Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claude Piquet

Opérateurs multiplicativement liés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 4, 8 p.

8 novembre 1973

OPÉRATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIÉS

par Claude PIQUET

(d'après J. G. DHOMBRES)

1. Quelques exemples d'opérateurs linéaires continus. Relations fonctionnelles.

1.1. Interpolation de Lagrange. - Prenons comme espace topologique $X = [0 , 1]$, et donnons-nous une partie finie $Y = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$ de X. A toute fonction continue f de $C(X)$ on sait associer un polynôme Pf, de degré $n - 1$, qui coïncide avec f aux points x_k $(k = 1 , 2 , \ldots , n)$:

$$Pf(X) = \sum_{k=1}^{n} (\prod_{p\neq k} \frac{x - x_p}{x_k - x_p}) f(x_k) .$$

L'opérateur P ainsi défini est visiblement linéaire, idempotent et satisfait à la relation fonctionnelle suivante

$$(1.1) \qquad \forall f , \ \forall g \in C(X) \qquad P(fPg) = P(fg) .$$

Cette seule relation fonctionnelle caractérise une classe d'opérateurs linéaires sur $C(X)$ que l'on appelle classe des opérateurs d'interpolation sur $C(X)$. Nous verrons en quoi cette dénomination est justifiée, et dans quelle mesure ces opérateurs rappellent l'interpolation de Lagrange.

1.2. Transformation de Hilbert sur le tore. - Soient f une fonction de $L^2(0,1)$, et χ_n le caractère $\chi_n(x) = \exp(2i\pi nx)$. f est développable en une série de Fourier qui converge en moyenne quadratique : $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \chi_n$. Soit P l'opérateur linéaire défini par $P(\chi_n) = \chi_n$ si $n \geq 0$, $P(\chi_n) = 0$ si $n < 0$. P commute donc avec les translations, et est continu. On vérifie que, pour tout $k \in \underset{\sim}{Z}$, $P(\chi_k Pf + fP\chi_k) = P(f\chi_k) + (Pf)(P\chi_k)$, ce qui implique

$$(1.2) \qquad \forall f , \ \forall g \in L^2(0 , 1) , \quad P(fPg + gPf) = P(fg) + (Pf)(Pg) .$$

Un tel opérateur est nommé opérateur de Baxter. Un calcul simple montre que tout opérateur de Baxter sur le tore, linéaire, continu, qui commute avec les translations, est une transformation de Hilbert, c'est-à-dire, est de la forme

$$P(\chi_n) = \chi_n \ \text{ si } \ n \in \Lambda , \quad P(\chi_n) = 0 \ \text{ si } \ n \notin \Lambda ,$$

où Λ est l'un des sous-demi-groupes suivants de $\underset{\sim}{Z}$: $\pm \underset{\sim}{N}$, $\pm \underset{\sim}{N}^*$.

1.3. Opérateurs de moyenne. - Considérons l'espace topologique compact

$$X = [0 , 1] \times [0 , 1] .$$

Soit $f \in C(X)$. Posons $Pf(x , y) = \int_0^1 f(x , t) \, d\mu(t)$, où μ est une mesure de Radon donnée. On vérifie que Pf est constante sur les classes d'équivalence de la relation : $(x\ ,\ y) \sim (x'\ ,\ y')$ si, et seulement si, $y = y'$. Il en résulte que :

(1.3) $$\forall\ f\ ,\ \forall\ g \in C(X)\ ,\quad P(fPg) = (Pf)(Pg)\ .$$

Un tel opérateur est appelé opérateur de moyenne : La moyenne Pf de f joue, vis-à-vis de l'opération P, le rôle d'une constante.

De très nombreuses classes d'opérateurs, que l'on rencontre dans des domaines extrêmement variés (analyse combinatoire, probabilités, mécanique, analyse fonctionnelle) sont caractérisés par une relation fonctionnelle du type précédent, qui précise le comportement de P vis-à-vis de la structure algébrique du domaine de définition. C'est ce qui justifie l'introduction de la définition donnée au paragraphe suivant.

1.4. Opérateurs multiplicativement liés.

DÉFINITION. - *Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre commutative unifère sur $\mathbb{C}$. On dira qu'un opérateur linéaire P de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$ est multiplicativement lié s'il existe cinq constantes complexes A , B , C , D , E telles que*

(1.4) $$\forall\ f\ ,\ \forall\ g \in \mathfrak{a}\ ,\quad P(fPg+gPf) = APf.Pg+B(fPg+gPf)+Cfg+DP(fg)+EP(PfPg)\ .$$

Cette définition recouvre tous les cas raisonnables ; on montre, en effet ([3], chapitre 1), que si $P(fPf)$ s'exprime à l'aide d'une fonction "entière" de f , Pf , $P(f^2)$ et $P(Pf)^2$, alors P est multiplicativement lié.

On cherche alors à classer les opérateurs multiplicativement liés, et à les réduire à un petit nombre de types fondamentaux. Ce travail se trouve dans [3] (chapitre 2), et nous extrayons de la longue liste ainsi obtenue deux types fondamentaux.:

Les opérateurs d'interpolation :

$$P(fPg) = P(fg)\ .$$

Les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques (en abrégé S. M. S.) :

$$P(fPg) = (Pf)(Pg)\ .$$

On se place désormais dans le cas où $\mathfrak{a} = C(X)$ avec X compact. Dans ces conditions, un opérateur sera appelé markovien s'il conserve les constantes et est de norme unité. Un opérateur S. M. S. markovien est appelé opérateur de moyenne.

2. Opérateurs d'interpolation sur $C(X)$.

2.1. DÉFINITION. - *Soit X un espace compact ; un opérateur linéaire continu de $C(X)$ est un opérateur d'interpolation si :*

$$\forall\ f\ ,\ \forall\ g \in C(X)\ ,\quad P(fPg) = P(fg)\ .$$

Deux objets fondamentaux accompagnent un opérateur d'interpolation :

L'interpolateur de P : C'est l'ensemble Y des x de X tels que $Pf(x)=f(x)$ pour tout f de $C(X)$.

L'espace d'interpolation de P , qui n'est rien d'autre que le sous-espace image E de P .

P étant continu et idempotent, Y et E sont fermés. Le noyau d'un opérateur d'interpolation joue un rôle essentiel.

2.2. PROPOSITION.

1° $\operatorname{Ker} P$ est un idéal fermé de $C(X)$.

2° Soit $M_x = \{f \in C(X) \; ; \; f(x) = 0\}$ un idéal maximal de $C(X)$.

Alors M_x contient $\operatorname{Ker} P$ si, et seulement si, $x \in Y$.

3° $\operatorname{Ker} P = \bigcap_{x \in Y} M_x$.

En effet, si $Pg = 0$, $P(fg) = 0$, ce qui démontre le 1°. Si $M_x \supset \operatorname{Ker} P$, $\forall f \in \operatorname{Ker} P$, $f(x) = 0$. P étant idempotent, $\forall f \in C(X)$, $f - Pf \in \operatorname{Ker} P$, donc $\forall f \in C(X)$, $Pf(x) = f(x)$, donc $x \in Y$. Inversement, si $x \in Y$, $\forall f \in \operatorname{Ker} P$, $f(x) = Pf(x) = 0$, donc $f \in M_x$. Enfin, $\operatorname{Ker} P$ étant un idéal fermé de $C(X)$ coïncide avec l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

2.3. COROLLAIRE. - Si deux opérateurs d'interpolation ont même interpolateur et même espace d'interpolation, alors ils coïncident.

En effet, ils ont alors même noyau et même espace image, donc ils coïncident, car ils sont idempotents.

Le théorème suivant justifie le nom donné aux opérateurs d'interpolation.

2.4. THÉORÈME. - Soient P un opérateur linéaire continu sur $C(X)$, et Y un fermé de X . Alors P est un opérateur d'interpolation d'interpolateur Y si, et seulement si,

1° $\forall f \in C(X)$, Pf ne dépend que de la restriction de f à Y .

2° $\forall f \in C(X)$, $\forall x \in Y$, $Pf(x) = f(x)$.

D'après la proposition 2.2, si P est d'interpolation, $f|Y = 0$ implique $Pf=0$, ce qui démontre le 1°. Le 2° résulte de la définition de Y . Inversement, si les 1° et 2° sont vrais, $\forall x \in Y$, $f(g - Pg)(y) = 0$, donc $P\{f(g - P(g))\} = 0$, donc $P(fPg) = P(fg)$, donc P est d'interpolation. Soit Y_0 son interpolateur : Il est clair que $Y \subset Y_0$. Si $Y \neq Y_0$, $\exists x \in Y_0 - Y$; Y étant fermé, $\exists f \in C(Y)$ telle que $f(x) = 1$ et $f|Y = 0$; mais alors $0 = Pf(x) = f(x) = 1$, d'où une contradiction.

Par dualité, on obtient une autre caractérisation intéressante des opérateurs d'interpolation.

2.5. COROLLAIRE. - Soient P^* le transposé d'un opérateur linéaire continu de $C(X)$, et Y un fermé de X . P est un opérateur d'interpolation d'interpolateur Y si, et seulement si, pour tout x de X , le support de $P^*(\delta_x)$ est inclus dans Y , et si $P^*(\delta_x) = \delta_x$ quand $x \in Y$.

On se pose maintenant le problème suivant : Soit Y un fermé de l'espace compact X . Y est-il l'interpolateur d'un opérateur d'interpolation (resp. d'un opérateur d'interpolation markovien) ? La réponse n'est pas évidente en général. Nous renvoyons à [3] (chapitre IV) afin d'avoir des conditions suffisantes sur Y pour être un interpolateur (resp. un interpolateur markovien).

Le théorème suivant, dû à ARENS [1], permet de répondre partiellement à la question posée.

2.6. THÉORÈME. - Soient Y une partie fermée d'un compact X , et f une fonction continue de Y dans un sous-ensemble convexe compact K d'un sous-espace métrique d'un e. v. t. l. c. Il existe une extension continue $\tilde{f}$ de f à tout X , telle que $\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subset K$.

Considérons le cas où Y est une partie fermée métrisable d'un compact X . La fonction $x \longmapsto \delta_x$ de Y dans $S_1^+(Y)$, ensemble convexe vaguement compact des mesures de probabilité sur Y , est vaguement continue. $S_1^+(Y)$ est métrisable pour la topologie vague ; il existe donc, par le théorème précédent, un prolongement vaguement continu de la fonction considérée à tout X . Soit $x \longmapsto P^*(\delta_x)$ ce prolongement. Alors, l'opérateur P de $C(X)$ dans $C(X)$, défini par

$$Pf(x) = \langle f \, , \, P^*(\delta_x)\rangle \, ,$$

est linéaire, continu car $P^*(\delta_x) \in S_1^+(Y)$, et le support de $P^*(\delta_x)$ est contenu dans Y . Enfin, comme $Pf = 0$ si $f|Y = 0$, P est un opérateur d'interpolation, d'interpolateur Y (corollaire 2.5) ; comme, de surcroit, $\|P\| \leq 1$ et $P(1) = 1$, on a le corollaire suivant.

2.7. COROLLAIRE. - Tout sous-ensemble métrisable fermé d'un espace compact est un interpolateur markovien.

De plus, tout produit infini et toute limite projective d'interpolateurs markoviens est un interpolateur markovien ([3], chap. IV). Toutefois, on sait construire un sous-ensemble fermé Y d'un espace compact X tel qu'il n'existe aucun opérateur d'interpolation continu (même non markovien) d'interpolateur Y (voir [2]).

La caractérisation des interpolateurs (même markoviens) est donc un problème ouvert dans le cas non métrisable.

3. Opérateurs S. M. S. sur $C(X)$.

3.1. DÉFINITION. - Soit X un espace compact. Un opérateur linéaire continu P

de $C(X)$ est S. M. S. si $\forall f$, $\forall g \in C(X)$, $P(fPg) = (Pf)(Pg)$.

Cette fois-ci, c'est l'espace image, et non le noyau de l'opérateur, qui est intéressant : En effet, ce sous-espace image est une sous-algèbre (fermée si P est markovien, car alors P est un idempotent) de $C(X)$. On associe à un opérateur S. M. S. une relation d'équivalence

$$(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (\forall f \in C(X) , \quad Pf(x) = Pf(y)) .$$

On note $[x]$ la classe de x , et Φ la surjection canonique quotient.

On dit qu'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est quasi moyennante (resp. moyennante) si elle est associée à un opérateur S. M. S. (resp. un opérateur de moyenne).

On a alors la caractérisation duale des opérateurs S. M. S.

3.2. THÉORÈME. - Un opérateur linéaire continu P de $C(X)$ est S. M. S. si, et seulement si, pour tout x de X , le support de $P^*(\delta_x)$ est contenu dans la classe $[x]$ (P^* est le transposé de P).

En effet, si P est S. M. S., $\forall f$, $\forall g \in C(X)$,

$$\langle fPg , P^*(\delta_x)\rangle = \langle (Pf)(Pg) , \delta_x\rangle = Pg(x)\langle f , P^*(\delta_x)\rangle ,$$

car Pg est constante sur chaque classe. Donc

$$(Pg)\ P^*(\delta_x) = Pg(x)\ P^*(\delta_x) \quad \text{pour tout } g \text{ de } C(X) .$$

Si $y \in \operatorname{supp} P^*(\delta_x)$, $Pg(y) = Pg(x)$, donc $y \in [x]$.

Inversement, si pour tout x de X , $\operatorname{supp}(P^*(\delta_x)) \subset [x]$, on a

$$P(fPg)(x) = \langle fPg , P^*(\delta_x)\rangle = Pg(x)\langle f , P^*(\delta_x)\rangle$$

car Pg est constante sur $[x]$. Donc $P(fPg) = (Pf)(Pg)$, et P est S. M. S.

3.3. PROPOSITION. - Soit P un opérateur de moyenne sur $C(X)$. Soit $Y = X/\mathcal{R}$; alors $\operatorname{Im} P$ est isométriquement isomorphe à $C(Y)$.

P étant markovien est idempotent : $\operatorname{Im} P$ est donc une sous-algèbre fermée de $C(X)$, dont les éléments sont des fonctions constantes sur les classes suivant $\mathcal{R}$. En utilisant la compacité de X , on montre aisément que $C(Y)$ est isométriquement isomorphe à la sous-algèbre (fermée) de toutes les fonctions de $C(X)$ constantes sur les classes suivant $\mathcal{R}$. Comme $\operatorname{Im} P$ contient les constantes, on conclut à l'aide du théorème de Stone-Weierstrass.

On peut alors se poser la question suivante : Quelles sont les relations d'équivalence moyennantes sur X ? Autrement dit, étant donnée une partition de X en fermés, est-elle associée à un opérateur de moyenne ?

Ce problème difficile se traite mieux en introduisant une notion plus générale qui englobe l'étude des opérateurs d'interpolation et l'étude des opérateurs de moyenne, à savoir, la notion d'exave linéaire, introduite par PEŁCZYNSKI [5].

4. Exaves linéaires.

Nous allons voir que cette notion contient les opérateurs étudiés aux §2 et 3, ce qui explique son nom : ex comme "extension" et ave comme "averaging". Donnons auparavant la définition :

Soient $\mathcal{K}$ la catégorie des espaces compacts (les morphismes étant les applications continues), et $\mathcal{B}$ la catégorie des espaces de Banach, avec, pour morphismes, les contractions linéaires. F désigne le foncteur contravariant suivant : Si $\Phi : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{K}$, $F[\Phi] : C(Y) \to C(X)$ est défini par

$$F[\Phi](f) = f \circ \Phi .$$

4.1. DÉFINITION. - Soit Φ une fonction continue de X dans Y (X et Y sont compacts). Un opérateur linéaire continu R de $C(X)$ dans $C(Y)$ est un exave linéaire selon Φ si, pour tout h de $C(Y)$, on a :

$$R(h \circ \Phi) \circ \Phi = h \circ \Phi .$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} C(Y) \arrow[r, "F[\Phi]"] \arrow[d, "F[\Phi]"'] & C(X) \\ C(X) \arrow[r, "R"] & C(Y) \arrow[u, "F[\Phi]"'] \end{tikzcd}$$

On vérifie assez facilement la proposition suivante qui relie la notion d'exave linéaire aux opérateurs d'interpolation et de moyenne.

4.2. PROPOSITION.

1° Soit R un exave linéaire selon Φ ; alors $\Phi(X)$ est un interpolateur dans Y (un interpolateur markovien si $\|R\| \leq 1$). Inversement, si $\Phi(X)$ est un interpolateur dans Y et si Φ est injectif, il existe un exave linéaire selon Φ.

2° Si Φ est surjectif, il existe un exave linéaire selon Φ si, et seulement si, la relation d'équivalence sur X associée à Φ est moyennante.

(Dans le premier cas, l'opérateur cherché est $P = RF[\Phi]$, dans le second cas, $P = F[\Phi]\, R$.)

Les opérateurs d'interpolation correspondent, en quelque sorte, aux exaves selon Φ quand Φ est injectif, et les opérateurs de moyenne aux exaves selon Φ quand Φ est surjectif.

Comme pour les opérateurs d'interpolation et les opérateurs de moyenne, on a une caractérisation des exaves par transposition.

4.3. THÉORÈME. - Soient R un opérateur linéaire continu markovien de $C(X)$ dans $C(Y)$, où X et Y sont compacts, et Φ une fonction continue de X dans Y . R est un exave linéaire selon Φ si, et seulement si, 1° $y \longmapsto R^*(\delta_y)$ <u>est une application vaguement continue de</u> Y <u>dans</u> $S_1^+(X)$.

2° <u>Pour tout</u> y <u>de</u> $\Phi(X)$, <u>le support de</u> $R^*(\delta_y)$ <u>est contenu dans</u> $\Phi^{-1}(y)$.

La question qui se pose maintenant est de savoir si l'on peut déterminer les fonctions Φ selon lesquelles il existe un exave linéaire. Nous renvoyons au chapitre IV du mémoire de DHOMBRES [3] pour la démonstration du théorème suivant.

4.4. THÉORÈME. - <u>Si</u> Φ <u>est une fonction continue ouverte du compact métrisable</u> X <u>dans un compact</u> Y , <u>il existe un exave linéaire de Markov selon</u> Φ .

Ce théorème signifie qu'une relation d'équivalence ouverte et fermée sur un espace compact métrisable est moyennable.

Le théorème 4.4, s'étend par produit infini.

4.5. THÉORÈME. - <u>Soit</u> P_i $(i \in I)$ <u>une famille d'exaves linéaires de Markov selon</u> Φ_i , <u>où</u> $\Phi_i : X_i \rightarrow Y_i$ <u>est continue</u>, <u>ouverte</u>, <u>et où</u> X_i <u>est compact métrisable et</u> Y_i <u>compact</u>. <u>Il existe un exave linéaire de Markov selon</u>

$$\Phi = \bigotimes_{i\in I} \Phi_i : \prod_{i\in I} X_i \rightarrow \prod_{i\in I} Y_i .$$

Le problème général de l'existence d'un exave linéaire selon Φ reste ouvert. Une hypothèse de métrisabilité sur Y est insuffisante ; on dit, du reste, qu'un espace compact Y , image par une application Φ continue d'un espace de Cantor généralisé $\{0 , 1\}^{\aleph}$, est un <u>espace de Milutin</u> si la relation d'équivalence définie par Φ est moyennante. MILUTIN a montré que $[0 , 1]$ est un tel espace ; PEŁCZYNSKI a montré qu'un produit topologique d'espaces de Milutin était un espace de Milutin, et DITOR [4] a démontré l'intéressante généralisation suivante : Tout espace compact infini est l'image, par une application Φ continue, d'un espace compact totalement discontinu, parfait et de même poids topologique, où la relation d'équivalence associée à Φ est moyennante. (En ce cas, il existe un exave linéaire selon Φ d'après la proposition 4.2.)

Seuls quelques aspects de la théorie des opérateurs multiplicativement liés ont été développés ici. En particulier, les opérateurs multiplicativement liés définis sur un espace de Banach fonctionnel ont été laissés de côté. Nous renvoyons le lecteur, pour plus de détails, à la thèse de J. G. DHOMBRES [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARENS (R.). - Extensions of functions on fully normal spaces, Pac. J. Math., t. 2, 1952, p. 11-22.

[2] CORSON (H. H.) and LINDENSTRAUSS (J.). - On simultaneous extension of continuous functions, Bull. Amer. math. Soc., t. 71, 1965, p. 542-545.

[3] DHOMBRES (J. G.). - Sur les opérateurs multiplicativement liés, Bull. Soc. math. France, Mémoire 27, 1971, 159 P. (Thèse Sc. math. Paris, 1970).

[4] DITOR (S.). - On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 149, 1970, p. 443-452.

[5] PEŁCZYNSKI (A.). - Linear extensions, linear averagings and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions, Dissertationes Mathematicae, Warszawa, 1968, n° 58, 92 p.

(Texte reçu le 20 mai 1974)

Claude PIQUET
Université de Paris VI
Mathématiques, Tour 46
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05