Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint Raymond

Espaces à modèle séparable

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 19, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A13_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
14e année, 1974/75, n° 19, 5 p.

17 avril 1975

ESPACES À MODÈLE SÉPARABLE

par Jean SAINT RAYMOND

Introduction. - Soit V un espace localement convexe métrisable séparable. Il existe sur V au plus une topologie d'espace de Fréchet qui soit plus fine que la topologie initiale de V. Si elle existe, cette topologie sera appelée modèle de V. Dans toute la suite, on notera E l'espace de Fréchet modèle de V, et u la bijection linéaire continue canonique de E sur V.

PROPOSITION 1. - Pour que l'espace V possède un modèle, il est nécessaire et suffisant que V soit l'image linéaire continue d'un espace de Fréchet W. Le modèle de V est alors isomorphe au quotient de W par le noyau de l'application linéaire donnée.

PROPOSITION 2. - Si V possède le modèle E, et si f est une application linéaire continue d'un espace de Fréchet W dans V, l'application $u^{-1} \circ f$ est continue de W dans E.

COROLLAIRE 3. - Si A est une partie bornée de l'espace V de modèle E, $u^{-1}(A)$ est borné dans E si, et seulement si, l'enveloppe dénombrablement convexe de A dans le complété $\hat{V}$ de V est en fait contenue dans V.

THÉORÈME 4. - *Pour que* V *possède un modèle qui soit un espace de Banach, il faut et il suffit que* V *soit engendré par une partie bornée et dénombrablement convexe.*

On s'intéresse maintenant aux espaces localement convexes métrisables qui possèdent un modèle séparable. Ceux-ci sont alors bien entendu eux-mêmes séparables.

THÉORÈME 5. - *Si* V *possède un modèle séparable* E, *l'application* u^{-1} *est borélienne de* V *dans* E, *et* V *est une partie borélienne de son complété* $\hat{V}$.

PROPOSITION 6. - Si V possède le modèle séparable E, et si f est une application linéaire de V dans un espace de Fréchet W, une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ u$ soit continue de E dans W est que f soit borélienne.

THÉORÈME 7. - *Pour que* V *possède un modèle séparable, il faut et il suffit que la topologie de Mackey sur* V, *associée à l'espace des formes linéaires boréliennes sur* V, *soit une topologie d'espace polonais. Dans ce cas, le modèle est cette topologie de Mackey.*

THÉORÈME 8. - Si V possède le modèle séparable E, et si (x_n) est une suite sommable dans V, ainsi que chacune de ses sous-suites, la suite $u^{-1}(x_n)$ est sommable dans E.

On désignera dans la suite, quand X et Y sont des espaces métriques séparables, par $\mathfrak{M}_\alpha(X)$ (resp. $\mathfrak{A}_\alpha(X)$) l'ensemble des parties boréliennes de X de classe α-multiplicative (resp. α-additive) et par $\mathfrak{B}_\alpha(X, Y)$ l'ensemble des fonctions boréliennes de X dans Y de classe α, c'est-à-dire pour lesquelles l'image réciproque de tout fermé de Y appartient à $\mathfrak{M}_\alpha(X)$.

On sait que, pour tout ordinal α dénombrable ≥ 1, toute fonction de $\mathfrak{B}_{\alpha+1}(X,Y)$ est limite simple d'une suite de fonctions boréliennes de X dans Y de classe α, qu'on peut même prendre de classes strictement inférieures à α quand α est un ordinal de deuxième espèce. De plus, quand α est un ordinal de deuxième espèce, et pour $Y = [0, 1]$, on a le lemme suivant.

LEMME 9. - Si α est un ordinal limite, et f une fonction de X dans $[0,1]$, pour que f soit de classe α, il faut et il suffit qu'il existe deux suites monotones (f'_n) et (f''_n) de fonctions de X dans $[0, 1]$, de classes strictement inférieures à α, qui convergent vers f respectivement en croissant et en décroissant.

Définition 11. - Soit V un espace localement convexe métrisable. On définit par récurrence transfinie la classe linéaire α des formes linéaires boréliennes sur V en posant :

La classe 0 se compose des formes linéaires continues.

La classe $\alpha + 1$ se compose des limites simples de suites de formes linéaires de classe α.

