Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Françoise Bertrandias

# Fractions continues

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 3 (1961-1962), exp. nº 2, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
3e année, 1961/62, n° 2



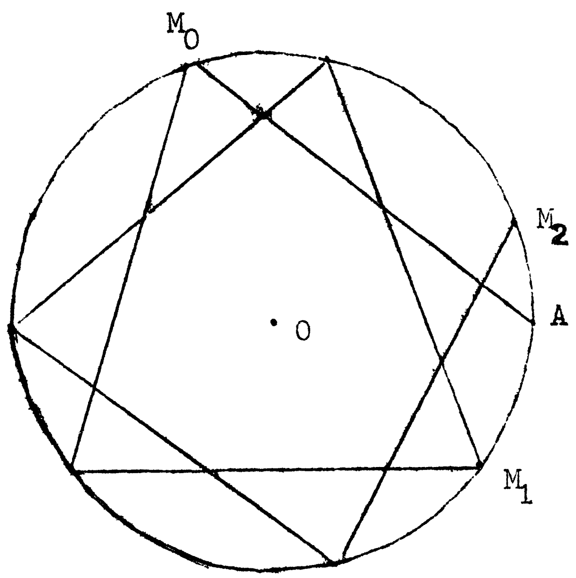
11 décembre 1961

# FRACTIONS CONTINUES

par Mme Françoise BERTRANDIAS

## 1. Recherche des "meilleures approximations" d'un nombre $\theta$ ( $\theta$ réel positif).

1.1. Définition d'une suite de points $M_n$ attachée à un nombre $\theta$. - Sur le cercle de centre $O$ et de longueur $1$, on porte dans le sens positif, à partir de l'origine $A$ des abscisses, les arcs de longueur $\theta$, $2\theta$, $3\theta$, ... Parmi les sommets de la ligne polygonale (L) obtenue, on choisit les points $M_0$, $M_1$, $M_2$, ... de la manière suivante :




- $M_0$ est l'extrémité de l'arc de longueur $\theta$ ;

- $M_1$ est le premier sommet de la ligne polygonale rencontré, qui soit plus proche de $A$ que $M_0$ ;

- $M_2$ est le sommet suivant qui soit plus proche de $A$ que $M_1$, etc.

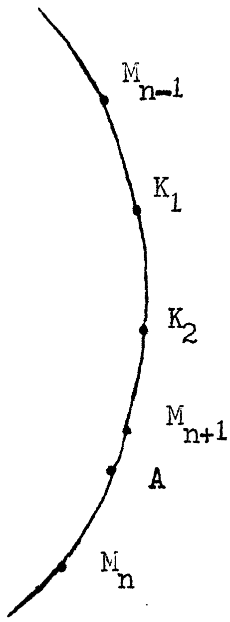
On définit ainsi de proche en proche une suite de points $M_n$ attachés au nombre $\theta$. Elle est finie ou infinie suivant que $\theta$ est rationnel ou non.

1.2. Propriétés de la suite $(M_n)$. - Considérons la partie $(L_{M_n})$ de la ligne polygonale (L) s'arrêtant au point $M_n$. Poursuivre la construction de (L), à partir de $M_n$, revient à faire subir à $(L_{M_n})$ les rotations successives définies par l'arc $\overset{\frown}{AM_n}$.

Première conséquence. - Les points $M_n$ et $M_{n+1}$ sont de part et d'autre de $OA$. En effet le point $H$ défini par $\overset{\frown}{HM}_{n+1} = \overset{\frown}{AM}_n$ appartient à la ligne polygonale $(L_{M_{n+1}})$. Si $M_n$ et $M_{n+1}$ étaient du même côté de $OA$, le point $H$

serait plus proche de $A$ que le point $M_n$, ce qui est incompatible avec la définition du point $M_{n+1}$.

Deuxième conséquence. - Le point $M_{n+1}$ est un des points $K_i$ transformés de $M_{n-1}$ dans ces rotations (c'est-à-dire $K_i$ défini par : $\overrightarrow{M_{n-1} K_i} = i \ \overrightarrow{AM_n}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) ).




En effet l'arc $\widehat{M_n M_{n-1}}$ ne contenant aucun sommet de $(L_{M_n})$, le sommet qui devient le plus proche de $A$, après ces rotations, est $M_{n-1}$.

Le point $M_{n+1}$ est donc le dernier des $K_i$ appartenant à l'arc $\widehat{M_{n-1} A}$ (sur la figure $M_{n+1} = K_3$ ).

D'où une construction simple de $M_{n+1}$ à partir de $M_{n-1}$ et $M_n$.

1.3. Définition d'une suite $\frac{p_n}{q_n}$ de rationnels attachée au nombre $\theta$. - Soient $q_n$ le nombre de côtés de la ligne polygonale $L_{M_n}$, et $p_n$ l'entier le plus proche du nombre $q_n \theta$ (les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ sont finies ou infinies suivant que $\theta$ est rationnel ou non).

THÉORÈME 1. - Pour tout entier $q$ tel que $0 < q < q_n$

$$\|q\theta\| > \|q_n \theta\| = |q_n \theta - p_n| \quad .$$

THÉORÈME 2. - Soit $q'$ un entier tel que $q_n < q' < q_{n+1}$, on a :

$$\|q_n \theta\| < \|q'\theta\|$$

(on pose $\|q\theta\| = \min_p |q\theta - p|$, $p$ désignant un entier positif).

Ces théorèmes résultent immédiatement de la construction de la ligne polygonale (L). Ils montrent que la propriété contenue dans le théorème 1 caractérise la **suite** $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$. On exprime **ceci** en disant que les nombres $\frac{p_n}{q_n}$ sont les "meilleures approximations" du nombre $\theta$.

1.4. <u>Propriétés des suites</u> $(p_n)$ <u>et</u> $(q_n)$. - On pose

$$\delta_n(\theta) = q_n \theta - p_n \qquad .$$

$\delta_n(\theta)$ désigne donc la mesure de l'arc $\overrightarrow{AM_n}$ comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (on supposera $2\theta$ non entier).

On a les relations :

(1) $$\delta_n(\theta)\ \delta_{n-1}(\theta) < 0$$

(1') $$(p_n\, q_{n-1} - q_n\, p_{n-1})\ \delta_{n-1}(\theta) > 0 \qquad .$$

((1) exprime que $M_n$ et $M_{n-1}$ sont de part et d'autre de $OA$, (1') résulte de (1).)

(2) Il existe une suite d'entiers positifs $a_n$ tels que

$$q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (n \geqslant 2)$$

(résulte de la deuxième propriété de la suite $(M_n)$ démontrée au paragraphe 1.2).

(3) $$\delta_n(\theta) = a_n\ \delta_{n-1}(\theta) + \delta_{n-2}(\theta) \qquad .$$

(D'après (2),

$$\overrightarrow{AM_n} = a_n\ \overrightarrow{AM_{n-1}} + \overrightarrow{AM_{n-2}} \qquad ,$$

et d'autre part

$$|a_n\ \delta_{n-1}(\theta)| < |\delta_{n-2}(\theta)| < \frac{1}{2} \qquad ,$$

d'après le paragraphe 1.2, donc compte tenu de (1)

$$|a_n \, \delta_{n-1}(\theta) + \delta_{n-2}(\theta)| < \frac{1}{2} \qquad .)$$

(3') $$\|q_{n-2}\,\theta\| = a_n \|q_{n-1}\,\theta\| + \|q_n\,\theta\| \qquad \text{(d'après (1) et (3))} \quad .$$

(4) $$p_n = a_n \, p_{n-1} + p_{n-2} \qquad \text{(d'après (2) et (3))} \quad .$$

(5) $$|p_n \, q_{n-1} - q_n \, p_{n-1}| = 1 \quad .$$

(On démontre facilement que $|p_0 \, q_1 - q_1 \, p_0| = 1$, d'où (5) par récurrence à l'aide de (2) et (4).)

(6) $$q_{n-1}\|q_n\,\theta\| + q_n\|q_{n-1}\,\theta\| = 1 \qquad \text{(d'après (1) et (5))} \quad .$$

(7) $$|\theta - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2} \qquad \text{(d'après (6))} \quad .$$

2. Algorithme des fractions continues.

Il s'agit de trouver un procédé de calcul des nombres $p_n$ et $q_n$. On pose

(8) $$\theta_n = \frac{\|q_{n-2}\,\theta\|}{\|q_{n-1}\,\theta\|} \quad ;$$

donc, d'après (3') :

(9) $$\begin{cases} a_n = [\theta_n] \\ \theta_n = a_n + \dfrac{1}{\theta_{n+1}} \qquad (n \geqslant 2) \end{cases} \quad .$$

On pourra donc déterminer de proche en proche les $a_n$ et les $\theta_n$ par les formules

(9), à partir de $a_2$ et $\theta_2$ .

Il reste à calculer $\theta_2$ a partir de $\theta$ , avec

$$\theta_2 = \frac{|q_0\,\theta - p_0|}{|q_1\,\theta - p_1|} \quad .$$

Deux cas sont à distinguer :

2.1. Premier cas. - $n < \theta < n + \frac{1}{2}$ .

On voit facilement que :

$$p_0 = [\theta] \qquad p_1 = q_1[\theta] + 1 \quad .$$

En posant $p_{-1} = 1$ , $q_{-1} = 0$ , $a_1 = q_1$ , on constate que les formules (9) s'étendent à la valeur $n = 1$ , avec

$$\theta_1 = \frac{|q_{-1}\,\theta - p_{-1}|}{|q_0\,\theta - p_0|} = \frac{1}{\theta - p_0}$$

c'est-à-dire

$$\theta = p_0 + \frac{1}{\theta_1} \quad .$$

Les formules (9) sont donc valables pour $n = 0$ , en posant $\theta_0 = \theta$ et $a_0 = p_0 = [\theta]$ .

2.2. Deuxième cas. - $n + \frac{1}{2} < \theta < n + 1$ .

On a :

$$p_0 = [\theta] + 1 \qquad p_1 = q_1[\theta] + q_1 - 1 \quad ;$$

par des calculs analogues, on démontre qu'on peut étendre les formules (9) aux cas $n = 1$ , $n = 0$ et $n = -1$ en posant :

$$p_{-1} = [\theta]\ ,\quad q_{-1} = 1\ ,\quad p_{-2} = 1\ ,\quad q_{-2} = 0 \qquad ,$$

avec

$$\theta_1 = \frac{(\theta)}{1-(\theta)}\ ,\quad \theta_0 = \frac{1}{(\theta)}\ ,\quad \theta_{-1} = \theta \qquad .$$

Pour avoir les mêmes formules au départ que dans le premier cas, il suffit donc de faire le changement d'indice $n \to n+1$ .

Quel que soit $\theta$ , les suites $(a_n)$ et $(\theta_n)$ se construisent donc par l'algorithme :

$$\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1} \qquad (a_0 = [\theta])$$

$$\theta_1 = a_1 + \frac{1}{\theta_2} \qquad (a_1 = [\theta_1])$$

$\dots$

$$\theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}} \qquad (a_n = [\theta_n])$$

$\dots$

Les suites $p_n$ et $q_n$ sont obtenues par :

$$q_{-1} = 0 \qquad q_0 = 1$$

$$p_{-1} = 1 \qquad p_0 = [\theta] = a_0$$

et par les relations de récurrence (2) et (4) (pour $n \geqslant 1$ )

$$\begin{cases} (2) \qquad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} \\ (4) \qquad p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} \end{cases} \qquad .$$

Ceci entraîne, pour tout $\theta$ ,

(5') $$p_n\, q_{n-1} - q_n\, p_{n-1} = (-1)^{n-1} \qquad .$$

Ce procédé associe à tout nombre $\theta$ **réel** $> 0$ une suite d'entiers positifs $(a_n)$ ; on note $\theta = [a_0 , a_1 , \dots , a_n , \dots]$ et on appelle cette suite "le développement de $\theta$ en fraction continue". Les entiers $a_n$ sont les "quotients incomplets" du développement, et les nombres rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ sont les "réduites".

2.3. Cas où $\theta$ est rationnel. - La suite $(a_n)$ est finie. Réciproquement, toute suite finie d'entiers rationnels positifs constitue, d'après l'algorithme, le développement d'un nombre rationnel.

2.4. Comparaison de deux rationnels $\theta$ et $\theta'$ ayant les $(m + 1)$ premiers termes communs $a_0 , a_1 , \dots , a_m$ dans leur développement.

Les $q_n$ sont égaux jusqu'à l'indice $m$. Donc d'après (7) :

$$|\theta - \theta'| < \frac{2}{q_m^2} \quad ;$$

or $q_m > 2^{(m-1)/2}$ (se démontre sur la relation de récurrence (2)). Donc

$$|\theta - \theta'| < 2^{2-m} \quad . \tag{10}$$

Conséquence. - Toute suite infinie d'entiers positifs $(a_0 , a_1 , \dots , a_n, \dots)$ est le développement en fraction continue d'un nombre $\theta$ irrationnel.

En effet, d'après la remarque précédente, les rationnels $r_m$ de développement $[a_0 , a_1 , \dots , a_m]$ forment une suite de Cauchy.

2.5. Quelques relations remarquables entre $\theta$ et les suites $(a_n)$ , $(\theta_n)$ , $(p_n)$ et $(q_n)$ .

$$\theta = \frac{\theta_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{\theta_{n+1}\, q_n + q_{n-1}} \tag{11}$$

(se démontre par récurrence à l'aide de (2), (4), (9)).

(11') $$q_n \| q_n \theta \| = \frac{1}{\theta_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{1}{\lambda_n} \qquad \text{(d'après (11))} \quad .$$

(12) $$\theta_n = [a_n \, , \, a_{n+1} \, , \, \ldots]$$

(d'après l'algorithme du développement de $\theta$ ).

(13) $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [a_0 \, , \, a_1 \, , \, \ldots \, , \, a_{n+1}]$$

d'après (11) avec $\theta_{n+1} = a_{n+1}$ .

(14) $$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n \, , \, a_{n-1} \, , \, \ldots \, , \, a_1] \quad .$$

(D'après (2)

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \quad .$$

Comme

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} < 1$$

$a_n$ est le premier terme du développement de $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$ en fraction continue d'après (9) etc.)

(15) $$\lambda_n = [a_{n+1} \, , \, a_{n+2} \, , \, \ldots] + [0 \, , \, a_n \, , \, a_{n-1} \, , \, \ldots \, , \, a_1] \quad .$$

2.6. Majorations et minorations d'un nombre $\theta$ sur son développement en fraction continue. - Soient

$$\theta = [a_0 \, , \, a_1 \, , \, \ldots \, , \, a_n \, , \, \ldots] \quad \text{et} \quad \theta' = [a'_0 \, , \, a'_1 \, , \, \ldots \, , \, a'_n \, , \, \ldots] \quad ,$$

où $a_n = a'_n$ si $n \neq m$ et $a'_m > a_m$ .

Alors d'après (9)

$$\theta'_n = \theta_n \quad \text{pour} \quad n \leqslant m$$

et

$$\theta'_{m+1} > \theta'_m \qquad .$$

(5') et (11) montrent que

$$\theta' > \theta \quad \text{si} \quad m \quad \text{pair et} \quad \theta' < \theta \quad \text{si} \quad m \quad \text{impair} \qquad .$$

Conséquence. - On majore $\theta$ en majorant (minorant) les quotients de rang impair et en minorant (majorant) ceux de rang pair.

Exemple. - $\theta < (a_0 , a_1 , \dots , a_{2m} , 1)$ , en effet

$$\theta < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} = [a_0 , a_1 , \dots , a_{2m} , a_{2m+1}] \leqslant [a_0 , a_1 , \dots , a_{2m} , 1] \qquad .$$

## 3. Quelques propriétés des "meilleures approximations" d'un nombre $\theta$ irrationnel quelconque.

3.1. On a vu (7) : $q_n \| q_n \theta \| < 1$ quel que soit $n$ .

Ce résultat ne peut être amélioré car il est possible de construire des nombres $\theta$ tels que, pour certains $n$ , la quantité $q_n \| q_n \theta \|$ soit aussi proche de $1$ que l'on veut.

En effet, d'après (15),

$$\lambda_n < a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + 1} + \frac{1}{a_n + 1} \qquad ,$$

donc, si l'on prend $a_{n+1} = 1$ , $a_n > N$ , $a_{n+2} > N$ ,

$$\lambda_n < 1 + \frac{2}{N+1}$$

et d'après (11') :

$$q_n \| q_n \theta \| > \frac{1}{1 + \frac{2}{N+1}} .$$

3.2. <u>Sur deux réduites successives l'une au moins vérifie</u>

$$q_n \| q_n \theta \| < \frac{1}{2} .$$

En effet supposons que l'on ait simultanément :

$$\| q_n \theta \| \geqslant \frac{1}{2q_n} \quad \text{et} \quad \| q_{n-1} \theta \| \geqslant \frac{1}{2q_{n-1}} .$$

(6) entraîne alors

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n-1}} \leqslant 2 ,$$

ce qui est impossible (pour tout $x > 0$ diffèrent de $1$ , $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$ ).

3.3. <u>Réciproquement, soit</u> $\frac{p}{q}$ <u>une fraction, non nécessairement irréductible, telle que</u> $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ . <u>Alors</u> $\frac{p}{q}$ <u>est égale à une réduite de</u> $\theta$ .

Voir la démonstration de cette propriété dans HARDY and WRIGHT ([2], page 153).

Cette démonstration s'appuie sur le lemme ([2], page 140) :

Si $\theta = \frac{P\zeta + R}{Q\zeta + S}$ où $\zeta > 1$ , et où $P$ , $Q$ , $R$ , $S$ sont des entiers tels que $Q > S > 0$ et $|PS - QR| = 1$ , alors $\frac{R}{S}$ et $\frac{P}{Q}$ sont deux réduites successives du développement de $\theta$ en fraction continue.

3.4. Sur trois réduites successives l'une au moins vérifie :

$$q_n \| q_n \theta \| < \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad ,$$

c'est-à-dire, sur trois $\lambda_n$ successifs ( $\lambda_n$ défini par (11')) l'un au moins vérifie $\lambda_n > \sqrt{5}$ .

Démonstration. - D'après (15)

$$\lambda_n = [a_{n+1} , a_{n+2} , \dots] + [0 , a_n , a_{n-1} , \dots , a_1] \qquad ;$$

d'où

$$\lambda_n > [a_{n+1} , a_{n+2} , 1] + [ 0 , a_n , 1]$$

c'est-à-dire

(16) $$\lambda_n > a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + 1} + \frac{1}{a_n + 1}$$

$a_{n+1} \geqslant 3$ entraîne $\lambda_n > 3 > \sqrt{5}$ .

La propriété reste donc à démontrer dans les cas où l'on a simultanément

$$a_{n+1} \leqslant 2 , \quad a_{n+2} \leqslant 2 \quad \text{et} \quad a_{n+3} \leqslant 2 \qquad .$$

Si $a_{n+i} = 2$ , pour $i = 1 , 2$ , ou $3$ , (16) montre que

$$\lambda_{n+i} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5} \qquad .$$

Il reste donc à examiner le cas :

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1 \qquad .$$

L'inégalité (16) ne suffit pas pour conclure. De manière plus précise, l'on a :

$$\lambda_n = [1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ a_{n+4}\ ,\ \ldots] + [0\ ,\ a_n\ ,\ \ldots] \quad ,$$

$$\lambda_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \beta}} + \alpha = f_1(\alpha\ ,\ \beta) \quad ,$$

où $0 < \alpha < 1$ , $0 < \beta < 1$ (en effet $\alpha = \frac{q_{n-1}}{q_n}$ d'après (14) et $\beta = \frac{1}{\theta_{m+4}}$ d'après (12)).

De façon analogue, on a :

$$\lambda_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 + \alpha} = f_2(\alpha\ ,\ \beta) \quad ,$$

$$\lambda_{n+2} = 1 + \beta + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \alpha}} = f_3(\alpha\ ,\ \beta) \quad .$$

Posons

$$F = \sup(f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3) \quad .$$

On trouve facilement la valeur de $F$ en fonction de la position du point ~~de coor-~~ données $(\alpha\ ,\ \beta)$ dans le quart de plan $\alpha \geqslant 0$ , $\beta \geqslant 0$ .

En effet

$f_1 = f_3$ sur la bissectrice $OX$ ,

$f_1 = f_2$ sur l'hyperbole $(\Gamma)$ d'équation $\beta = \frac{1}{\alpha} - 1$ ,

$f_1 = f_4$ sur l'hyperbole $(\Gamma')$ d'équation $\alpha = \frac{1}{\beta} - 1$ .

Soit $A$ le point $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ ; $B$ le point $\alpha = 0$ , $\beta = 1$ ; et $I$ le point $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ , point d'intersection de $(\Gamma)$ et $(\Gamma')$ .

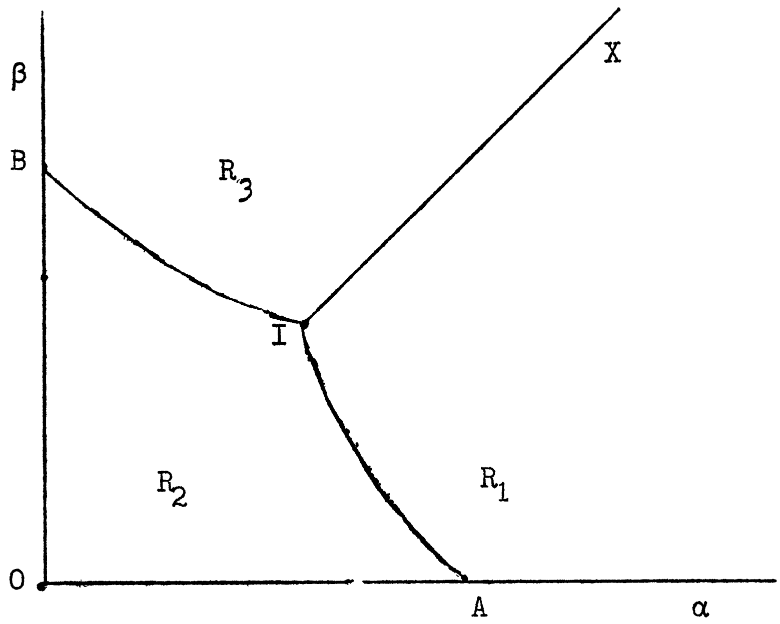
En remarquant que les fonctions $f_i$ sont monotones par rapport à chacune des deux variables $\alpha$ et $\beta$ , on montre que

$$F = f_1 \text{ dans la région } (R_1) : \alpha AIX \quad ,$$

$$F = f_2 \text{ dans la région } (R_2) : OAIB \quad ,$$

$$F = f_3 \text{ dans la région } (R_3) : \beta BIX \quad ,$$

dont les frontières sont : l'arc AI de $(\Gamma)$ , l'arc BI de $(\Gamma')$ , les demi-droites $A\alpha$ , $B\beta$ et IX , les segments de droites OA et OB .




Il reste à trouver la borne inférieure, pour $\alpha > 0$ , $\beta > 0$ , des valeurs $F(\alpha , \beta)$ . Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ , $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ ne s'annulent pas à l'intérieur d'une région $R_i$ . F ne peut donc avoir un minimum que sur les courbes frontières. Or sur ces courbes la fonction F est monotone par rapport à $\alpha$ ou à $\beta$ (sur $(\Gamma)$ par exemple $F = 1 + \alpha + \frac{1}{1 + \alpha}$ ). Il suffit donc de comparer les valeurs prises par F aux points O , A , B , I , et X $(\alpha = + \infty , \frac{\beta}{\alpha} = 1)$ . On démontre ainsi que la fonction $F(\alpha , \beta)$ est minimum en I : pour tout $\alpha \geq 0$ , $\beta \geq 0$ :

$$F(\alpha , \beta) \geq F(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} , \frac{\sqrt{5} - 1}{2}) = \sqrt{5} \quad .$$

En revenant au problème de départ, ceci entraîne bien, puisque $\alpha = \frac{q_{n-1}}{q_n}$ est rationnel,

$$\sup(\lambda_n , \lambda_{n+1} , \lambda_{n+2}) > \sqrt{5} \quad .$$

## 4. Nombres équivalents.

4.1. Le développement en fraction continue associe à tout nombre réel $\theta$ une suite d'entiers positifs $(a_n)$. Que peut-on dire de deux nombres $\theta$ et $\theta'$ tels que les suites $(a_n)$ et $(a'_n)$ associées soient identiques à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telles que, $r$ et $s$ étant deux entiers positifs : $a_{r+k} = a'_{s+k}$ pour $k \geqslant 0$ ?

D'après (11), on a :

$$\theta = \frac{\theta_r\, p_{r-1} + p_{r-2}}{\theta_r\, q_{r-1} + q_{r-2}}, \text{ avec } |p_{r-1}\, q_{r-2} - p_{r-2}\, q_{r-1}| = 1 ,$$

$$\theta' = \frac{\theta'_r\, p'_{r-1} + p'_{r-2}}{\theta'_r\, q'_{r-1} + q'_{r-2}}, \text{ avec } |p'_{r-1}\, q'_{r-2} - p'_{r-2}\, q'_{r-1}| = 1 .$$

Or

$$\theta_r = [a_r , a_{r+1} , a_{r+2} , \ldots] = \theta'_r \qquad \text{(d'après (12))} .$$

Il en résulte entre $\theta$ et $\theta'$ une relation de la forme :

$$(17) \qquad \theta' = \frac{A\theta + B}{C\theta + D}, \text{ avec } |AD - BC| = 1 .$$

Définition. - Deux nombres réels $\theta$ et $\theta'$ sont dits équivalents $(\theta \sim \theta')$ s'il existe entre eux une relation de la forme (17) (relation évidemment réflexive, symétrique, transitive).

D'où le

THÉORÈME. - Si deux nombres ont des développements en fraction continue qui coïncident à partir d'un certain rang, ces deux nombres sont équivalents.

Réciproquement, on démontre que :

Si deux nombres sont équivalents, leurs développements coïncident à partir d'un certain rang.

(Voir la démonstration dans [2], page 142. Elle s'appuie sur le lemme déjà cité dans le paragraphe 3.3.)

4.2. <u>Développements périodiques.</u> - Soit $\theta$ un nombre dont le développement est périodique "à partir d'un certain rang" c'est-à-dire

$$\theta = [a_0 , a_1 , \dots , a_r , \ b_0 , \dots , b_k , \ b_0 , \dots , b_k , \dots] \quad .$$

On a

$$\theta_{r+1} = [b_0 , \dots , b_k , \ b_0 , \dots , b_k , \dots] = \theta_{r+k+1} \quad .$$

Or

$$\theta_{r+1} = \frac{\theta_{r+k+1} P_k + P_{k-1}}{\theta_{r+k+1} Q_k + Q_{k-1}} \qquad \text{(d'après (11))}$$

( $\frac{P_k}{Q_k}$ et $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ étant les réduites d'ordre $k$ et $k - 1$ du développement de $\theta_{r+1}$ ).

Donc $\theta_{r+1}$ est un nombre quadratique et, puisque $\theta$ et $\theta_{r+1}$ sont équivalents, $\theta$ est lui aussi quadratique.

On démontre que la réciproque de cette propriété est exacte (voir [2], page 144).

D'où le résultat :

<u>Les développements périodiques caractérisent les nombres quadratiques.</u>

4.3. <u>Définition de</u> $\nu(\theta)$ . - Un nombre $\theta$ irrationnel étant donné, on pose

$$\nu(\theta) = \liminf_{n \infty} q_n \| q_n \theta \| \quad .$$

Les résultats de 3.4 montrent que $\nu(\theta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$ . L'étude des valeurs prises par $\nu(\theta)$ fera l'objet du prochain exposé. On se bornera ici à démontrer une propriété remarquable de $\nu(\theta)$ : <u>Si</u> $\theta$ <u>et</u> $\theta'$ <u>sont deux nombres équivalents,</u>

$$\nu(\theta) = \nu(\theta') \quad .$$

Démonstration. - On a vu ((11') et (15)) que

$$\frac{1}{q_n \| q_n \theta \|} = \lambda_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + [0, a_n, \dots, a_1] \quad .$$

Si $\theta$ et $\theta'$ sont équivalents, leurs développements vérifient les relations

$$a_{r+k} = a'_{s+k}$$

( $r$ et $s$ entiers fixes, $k \geqslant 0$ quelconque).

D'où

$$\lambda_{r+k} - \lambda'_{s+k} = [0, a_{r+k}, \dots, a_1] - [0, a'_{s+k}, \dots, a_1] \quad .$$

Les deux rationnels figurant au second membre ont leurs $k + 1$ premiers termes communs dans leur développement. En appliquant (10), on trouve

$$| \lambda_{r+k} - \lambda'_{s+k} | < 2^{1-k} \text{ , pour tout } k \geqslant 0 \quad .$$

Il en résulte

$$\limsup_{n\infty} \lambda_n = \limsup_{n\infty} \lambda'_n \quad .$$

D'où

$$\nu(\theta) = \nu(\theta') \quad .$$

5. Une application de la théorie des fractions continues : le théorème de Borel-Szusz.

$\theta$ étant un nombre irrationnel, on considère l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

$$q \| q\theta \| < \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ,$$

(ensemble infini d'après 3.4). Soit $\ell_1$ , $\ell_2$ , ... , $\ell_m$ , ... la suite des dénominateurs $q$ , ordonnée suivant les $q$ croissants.

THÉORÈME. - Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif $n_0$ tel que, pour tout $n > n_0$ , l'intervalle $]n , \varepsilon n^2[$ contienne au moins un nombre de la suite $(\ell_m)$ .

Ce résultat démontré par SZUSZ en 1959, avait été établi par BOREL dans le cas $\varepsilon = 15$ (il trouvait $n_0 = 10$ ).

Démonstration. - Il suffit de démontrer que, pour $m$ suffisamment grand, $\ell_{m+1} < \varepsilon \ell_m^2$ , c'est-à-dire que $\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2} \to 0$ quand $m \to +\infty$ .

On a vu (3.3) que tout rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $q\|q\theta\| < \frac{1}{2}$ est égal à une réduite $\frac{p_n}{q_n}$ du développement de $\theta$ . C'est-à-dire, puisque $p_n$ et $q_n$ sont premiers entre eux d'après (5) :

$$p = kp_n \ , \quad q = kq_n \qquad (k \text{ entier positif}) \quad .$$

Nous allons préciser ce résultat en montrant que $k \leqslant a_{n+1}$ . Soit un entier $q = kq_n$ , avec $k > a_{n+1}$ . Comparons les deux quantités

$$\frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2k^2 q_n^2} \quad \text{et} \quad |\theta - \frac{p}{q}| = \frac{1}{\lambda_n q_n^2} \quad .$$

$$\lambda_n = [a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots] + [0 , a_n , \ldots , a_1] \qquad (\text{d'après } (15)) \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\lambda_n < a_{n+1} + 2 \quad .$$

D'autre part

$$k^2 \geqslant (a_{n+1} + 1)^2 \quad .$$

Il en résulte

$$2k^2 > \lambda_n \qquad ,$$

et donc

$$|\theta - \frac{p}{q}| > \frac{1}{2q^2} \qquad .$$

D'où le résultat annoncé :

<u>Tout entier</u> $q$ <u>tel que</u> $q\|q\theta\| < \frac{1}{2}$ <u>vérifie</u> $q = kq_n$ <u>avec</u> $k \leq a_{n+1}$ .

La suite $(\ell_m)$ est donc formée de multiples $kq_n$ des dénominateurs $q_n$ des réduites de $\theta$ , avec $1 \leq k \leq a_{n+1}$ . Si $kq_n$ , avec $k > 1$ , figure dans la suite, $(k - 1)q_n$ y figure également (car $\frac{1}{2(kq_n)^2} < \frac{1}{2((k-1)q_n)^2}$ ). D'autre part (d'après 3.4) l'un au moins des trois nombres $q_n$ , $q_{n+1}$ , $q_{n+2}$ figure dans la suite $(\ell_m)$ . On remarque enfin que

$$kq_n < q_{n+1} \quad \text{pour tout} \quad k \leq a_{n+1} \qquad \text{(d'après (2))} \qquad .$$

Soient alors deux nombres successifs de la suite $(\ell_m)$ . Deux cas sont possibles.

- Ou bien : $\ell_m = kq_n$ , $\ell_{m+1} = (k+1)q_n$ , avec $1 \leq k < a_{n+1}$ ,

- Ou bien : $\ell_m = kq_n$ , $\ell_{m+1} = q_{n+h}$ , avec $\begin{cases} 1 \leq k \leq a_{n+1} \\ h = 1 , 2 \text{ ou } 3 . \end{cases}$

Nous allons étudier dans chaque cas le rapport $\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2}$ .

<u>Premier cas</u> :

$$\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2} = \frac{k+1}{k^2 \; q_n} < \frac{2}{q_n} \qquad .$$

Quand $m$ tend vers l'infini, l'indice $n$ du $q_n$ associé tend vers l'infini, donc $q_n$ augmente indéfiniment. Par suite $\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2}$ tend vers zéro.

Deuxième cas :

$$\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2} = \frac{q_{n+h}}{k^2 \; q_n^2} \quad .$$

Nous allons d'abord démontrer la double inégalité :

$$q_{n+1} \leqslant q_{n+h} < 9q_{n+1} \quad .$$

Les raisonnements faits dans la démonstration de 3.4 montrent que, si $a_{n+2} \geqslant 3$ , $q_{n+1}$ appartient à la suite $(\ell_m)$ . Dans ce cas $h = 1$ , les inégalités sont vérifiées.

Reste le cas $a_{n+2} \leqslant 2$ . L'égalité

$$\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} = a_{n+2} + \frac{q_n}{q_{n+1}}$$

entraîne

$$\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} < 3 \quad .$$

Si $a_{n+3} \geqslant 3$ , le même raisonnement que précédemment montre que $q_{n+2}$ appartient à la suite $(\ell_m)$ , $h \leqslant 2$ et les inégalités sont vérifiées.

Si $a_{n+3} \leqslant 2$ , on a de façon analogue

$$\frac{q_{n+3}}{q_{n+2}} < 3$$

et donc

$$\frac{q_{n+3}}{q_{n+1}} < 9 \quad ;$$

on ne peut pas conclure quant à la valeur de $h$ , mais les inégalités sont vérifiées.

Ceci permet de majorer le rapport $\frac{q_{n+h}}{k^2 q_n^2}$ :

$$\frac{q_{n+h}}{k^2 q_n^2} < \frac{9q_{n+1}}{k^2 q_n^2} < 9\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{q_{n+1}}{(k+1)^2 q_n^2} < 36 \frac{q_{n+1}}{(k+1)^2 q_n^2} .$$

Par hypothèse $(k+1)q_n$ n'appartient pas à la suite $(\ell_m)$ , donc

$$\|(k+1)q_n \theta\| > \frac{1}{\sqrt{5}(k+1)\ q_n} .$$

Or

$$\|(k+1)q_n \theta\| = (k+1)\|q_n \theta\| ,$$

car

$$(k+1)\|q_n \theta\| \leqslant (a_{n+1}+1)\|q_n \theta\| = \|q_{n-1} \theta\| + \|q_n \theta\| - \|q_{n+1} \theta\| < \frac{1}{2} .$$

On trouve donc la majoration :

$$\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2} = \frac{q_{n+h}}{k^2 q_n^2} < 36\sqrt{5} \frac{q_{n+1}}{q_n} \|q_n \theta\| < \frac{36}{q_n^2} .$$

Par conséquent, dans ce cas également, $\frac{\ell_{m+1}}{\ell_m^2} \to 0$ quand $m \to \infty$ .

Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[2] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3rd edition. - Oxford, the Clarendon Press, 1954.

[3] PERRON (Oskar). - Die Lehre von den Kettenbrüchen. 3te Auflage. Bände 1 und 2. - Stuttgart, B. G. Teubner, 1954-1957.

[4] SZÜSZ (P.). - Über die Approximation einer reellen Zahl durch Brüche, Acta Math. Acad. scient. Hungar., t. 10, 1959, p. 69-75.