Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

Solution d'un problème sur les itères d'un opérateur positif sur $C(K)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. nº 7, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A8_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
11e-12e années, 1971-1973, n° 7, 2 p.

5 octobre 1972

SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LES ITÉRÉS D'UN OPÉRATEUR POSITIF SUR $\mathcal{C}(K)$

par Gustave CHOQUET

Résumé

Voici le problème :

Soit T un opérateur positif sur $\mathcal{C}(K)$, où K est un espace compact, tel que la suite des $T^n 1$ converge simplement vers 0 ; converge-t-elle uniformément ? De plus, peut-on affaiblir l'hypothèse en supposant seulement que pour tout $x \in K$, il existe un n tel que $(T^n 1(x) < 1$?

Ce problème fut posé en 1955 par CHOQUET, qui lui donna une réponse positive lorsque T est presque multiplicatif, c'est-à-dire tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, on a :

$$Tf = \alpha.(f \circ \varphi) \text{ , où } \alpha \in \mathcal{C}^+(K) \text{ et } \varphi \in \mathcal{C}(K , K) .$$

En juin 1972, Ciprian FOIAS démontra le cas général ; sa démonstration fut ensuite beaucoup simplifiée par CHOQUET et MOKOBODZKI.

Démonstration. - Posons $g_n = \inf(T1 , T^2 1 , \ldots , T^n 1)$; d'après l'hypothèse et la compacité de K , il existe un entier r tel que $g_r \leqslant B$, où B est un nombre < 1 .

1° Comme $g_r \leqslant T^i 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$, on a aussi $Tg_r \leqslant T^i 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, d'où $Tg_r \leqslant \inf(T1 , \ldots , T^r 1) = g_r$; autrement dit, $Tg_r \leqslant g_r$; il en résulte que la suite des $T^i g_r$ est décroissante.

2° De la relation $g_r \leqslant B$ résulte $T^i g_r \leqslant BT^i 1$ pour tout i , d'où, d'après la décroissance des premiers membres,

$$T^r g_r \leqslant B \inf_{i \leqslant r} T^i 1 = Bg_r .$$

Il en résulte $T^{ir} g_r \leqslant B^i g_r$, donc la suite décroissante des $T^n g_r$ tend uniformément vers 0 .

3° Il existe évidemment un nombre $a \geqslant 1$ tel que $T1 \leqslant a . 1$, d'où aussi, pour $i \leqslant r$, $T^r 1 \leqslant a^r T^i 1$; donc $T^r 1 \leqslant a^r g_r$, d'où aussi $T^{r+i} 1 \leqslant a^r T^i g_r$. Comme d'après (2°) la suite des $T^i g_r$ tend uniformément vers 0 , il en est de même de la suite des $T^p 1$.

THÉORÈME ANALOGUE. - Si l'hypothèse sur T est remplacée par la suivante : Pour tout $x \in K$, il existe un n tel que $(T^n 1)(x) > 1$, alors la suite des $T^n 1$ tend uniformément vers $+ \infty$.

Cas particulier. - Supposons que K soit le tore $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ et que T soit l'opérateur presque multiplicatif, défini par $Tf = \alpha.(f \circ \varphi)$, où $\alpha \in C^+(K)$ avec $\alpha > 0$, et où φ est la rotation $x \to x + \theta$ avec θ irrationnel.

Posons $\beta = \log \alpha$ et $k = \int \beta(t)\, dt$, où dt est la mesure de Haar de K . Alors le critère pour que $\lim T^n 1 = 0$ (resp. $+\infty$) est que $k < 0$ (resp. $k > 0$) . Les théorèmes énoncés précisent également le comportement des $T^n 1$ lorsque $k = 0$.

Convergence de moyennes. - On se donne $\varphi \in C(K, K)$ et $\beta \in C(K)$, et on pose

$$s_n^\beta = (\beta + \beta \circ \varphi + \ldots + \beta \circ \varphi^{n-1})/n .$$

PROPOSITION. - Si la suite des s_n^β converge simplement vers une fonction continue, la convergence est uniforme.

COROLLAIRE. - Pour tout opérateur presque multiplicatif T sur $C(K)$ associé à une $\alpha > 0$ de $C^+(K)$, si la suite des $(T^n 1)^{1/n}$ converge simplement vers une fonction continue, la convergence est uniforme.

Ce corollaire pose la question suivante : Peut-on étendre cet énoncé à tout opérateur T et à toute $f > 0$? Plus précisément :

PROBLÈME. - Est-ce que, pour tout opérateur positif T sur $C(K)$ et toute $f > 0$ de $C(K)$, la convergence simple de la suite des $(T^n f)^{1/n}$ vers une fonction continue entraîne sa convergence uniforme.

Notons que le problème analogue pour la suite des $T^n f$ a une réponse négative, même pour $f = 1$.

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY