Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Talagrand

Les boules peuvent-elles engendrer la tribu borélienne d'un espace métrisable non séparable ?

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C5, p. C1-C2

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A10_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 5, 2 p.

LES BOULES PEUVENT-ELLES ENGENDRER LA TRIBU BORÉLIENNE D'UN ESPACE MÉTRISABLE NON SÉPARABLE ?

par Michel TALAGRAND

Dans un espace métrique séparable, les boules engendrent la tribu borélienne. Mais est-il possible que dans le cas non séparable, il en soit encore de même ? (Cette question est posée par M. DUDLEY [1], et a été portée à mon attention par D. POLLARD.) Le résultat simple suivant précise les choses.

PROPOSITION. - Soit M un espace métrique. Alors, M est séparable si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, la tribu borélienne est engendrée par l'ensemble des boules de rayon $\leqslant \varepsilon$.

Preuve. - Il est clair que la condition est suffisante. Réciproquement, si M n'est pas séparable, il existe $\varepsilon > 0$ et uhe partie non dénombrable A de M dont deux points quelconques sont une distance $\geqslant \varepsilon$. Toute boule de rayon $< \varepsilon/2$ rencontre A, en au plus un point, et la trace sur A de la tribu engendrée par ces boules est donc constituée d'ensembles soit dénombrables, soit de complémentaire dénombrable, et ne contient donc pas tout sous-ensemble de A. Mais puisque A est fermé discret, tout sous-ensemble de A est fermé, donc borélien.

C. Q. F. D.

Ceci montre que, si les boules engendrent la tribu borélienne, ce sont les boules de grand rayon qui jouent le rôle fondamental. Nous allons maintenant construire un espace métrique discret non séparable dans lequel la tribu borélienne est engendrée par les boules.

Posons $A_1 = \underset{\sim}{N}$, puis définissons les ensembles A_n par induction à l'aide de la formule $A_{n+1} = \mathfrak{P}(A_n)$. Posons $A = \bigcup_n A_n$, puis $M = A \cup \{\omega\}$ où $\omega \notin A$. On définit la distance d sur M de la façon suivante :

pour $a \in A_n$, $d(\omega, a) = (1/2) + (1/(n+1))$,

pour $a, b \in A$, on pose $d(a, b) = 1/2$ s'il existe n tel que $a \in A_n$, $b \in A_{n+1}$ et $a \in b$, ou s'il existe n tel que $b \in A_n$, $a \in A_{n+1}$ et $b \in a$, et $d(a, b) = 1$ dans le cas contraire, sauf si $a = b$, auquel cas on pose $d(a, b) = 0$.

Il est clair que d est une distance (L'inégalité triangulaire étant trivialement vérifiée).

Prouvons que toute partie $I \subset A$ est dans la tribu engendrée par les boules, ce qui suffit. Pour chaque n, on a $I \cap A_n = A_{r+1}$. En désignant par $B(a, t)$ la boule fermée de centre a et de rayon t, on a

$$A_r \cap I = B(A_n \cap I, \tfrac{1}{2}) \cap A_n$$

A

$$A_n = B(\omega\ , \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) \setminus B(\omega\ , \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}) \ .$$

On a donc

$$I = \bigcup_n [B(\omega\ , \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) \setminus B(\omega\ , \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2})] \cap B(A_n \cap I\ , \frac{1}{2})\ ,$$

ce qui prouve notre assertion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUDLEY (Richard M.). - Central limit theorems for empirical measures (à paraître).

(Texte reçu le 30 mai 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse
Matématiques, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
75230 PARIS CEDEX 05