Si α est un ordinal limite, la classe α est réunion des classes inférieures.

Il résulte de cette définition que toute forme de classe linéaire α est de classe de Baire au plus α.

THÉORÈME 12. - Soit X un espace métrique séparable. Pour qu'une partie Z de X soit de classe $(\alpha + 2)$-multiplicative, il faut et il suffit qu'existe une suite (f_n) de fonctions de X dans $[0, 1]$ de classe de Baire α (qu'on peut choisir de classes $< \alpha$ si α est de deuxième espèce) dont Z est l'ensemble des points de convergence.

Définition 13. - Si V possède le modèle séparable E, on appelle degré de V la classe de Baire de la fonction borélienne u^{-1} de V dans E.

THÉORÈME 14. - Si V possède un modèle séparable, et s'il est de degré α, V est une partie de classe $(\alpha + 1)$-multiplicative de son complété $\hat{V}$.

THÉORÈME 15. - Pour tout ordinal dénombrable de première espèce α, il existe un espace topologique dénombrable et localement compact K_α, un point a_α dans K_α, et un sous-espace V_α de l'espace de Banach c_0 des suites numériques convergeant vers 0 possédant un modèle isomorphe à l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(K_\alpha)$ des fonctions numériques continues sur K_α nulles à l'infini tels que

V_α est de degré α.

Pour tout compact métrisable T et toute fonction h borélienne de classe α de T dans $[0\ ,\ 1]$, il existe une application continue φ de T dans c_0 avec

$$\forall\ t \in T\ ,\quad h(t) = \varepsilon_{a_\alpha} \circ u_\alpha^{-1}[\varphi(t)]\ .$$

Pour tout compact métrisable T et toute partie X de classe $(\alpha + 1)$-multiplicative de T, il existe un homéomorphisme de X sur un fermé de V_α.

Si V est un espace qui possède le modèle séparable E, ce que l'on supposera toujours dans la suite, et si (A_n) est un système fondamental de voisinages convexes fermés équilibrés de 0 dans V, et (B_n) un système fondamental de voisinages convexes fermés équilibrés de 0 dans E, tel que, pour tout n, $u^{-1}(A_n)$ contienne B_n, on définit par récurrence transfinie sur α des compacts faibles $(K_{n,\alpha})$ de E' pour les ordinaux α de première espèce et des sous-espaces vectoriels L_α de E' en posant

$$\begin{cases} K_{n,0} & = {}^t u(A_n^0) \\ L_0 & = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{n,0}} = {}^t u(V') \\ K_{n,\alpha+1} & = \overline{B_n^0 \cap L_\alpha} \quad \text{(adhérence pour la topologie faible)} \\ L_{\alpha+1} & = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{n,\alpha} \\ L_\alpha & = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ est de deuxième espèce.} \end{cases}$$

THÉORÈME 16. - Pour qu'une forme linéaire borélienne g sur V soit de classe linéaire α, il faut et il suffit que $g \circ u$ appartienne à L_α.

THÉORÈME 17. - Il existe un ordinal dénombrable λ tel que L_λ soit égal à E'. Toute forme linéaire borélienne possède donc une classe linéaire, et celle-ci est bornée par λ.

THÉORÈME 18. - Si V possède le modèle séparable E, il existe, pour tout ordinal dénombrable α, un espace de Fréchet séparable N_α et une injection linéaire continue r_α de E dans N_α d'image dense, et, pour tout couple $(\alpha\ ,\ \beta)$ d'ordinaux dénombrables tels que $\alpha \leqslant \beta$, une injection linéaire continue $v_{\alpha,\beta}$ de N_β dans N_α tels que :

$$\begin{cases} N_0 = \hat{V}\ ;\quad r_0 = u\ , \\ v_{\alpha,\beta} \circ v_{\beta,\gamma} = v_{\alpha,\gamma}\ ,\ \text{si}\ \ \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma\ , \\ v_{\alpha,\beta} \circ r_\beta = r_\alpha\ ,\ \text{si}\ \ \alpha \leqslant \beta\ , \\ {}^t r_\alpha(N'_\alpha) = L_\alpha\ . \end{cases}$$

THÉORÈME 19. - Pour l'ordinal λ tel que $L_\lambda = E'$, l'espace N_λ est isomorphe à E, ainsi que tous les espaces N_α pour $\alpha \geqslant \lambda$.

PROPOSITION 20. - Le sous-espace $r_\alpha(E)$ de l'espace de Fréchet N_α est muni de la topologie de Mackey $\tau(E, L_\alpha)$, et N_α est son complété.

Définition 21. - Si V possède le modèle séparable E, on appelle modèle d'ordre α de V l'espace de Fréchet N_α ainsi construit.

PROPOSITION 22. - Pour tout ordinal dénombrable α, l'application $v_{0,\alpha}$ de N_α dans $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ est de degré au plus α.

THÉORÈME 23. - Si le modèle E de V est un Banach, pour tout ordinal dénombrable α, le modèle d'ordre $\alpha + 1$ de V est un Banach. Si α est un ordinal limite et si le modèle d'ordre α de V est un Banach, il existe un ordinal β strictement inférieur à α tel que E et N_α soient isomorphes à N_β.

THÉORÈME 24. - Si g est une fonction borélienne de classe de Baire α de V dans $\underset{\sim}{R}$, il existe un G_δ dense, H, de E tel que la restriction au sous-espace $r_\alpha(H)$ de N_α de la fonction $g \circ v_{0,\alpha}$ soit continue.

THÉORÈME 25. - Si f est une forme linéaire borélienne sur V, de classe de Baire α, f est aussi de classe linéaire α. En particulier, si α est un ordinal limite, f n'est pas strictement de classe de Baire α.

THÉORÈME 26. - Si φ est une application linéaire borélienne de V dans un espace de Fréchet W, φ est de classe de Baire α si, et seulement si, elle se prolonge en une application linéaire borélienne de $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ dans W.

PROPOSITION 27. - Pour tout ordinal dénombrable α, le sous-espace $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ de $\hat{V}$ est de degré exactement α, à moins que E ne soit isomorphe à un N_β pour $\beta < \alpha$.

COROLLAIRE 28. - Le degré de V est égal à la borne supérieure des classes de Baire des formes linéaires boréliennes sur V, et au plus petit ordinal λ tel que r_λ soit un isomorphisme de E sur N_λ.

THÉORÈME 29. - Si h est une fonction borélienne de classe α de $\hat{V}$ dans $\underset{\sim}{R}$, il existe un G_δ dense, R, de E et un G_δ dense, S, de N_α, contenant $r_\alpha(R)$ tels que la restriction à S de $h \circ v_{0,\alpha}$ soit continue.

THÉORÈME 30. - Si Z est une partie de $\hat{V}$, de classe $(\alpha + 1)$-multiplicative, qui contient V, $v_{0,\alpha}^{-1}(Z)$ est un résiduel de N_α.

COROLLAIRE 31. - Le sous-espace $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ de $\hat{V}$ est le plus petit sous-espace vectoriel borélien, de classe $(\alpha + 1)$-multiplicative de $\hat{V}$, qui contienne V. De plus, si α est un ordinal limite, $v_{0,\alpha}(N_\alpha)$ est en fait de classe α-multiplicative.

THÉORÈME 32. - Pour que V soit de degré α, il est nécessaire et suffisant qu'il soit de classe $(\alpha + 1)$-multiplicative dans $\hat{V}$. Si α est un ordinal limite, V est en fait de classe α-multiplicative.

THÉORÈME 33. - Si H est un hyperplan borélien de V, toute forme linéaire de classe α sur H se prolonge en une forme linéaire de classe α sur V. Si N_α et P_α sont les modèles d'ordre α de V et de H respectivement, P_α est isomorphe à un sous-espace fermé de N_α, de codimension 1 si H est le noyau d'une forme linéaire de classe α sur V, et 0 sinon. Les degrés de V et de H sont égaux.

THÉORÈME 34. - Si φ est une application linéaire de rang fini sur V, φ est borélienne de classe de Baire α si, et seulement si, le noyau de φ est de classe α-multiplicative dans V.

(Texte reçu le 22 mai 1975)

Jean SAINT RAYMOND
Mathématiques, Tour 46
Université de Paris-6
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05