Michel Talagrand

Une classe d'espaces de Banach qui admettent des quotients séparables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C2, p. C1
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 2, 1 p.
Novembre 1977

UNE CLASSE D'ESPACES DE BANACH QUI ADMETTENT DES QUOTIENTS SÉPARABLES

par Michel TALAGRAND

La question de savoir, si tout espace de Banach de dimension infinie possède un quotient séparable de dimension infinie, est un vieux problème de la théorie des espaces de Banach. Nous allons prouver qu'il en est bien ainsi pour les espaces de Banach E qui sont faiblement $\mathcal{K}$-analytiques [2] (donc, en particulier, pour les sous-espaces des espaces WCG). L'auteur remercie H. FAKHOURY qui lui a suggeré d'examiner ce problème.

THÉORÈME. - <u>Tout espace de Banach</u> E , <u>qui est de dimension infinie et faiblement $\mathcal{K}$-analytique, possède un quotient séparable de dimension infinie</u>.

<u>Preuve</u>. - Puisque E est de dimension infinie, il en est de même de E' . Soit F un sous-espace séparable de dimension infinie de E' . Posons $H = E/F^0$. Le dual de H' s'identifie à l'adhérence de F , pour $\sigma(E' , E)$. Ainsi, H' est de dimension infinie, et il en est, donc, de même de H . D'autre part, F étant $\sigma(H' , H)$-dense dans H' , il en résulte que H' est $\sigma(H' , H)$-séparable. Il résulte, alors, du théorème 11 de [2] que H est séparable, puisqu'il est faiblement $\mathcal{K}$-analytique, H étant un quotient de E . (Puisqu'il existe une famille dénombrable de formes linéaires continues qui séparent H , on peut aussi utiliser le théorème 11 de [1], qui montre que H est, pour sa topologie faible, image continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et, ainsi, est faiblement, donc fortement, séparable).

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. - Le théorème est aussi valide, avec la même démonstration, pour la classe (peut-être plus générale) envisagée dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] TALAGRAND (M.). - Sur la structure borélienne des espaces analytiques, Bull. Sc. math., 2e Série, t. 101, 1977, p. 415-422.

[2] TALAGRAND (M.). - Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 745-748.

[3] TALAGRAND (M.). - Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques (à paraitre).

[4] VAŠAK (L.). - On a generalisation of weakly compactly generated Banach spaces, Studia Math., Warszawa (à paraitre).

(Texte reçu le 4 novembre 1977)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75231 PARIS CEDEX 05