} = \tilde{\mu}') \Longleftrightarrow (\mu = \mu')$ ,

2° $(\mu \prec \mu'$ sur $K) \Longleftrightarrow (\tilde{\mu} \prec \tilde{\mu}'$ sur $C)$ .

THÉORÈME 9. - *Si* $\pi$ *conique sur* $E$ *est représentable par une mesure de Radon générale* $\mu$ , *toute* $\pi' \leq \pi$ *l'est aussi pour une* $\mu' \leq \mu$ .

*Et pour tout compact étoilé* $X \subset E$ , *l'application* $\mu \dashrightarrow \tilde{\mu}$ *de* $\mathfrak{M}^+(B(X))$ *dans* $M^+(E)$ *est injective (où* $B(X)$ *est la "base de* $X$ ").

## 4. Les g-diffusions, outil commode.

Pour $E$ localement compact, $\Sigma(E)$ est l'ensemble des applications s. c. i. de $E$ dans $[0 , \infty]$ . Un *g-opérateur* de $A$ dans $B$ (localement compacts) est une application $T$ de $\Sigma(A)$ dans $\Sigma(B)$ "linéaire" avec passage à la limite filtrante croissante. Un tel opérateur est une *g-mesure* sur $A$ si $B = [0 , \infty]$ .

Une g-*diffusion* est l'adjoint d'un g-opérateur.

Toute g-diffusion est s. c. i., en ce sens que, $\forall\ \varphi \in \Sigma(B)$ , l'application

$\mu \rightarrow \langle T_\mu , \varphi \rangle$ est aussi s. c. i..

Ces notions sont liées à la notion de conoïde.

<u>Définition</u>. - Un <u>conoïde</u> est un semi-groupe commutatif, avec élément neutre $0$, où $R^+$ opère de façon que :

$$0x = 0 \ ; \quad 1.x = x \ ; \quad \lambda 0 = 0 \ ; \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \ ; \quad \lambda(\mu x) = \lambda\mu.x \ .$$

Noter qu'en général on n'a pas $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Viennent les notions de sous-conoïde, d'homomorphisme, de conoïde pré-ordonné (pré-ordre avec $(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$ et $\lambda x \leq \lambda y$ pour $\lambda \geq 0$ ), de formes croissantes (non identiques en général aux formes $\geq 0$ ).

On introduit les notions de <u>domination</u>, de <u>conoïdes adaptés</u>, et on montre par des exemples la souplesse de cet outil.

## 5. Intégrales de Daniell, et théorème de Radon-Nikodym.

Dans $V$, espace de Riesz, où $\mathbb{D} = (a^i_n)_i$ est une famille de <u>suites décroissantes</u> d'éléments de $V$, $T \in V^*_+$ est dite de $\mathbb{D}$-Daniell si $\forall\ (a_n) \in \mathbb{D}$, $\lim T(a_n) = 0$.

On étudie cette notion en étendant certains énoncés classiques, en particulier en relation avec le théorème de Hewitt-Smets : Pour tout $E$ topologique, toute forme $\geq 0$ sur $\mathcal{C}(E , \underset{\sim}{R})$ est de Daniell.

On étudie ensuite l'équivalent du théorème de Radon-Nikodym pour les $V^*_+$ associés à un sous-espace $V$ réticulé de l'espace $\mathbb{D}(K)$ des fonctions continues à valeurs dans $\overline{R}$ sur un espace sous-stonien, qui sont finies sur un ouvert dense.

## 6. Décomposition canonique de formes $\geq 0$.

Soit $V$ un sous-espace <u>héréditaire</u> d'un $\mathbb{D}(K)$ comme ci-dessus. On montre que $V^*_+$ est <u>somme directe</u> de trois sous-cônes :

$$(V^*_+)_0 = \{T : \ \forall\ f \in V^+ ,\ \ \varepsilon > 0 ,\ \ T(f) = T(\inf(f , \varepsilon))\}$$

$$(V^*_+)_\infty = \{T : \ \forall\ f \in V^+ ,\ \ n > 0 ,\ \ T(f) = T(f - n)^+\}$$

$$(V^*_+)_m = \{T : \ \forall\ f \in V^+ ,\ \ \lim_{n\to\infty} T(\inf f , \tfrac{1}{n}) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} T(f - n)^+ = 0\} \ .$$

Evidemment, $(T \text{ de Daniell}) \Rightarrow (T \in (V^*_+)_m)$.

Les éléments de ces trois cônes sont respectivement des évaluations des infiniment petits des $f$ de $V^+$, des infiniment grands, et des valeurs finies de ces $f$.

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY