Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Marouan Ajlani

Les cônes autopolaires en dimension finie

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. nº 18, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 18, 8 p.

10 avril 1975

LES CÔNES AUTOPOLAIRES EN DIMENSION FINIE

par Marouan AJLANI

(d'après Alain CONNES [2])

Cet exposé constitue la première partie d'un travail qui a pour but d'établir le lien, en dimension finie, entre le mémoire de CONNES [2] et la classification de CARTAN des domaines bornés symétriques dans $\mathbb{C}^n$. A. CONNES caractérise dans [2] les cônes de $\mathbb{R}^n$ qui sont isomorphes aux cônes de matrices hermitiennes positives par trois propriétés.

1° L'autopolarité,

2° L'homogénéité faciale,

3° L'orientabilité.

Nous n'avons pas réussi à montrer qu'un cône autopolaire et facialement homogène est linéairement homogène (c'est-à-dire que le groupe de ses automorphismes linéaires agit transitivement sur l'intérieur de ce cône). Nous montrerons, sans utiliser la caractérisation de Connes, qu'un cône autopolaire, facialement homogène et orientable, est un cône homogène. Monique GUILLOT, de Nice, a démontré (non publié encore) que tout cône, autopolaire et linéairement homogène, est facialement homogène au sens de Connes.

N.-B. - Nous appelons ici "facialement homogène" ce que CONNES nommes "homogène", afin de distinguer cette notion due à CONNES de celle généralement utilisée pour dire que le groupe des automorphismes est transitif sur l'intérieur du cône, c'est-à-dire que, pour tout couple de points de l'intérieur de ce cône, il existe un automorphisme du cône qui transforme le premier point en le second.

1. Existence d'un point privilégié dans l'intérieur d'un cône autopolaire.

Ce paragraphe contient quelques légères modifications de parties des mémoires de KOECHER [4], ROTHAUS [6] et VINBERG [7].

Définition 1. - Nous dirons qu'un cône $P \subset \mathbb{R}^n$ est autopolaire s'il est égal à son cône polaire (R^n est identifié à son dual au moyen du produit scalaire ordinaire noté $\langle . , . \rangle$). Autrement dit,

$$(x \in P) \Longleftrightarrow (\langle x , y \rangle \geq 0 , \quad \forall\, y \in P) .$$

Exemples de cônes autopolaires.

1° $(\mathbb{R}^+)^n$,

2° $\{x , x_n^2 \geq x_{n-1}^2 + \dots + x_1^2\}$, 3° Dans $\underset{\sim}{R}^3$, tous les cônes qui ont pour base un polygone régulier impair, et dont une génératrice est orthogonale à la face opposée,

4° Dans $\underset{\sim}{R}^{n^2}$, le cône des matrices hermitiennes positives sur $\underset{\sim}{C}^n$.

Dans [4], KOECHER définit la fonction numérique $x \in \mathring{P} \longrightarrow \varphi(x) = \int_{\mathring{P}} \exp(-\langle xt\rangle)\, dt$ (où dt désigne la mesure de Lebesgue de $\underset{\sim}{R}^n$) sur l'intérieur du cône autopolaire P . On verra dans [4], ou mieux dans [7] les démonstrations, faciles, des propriétés suivantes de φ .

PROPOSITION 2 (KOECHER-ROTHAUS-VINBERG). - <u>Pour tout cône</u> $P \subset \underset{\sim}{R}^n$ <u>autopolaire, l'application</u> $x \in \mathring{P} \longrightarrow \int_{\mathring{P}} \exp(-\langle xt\rangle)\, dt$ <u>possède les propriétés suivantes</u> :

1° <u>L'application</u> φ <u>est positive, définie en tout point de</u> $\mathring{P}$, <u>et tend vers l'infini, à la frontière de</u> P ;

2° <u>On a</u> $\varphi(Tx) = \varphi(x)/\det(T)$ <u>pour tout automorphisme</u> T <u>de</u> P ;

3° <u>L'application</u> $\log \varphi$ <u>est strictement convexe ainsi que</u> φ .

KOECHER [4] définit une application

$$x \in \mathring{P} \longrightarrow x^{-1} = \frac{1}{\varphi(x)} \int_{\mathring{P}} e^{-\langle xt\rangle}\, t\, dt = -\, d \log \varphi(x) \in \mathring{P} \ ;$$

il affirme que cette application est involutive. Nous pensons que sa démonstration n'en est pas une. ROTHAUS [6] et VINBERG [7] montrent que l'application $x \longrightarrow x^{-1}$ est involutive pour les cônes homogènes.

PROPOSITION 3 (KOECHER-ROTHAUS-VINBERG). - <u>Pour tout cône autopolaire</u> $P \subset \underset{\sim}{R}^n$, <u>l'application</u> $x \longrightarrow x^{-1} = 1/\varphi(x) \int_{\mathring{P}} \exp(-\langle xt\rangle) t\, dt$ <u>possède les propriétés suivantes</u> :

1° VINBERG [7] : <u>Le point</u> $x^{-1} \in \mathring{P}$ <u>est le centre de gravité de</u>

$$P_n = \{t \ , \ \langle xt\rangle = n\} \cap P \ ;$$

2° <u>Pour tout automorphisme</u> T <u>de</u> P , <u>on a</u> ${}^tA(Ax)^{-1} = x^{-1}$;

3° <u>L'application</u> $x \longrightarrow x^{-1}$ <u>est bijective sur</u> $\mathring{P}$.

PROPOSITION 4. - <u>Pour tout cône autopolaire</u> $P \subset \underset{\sim}{R}^n$, <u>l'application</u> $x \longrightarrow x^{-1}$ <u>possède un unique point fixe</u> $c \in \mathring{P}$.

<u>Démonstration</u>. - La démonstration de cette proposition est dans [5], nous la reprenons pour insister sur l'unicité.

Remarquons, suivant VINBERG, que si l'on désigne par

$$N(x) = \{y \in \mathring{P} \ ; \ \varphi(y) = \varphi(x)\}$$

et par $T(x)$ l'espace tangent à cette variété au point x , on a :

$$\langle d \log \varphi(x) \ , \ x - t\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in T(x) \ ,$$

soit $\langle x^{-1}, x - t\rangle = 0$ pour tout $t \in T(x)$, ou encore

$$T(x) = \{t\ ,\ \langle x^{-1}, t\rangle = \langle x^{-1}, x\rangle = n\}$$

ce qui peut servir à une nouvelle interprétation géométrique du point x^{-1}.

Il résulte de la relation $(\lambda x)^{-1} = (1/\lambda)x^{-1}$, $\lambda > 0$, qu'il est équivalent de dire qu'il existe un point fixe, ou de dire qu'il existe une droite globalement invariante dans $\mathring{P}$. Mais alors une droite globalement invariante serait orthogonale à la variété $N(x)$, elle existe, et elle est unique, parce que φ est convexe.

2. Faces des cônes autopolaires et facialement homogènes.

Rappelons d'abord quelques propriétés évidentes de cônes autopolaires : Pour tout cône autopolaire $P \subset \mathbb{R}^n$, on a $P \cap (-P) = \{0\}$ d'où il résulte que $E = \mathbb{R}^n$ est engendré par $P \cup (-P)$. Tout $x \in E$ s'écrit d'une seule manière $x = x^+ - x^-$, ou $\langle x^+, x^-\rangle = 0$, $x^+ \in P$ et $x^- \in P$. Pour toute face F, l'intersection de P avec le sous-espace vectoriel orthogonal à F est une face notée $F^\perp$. Le théorème de Hahn-Banach implique que, pour toute face propre $F \subsetneq P$, la face $F^\perp$ n'est pas vide ; il en résulte que si $F \subset P$ est autopolaire dans l'espace vectoriel qu'elle engendre, alors $F = F^{\perp\perp}$.

DÉFINITION 5 (CONNES). - Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un cône autopolaire ; nous dirons que P est facialement homogène si, pour toute face $F \subset P$, l'opérateur $\exp(t(P_F - P_{F^\perp}))$ est un automorphisme du cône P pour $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nous noterons, dans toute la suite, par P_F le projecteur orthogonal sur l'espa- $F - F$.

PROPOSITION 6 (CONNES). - Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un cône autopolaire, notons par $D(P)$ l'espace des opérateurs δ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $e^{t\delta}$ soit un automorphisme de P, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $D(P)$ est une sous-algèbre de Lie de $gl(\mathbb{R}^n)$ stable par transposition.

PROPOSITION 7 (CONNES). - Pour tout cône autopolaire $P \subset \mathbb{R}^n$ et pour tout $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, il est équivalent de dire que δ appartient à $D(P)$, ou de dire que, pour tous $x, y \in P$, $x \perp y$ entraîne $\delta x \perp y$.

PROPOSITION 8. - Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un cône autopolaire et facialement homogène, toute face F de P est autopolaire et facialement homogène dans l'espace vectoriel $\tilde{F} = F - F$ engendré par elle.

Démonstration.

1° F est autopolaire. Soit $x \in \tilde{F}$; nous avons à montrer que

$$(\langle xx'\rangle > 0 \text{ pour tout } x' \in F) \text{ entraîne } (x \in F).$$

Il suffit alors de montrer que $P_F(P) \subset P$, ou encore que $\langle P_F\, x, y\rangle \geqslant 0$,

$\forall\ x\ ,\ y \in P$; Pour cela, on considère l'automorphisme $\exp(t(P_F - P_{F^\perp}))$; on a

$$\langle e^{t(P_F - P_{F^\perp})} x\ ,\ y\rangle = \langle (e^t\ P_F + e^{-t}\ P_{F^\perp} + 1 - P_F - P_{F^\perp})x\ ,\ y\rangle \geq 0\ ,$$

d'où, pour t assez grand,

$$\langle e^t\ P_F\ x\ ,\ y\rangle \geq 0\ ,$$

d'où $\langle P_F\ x\ ,\ y\rangle \geq 0$.

2° F est facialement homogène ; soit $G \subset F$ une face ; nous noterons par $G^{\perp_F}$ l'intersection de $G^\perp$ avec F . D'après la proposition 7, nous avons à montrer que

$$(x\ ,\ y \in F\ ,\quad x \perp y) \text{ entraîne } (\langle P_G\ x\ ,\ y\rangle = \langle P_{G^{\perp_F}}\ x\ ,\ y\rangle)\ ,$$

l'homogénéité faciale entraîne que $\langle P_G\ x\ ,\ y\rangle = \langle P_{G^\perp}\ x\ ,\ y\rangle$, il suffit alors de voir que $P_{G^\perp}\ x = P_{G^{\perp_F}} x$. pour tout $x \in F$, ou encore que $P_{G^\perp}\ x \in F$. Or

$$\langle P_{G^\perp}\ x\ ,\ z\rangle = \langle P_G\ x\ ,\ z\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in F^\perp\ ,$$

d'où

$$P_{G^\perp}\ x \in F^{\perp\perp} = F\ .$$

3. Une condition suffisante pour l'homogénéité.

Il résulte immédiatement de la proposition 4 et de la proposition 3-2° que le point c , invariant par l'opération $x \dashrightarrow x^{-1}$, est un point fixe pour tout automorphisme involutif et symétrique du cône autopolaire P .

De même, si T est un automorphisme de P , et H un sous-espace vectoriel de $E = \underset{\sim}{R}^n$ invariant par T ainsi que son supplémentaire orthogonal $H^\perp$, et si T_H est une involution symétrique, alors le point fixe c appartient à $H^\perp$.

Nous montrerons dans l'appendice que tout cône $P \subset \underset{\sim}{R}^n$, autopolaire facialement homogène et orientable au sens de CONNES, est tel qu'il existe, pour toute face $F \subset P$, un automorphisme linéaire valant l'identité sur $(\tilde{F} + \tilde{F}^\perp)$, et moins l'identité sur $(F\ ,\ F^\perp)^\perp$, il en résulte que le point c , défini dans la proposition 4, appartient à $(F + F^\perp)$ pour toute face F de P .

PROPOSITION 9. - Soit $P \subset \underset{\sim}{R}^n$ un cône autopolaire, facialement homogène ; supposons qu'il existe un point $c \in \mathring{P}$ tel que $c \in F + F^\perp$ pour toute face F de P, alors le groupe des automorphismes linéaires du cône P est transitif sur $\mathring{P}$.

Démonstration. - Nous montrerons que l'on peut passer d'un point $x \in \mathring{P}$ quelconque au point c introduit dans la proposition 4.

Soit λ_1, le plus grand $\lambda > 0$ tel que $x - \lambda c = (x - \lambda c)^+$, et soit $F_1^\perp$ la face orthogonale à la face F_1 , engendrée par $(x - \lambda_1\ c)^+$, on a

$$P_{F_1^\perp}\ x = \lambda_1\ P_{F_1^\perp}\ c\ .$$

Notons par c_1 et x_1 les projections orthogonales de c et x sur F_1.

Soit $G \subset F_1$, on a $c \in G + G^\perp$, donc $c_1 \in G + (G^\perp \cap F_1)$, or $G^\perp \cap F_1$ est précisément la face orthogonale à G dans la face autopolaire F_1 (proposition 8), ainsi c_1 appartient à tout sous-cône de F_1 de la forme $G + G'$, où G est une face de F_1, et G' la face orthogonale dans F_1 à G.

Soit alors λ_2 tel que $x_1 - \lambda_2 c_1 = (x_1 - \lambda_2 c_1)^+$, et soit $F_2^\perp$ la face de F_1 orthogonale à la face engendrée par $(x_1 - \lambda_2 c_1)^+$, on a $P_{F_2^\perp} x_1 = \lambda_2 c_1$, ... Au bout de $(n-1)$ opérations au plus, on arrive à une génératrice extrémale $F_n^\perp$.

La famille de faces $F_1^\perp, \ldots, F_n^\perp$, est constituée de faces deux à deux orthogonales, et l'on a $P_{F_i^\perp} x = \lambda_i P_{F_i^\perp} c$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soient alors $t_1, \ldots, t_n$ des nombres réels ainsi définis de proche en proche :

$$\begin{aligned} \exp(-t_1)\,\lambda_1 &= \exp(t_1)\,\lambda_2 \\ \exp(-t_2)\,\exp(t_1)\,\lambda_2 &= \exp(t_3)\,\lambda_3 \\ &\vdots \\ \exp(-t_{n-1})\,\exp(t_{n-2})\,\lambda_{n-1} &= \exp(t_n)\,\lambda_n \end{aligned}$$

alors l'opérateur $\exp(t_n(F_n - F_n^\perp)) \circ \ldots \circ \exp(t_2(F_2 - F_2^\perp)) \circ \exp(t_1(F_1 - F_1^\perp))$ transforme x en un homothétique de c.

4. Appendice : Une symétrie induite par l'orientation.

Rappelons que CONNES appelle orientation d'un cône autopolaire et facialement homogène P, la donnée d'un opérateur I de carré égal à moins l'identité sur le quotient de l'algèbre de Lie $D(P)$ par son centre noté $Z(P)$.

Nous consacrons cette partie à montrer que tout cône $P \subset \underset{\sim}{R}^n$, autopolaire, facialement homogène et orientable, est symétrique par rapport à $(\tilde{F} + \tilde{F}^\perp)$. Plus précisément : il existe un automorphisme linéaire de P valant l'identité sur $(\tilde{F} + \tilde{F}^\perp)$, et moins l'identité sur $(\tilde{F} + \tilde{F}^\perp)^\perp$. Remarquons que ce résultat devient évident si on utilise la caractérisation de CONNES dans toute sa force.

Soit T un endomorphisme de $\underset{\sim}{R}^n$ qui commute avec les opérateurs $P_F - P_{F^\perp}$, alors T est une dérivation de P, car si x et y sont deux éléments de P avec $x \perp y$, on obtient, en notant par F la face engendrée par x,

$$(P_F - P_{F^\perp})Tx = T(P_F - P_{F^\perp})x = Tx ,$$

d'où

$$\langle (id_E - P_F + P_{F^\perp})Tx , y\rangle = 0$$

ou encore

$$\langle Tx , 2y\rangle = 0 \quad \text{et} \quad T \in D(P) .$$

L'algèbre $D(P)$ étant stable par transposition, elle est engendrée par les dérivations symétriques, il résulte alors de ce qui précède que tout sous-espace vectoriel de $\underset{\sim}{R}^n$, invariant par $D(P)$, a son projecteur orthogonal dans le centre $Z(P)$.

Nous supposerons dans toute la suite que le cône P est indécomposable, c'est-à-dire qu'il n'est pas égal à la somme de deux de ses faces, alors la représentation (dans $\underset{\sim}{R}^n$) donnée de $D(P)$ est simple ; en effet, si $H \subsetneqq \underset{\sim}{R}^n$ est un sous-espace invariant non réduit à zéro, et si P_H est le projecteur orthogonal de H , on obtient $P_H \in D(P)$, soit $\exp(tP_H)$ est un automorphisme de P , d'où on déduit que P_H est limite d'automorphismes de P , d'où

$$P_H(P) \subset P \quad \text{et} \quad P = P \cap H + P \cap H^{\perp} .$$

Il en résulte que l'algèbre de Lie $D(P)$ est réductive, d'où la proposition suivante.

PROPOSITION 10. - <u>L'algèbre de Lie réelle</u> $D(P)$ <u>a son centre unidimensionnel, elle est égale à la somme directe de son centre et de l'algèbre de Lie simple</u> $[D(P) , D(P)]$,

$$D(P) = Z(P) + [D(P) , D(P)] .$$

On voit ainsi que l'hypothèse d'orientabilité du cône P revient à supposer que l'algèbre de Lie $\mathbb{S} = [D(P) , D(P)]$ est l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à une algèbre de Lie complexe.

Notons, respectivement, par $\underset{\sim}{E}^C$ et $\underset{\sim}{\mathbb{S}}^C$ les espaces complexifiés de $E = \underset{\sim}{R}^n$ et de $\mathbb{S}$, alors $\underset{\sim}{E}^C = \underset{\sim}{C}^n$ et $\underset{\sim}{\mathbb{S}}^C$ est une algèbre de Lie complexe $\underset{\sim}{\mathbb{S}}^C = \mathbb{S} + i\mathbb{S}$. L'opérateur I , défini sur $\mathbb{S}$, se prolonge canoniquement à $\underset{\sim}{\mathbb{S}}^C$ en un opérateur, noté aussi I , de carré égal à moins l'identité.

Nous noterons par $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$ respectivement les espaces propres de $\underset{\sim}{\mathbb{S}}^C$ correspondants aux valeurs propres i et $-i$. On a ainsi deux sous-algèbres de Lie complexes de $\underset{\sim}{\mathbb{S}}^C$ et

$$\mathbb{S}_1 = \{\delta - iI(\delta) \ ; \ \delta \in \mathbb{S}\} \ , \quad \mathbb{S}_2 = \{\delta + iI(\delta) \ ; \ \delta \in \mathbb{S}\} .$$

Une vérification immédiate montre que $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$ sont isomorphes à $\mathbb{S}$ en tant qu'algèbres de Lie complexes.

Soient A_1 et A_2 les sous-anneaux de $\mathrm{End}(\underset{\sim}{E}^C)$ engendrés respectivement par $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$. A_i est un <u>anneau semi-simple</u>, car $\underset{\sim}{E}^C$ est une représentation semi-simple et fidèle de $\mathbb{S}_1$ donc de A_1 car (les sous-$\mathbb{S}_1$-modules au sous-A_1-module étant les mêmes), $A_1 = (A_2)'$ et $A_2 = (A_1)'$, donc $(A_1 \cup A_2)' \equiv \underset{\sim}{C}$.

Il résulte, par exemple de JACOBSON ([3], p. 15) qu'il existe deux représentations simples et fidèles E_1 et E_2 de A_1 et A_2 respectivement tels que $\underset{\sim}{E}^C = E_1 \otimes E_2$. Par restriction, E_1 et E_2 sont deux représentations complexes simples et fidèles de $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$.

PROPOSITION 11. - Pour tout cône $P \subset \underset{\sim}{R}^n$, autopolaire facialement homogène et orientable, et pour toute face $F \subset P$, il existe un automorphisme linéaire de P valant l'identité sur $(F + F^{\perp})$, et moins l'identité sur $(F + F^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration. - Notons par u_F la projection de la dérivation $P_F - P_{F^{\perp}}$ sur la sous-algèbre de Lie $\mathbb{S}$. Il est aisé de voir que la projection de toute dérivation δ sur le centre $Z(P)$ est égale à trace $(\delta)\mathrm{id}_E$. Posons $a = \frac{1}{n}\,\mathrm{trace}(P_F - P_{F^{\perp}})$. Alors $u_F = P_F - P_{F^{\perp}} - a\,\mathrm{id}_E$.

Soit $u_F = v_1 + v_2$ la décomposition de u_F sur $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$, $v_1 \in \mathbb{S}_1$, $v_2 \in \mathbb{S}_2$. Compte tenu des remarques précédant la proposition 11, on a

$$\text{Spectre } u_F = \text{Spectre } v_1 + \text{Spectre } v_2 \ ,$$

ici les spectres de v_1 et v_2 sont leurs spectres en tant qu'endomorphismes de E_1 et E_2 respectivement, d'où

$$\text{Spectre } v_1 + \text{Spectre } v_2 = \{- a - 1 \ , \ - a \ , \ - a + 1\}$$

Les endomorphismes v_1 et v_2 sont à trace nulle (car $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$ sont des algèbres de Lie semi-simples) donc aucun de leurs spectres ne peut être réduit à un point.

Une simple vérification montre qu'il existe alors deux réels α_1 et α_2 vérifiant

$$\alpha_1 + \alpha_2 = a \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} \text{Spectre } v_1 = \{\alpha_1 \ , \ \alpha_1 - 1\} \\ \text{Spectre } v_2 = \{\alpha_2 \ , \ \alpha_2 + 1\} \end{cases} .$$

L'opérateur I_u s'écrit $I_u = iv_1 - iv_2$; comme E_1 et E_2 sont deux représentations complexes de $\mathbb{S}_1$ et $\mathbb{S}_2$, les spectres de iv_1 et iv_2 sont respectivement $\{i\alpha_1 \ , \ i(\alpha_1 - 1)\}$ et $\{i\alpha_2 \ , \ i(\alpha_2 + 1)\}$, d'où

$$\text{Spectre } I_u = \{i(\alpha_1 - \alpha_2) \ , \ i(\alpha_1 - \alpha_2) - i \ , \ i(\alpha_1 - \alpha_2) - 2i\} \quad \text{(différences deux à deux).}$$

L'opérateur $\exp \pi I_u$ est alors un automorphisme du cône P dont le spectre est $\{\exp(i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)) \ , \ - \exp(i\pi(\alpha_1 - \alpha_2))\}$, il est symétrique, donc $\alpha_1 - \alpha_2$ est un entier. Il en résulte que l'opérateur $T_F = \exp(- i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)) \exp \pi I_u$ est un automorphisme du cône P , et que son spectre est $\{- 1 \ , \ 1\}$, des considérations élémentaires de géométrie montrent alors que T_F ne peut que valoir l'identité sur $(F + F^{\perp})$, et moins l'identité sur $(F + F^{\perp})^{\perp}$.

Remarque 12. - On déduit du fait Spectre $v_1 = (\alpha_1 \ , \ \alpha_1 - 1)$ que l'endomorphisme $w_1 = \alpha_1\, \mathrm{id}_E - v_1$ est un projecteur. Il est aisé de vérifier qu'il vaut zéro sur F , et l'identité sur $F^{\perp}$: Notons par e_{11} et e_{12} les espaces propres de v_1 correspondants aux valeurs propres α_1 et $\alpha_1 - 1$, et par e_{21} et e_{22} les espaces propres de v_2 correspondants aux valeurs propres α_2 et $\alpha_2 + 1$, alors

$$F = e_{11} \otimes e_{22} \quad \text{et} \quad F^{\perp} = e_{12} \otimes e_{21} \ ,$$

donc v_1 vaut $\alpha_1\, \mathrm{id}_E$ sur F , et $(\alpha_1 - 1)\mathrm{id}_E$ sur $F^{\perp}$. C'est à ce stade qu'intervient (à notre avis) toute la force du lemme 5.7 de [2] de CONNES ; en effet, il devient évident (partie (d) du lemme cité) que tout endomorphisme de $E^{\mathbb{C}}$ qui commute avec les éléments de $\mathfrak{S}_1$ a sa partie réelle dans $D(P)$. D'où on conclut que $\mathfrak{S}_1 \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{E^{\mathbb{C}}}$ et $\mathfrak{S}_2 \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{E^{\mathbb{C}}}$ sont deux sous-anneaux de l'anneau des endomorphismes de $E^{\mathbb{C}}$ commutant entre eux, et que $\mathfrak{S}_1 \equiv \mathfrak{S}_2 \equiv \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{sl}(\sqrt{n}\ , \mathbb{C})$.

Nous avons ainsi montré que $D(P) = \mathbb{R}\,\mathrm{id}_E \oplus \mathfrak{sl}(\sqrt{n}\ , \mathbb{C})$.

Pour conclure que $P \equiv (\mathfrak{gl}(\sqrt{n}\ , \mathbb{C}))^+$, nous utilisons la classification de Cartan, parce que nous avons montré que le groupe est transitif sur $\mathring{P}$.

N.-B. - Depuis cet exposé, MM. BELISSARD, IOCHUM et LIMA, du Centre de Physique théorique de Marseille, ont démontré que tout cône autopolaire et facialement homogène en dimension finie est homogène [Novembre 1975].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chap. 8 : modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[2] CONNES (A.). - Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 24, 1974, fasc. 4, p. 121-155.

[3] JACOBSON (N.). - Lectures in abstract algebra. Vol. 3. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1964 (University Series in higher Mathematics).

[4] KOECHER (M.). - Positivätsbereichen im $\mathbb{R}^n$, Amer. J. of Math., t. 79, 1965, p. 575-596.

[5] KOECHER (M.). - Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, Math. Annalen, t. 135, 1968, p. 192-202.

[6] ROTHAUS (A. S.). - Domains of positivity, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, t. 24, 1960, p. 189-235.

[7] VINBERG (E. B.). - The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow math. Soc., t. 12, 1963, p. 340-403 ; [en russe] Trudy Moskovskogo mat. Obšč., t. 12, 1963, p. 303-358.

(Texte reçu le 17 juillet 1975)

Marouan AJLANI
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université P. et M. Curie [Paris-VI]
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05