

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

CHARLES PISOT

L'équation fonctionnelle de Cauchy avec des propriétés arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. n° 14,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A12_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CAUCHY
AVEC DES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES

par Charles PISOT

Une fonction F définie sur les entiers rationnels positifs est dite multipli-
cative si l'on a $F(mn) = F(m) + F(n)$ chaque fois que m et n sont premiers
entre eux. P. ERDÖS [2] a démontré que, si F est non décroissant, alors

$$F(n) = C \log n .$$

Diverses démonstrations ont été données depuis ([1], [3]) ; en particulier
SCHOENBERG [5] a réduit le problème à une question sur l'équation fonctionnelle
de Cauchy, ce que nous ferons également ici.

En décomposant n en ses facteurs premiers $n = p_1^{u_1} \dots p_k^{u_k}$, on a

$$F(n) = F(p_1^{u_1}) + \dots + F(p_k^{u_k}) .$$

Posant $f(t) = F(e^t)$, il vient

$$f\left(\sum_{i=1}^k u_i \log p_i\right) = \sum_{i=1}^k f(u_i \log p_i) .$$

Nous allons alors considérer l'équation fonctionnelle suivante :

$$(1) \quad f(u_1 \alpha_1 + \dots + u_k \alpha_k) = f(u_1 \alpha_1) + \dots + f(u_k \alpha_k) , \quad k \geq 2$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des nombres réels avec $\alpha_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, k$,
où u_1, \dots, u_k sont des entiers rationnels avec $u_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, k$.
La fonction f est définie sur l'ensemble E des nombres réels x qui peuvent
s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^k u_i \alpha_i$, $u_i \geq 0$ entier rationnel. De plus, nous
supposons que f est "bien définie", c'est-à-dire que si x peut se mettre de
plusieurs manières sous la forme $\sum_{i=1}^k u_i \alpha_i$, la relation (1) est vraie pour tou-
tes les manières de décomposer x en somme $\sum_{i=1}^k u_i \alpha_i$. Enfin nous supposons que
les valeurs de f sont réelles.

Remarquons encore que l'ensemble E est discret.

Dans une lettre à I. J. SCHOENBERG, P. ERDÖS a esquissé une démonstration du
fait que si $F(n)$ est multiplicative et définie seulement pour les entiers n
de la forme

$$n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} p_3^{u_3}$$

où p_1, p_2, p_3 sont trois nombres premiers différents fixes, et si $F(n)$ est non décroissant, alors $F(n) = C \log n$, mais que ce résultat est faux si l'on n'a que deux nombres premiers, comme le montre par exemple le contre-exemple de la fonction

$$F(n) = \left[\frac{\log n}{\log p_1} \right] + \left[\frac{\log n}{\log p_2} \right]$$

qui est multiplicative pour tout n de la forme $p_1^{u_1} p_2^{u_2}$, non décroissante et qui n'est pas de la forme $C \log n$.

Nous allons retrouver ces résultats, et constater que le cas $k = 2$ est le plus intéressant, et peut être caractérisé entièrement.

Donnons d'abord quelques conséquences immédiates de (1). Pour $u_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, on obtient $f(0) = kf(0)$, d'où $f(0) = 0$ puisque $k \geq 2$.

Pour chaque constante ρ , si f est solution de (1), la fonction f^* définie par $f^*(x) = f(\rho x)$ est une solution de (1) avec α_i/ρ à la place de α_i .

L'ensemble des solutions de (1) pour $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ fixes, est un espace vectoriel.

Toute forme linéaire $\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est aussi solution de (1). Il y a encore d'autres solutions évidentes de (1). Soit φ_i une fonction vérifiant $\varphi_i(0) = 0$, et ayant pour période tous les α_j avec $j \neq i$, c'est-à-dire telle que

$$\varphi_i(x + \alpha_j) = \varphi_i(x) \quad \text{pour tout } j \neq i$$

alors φ_i est solution de (1); en effet

$$\varphi_i\left(\sum_{j=1}^k u_j \alpha_j\right) = \varphi_i(u_i \alpha_i)$$

à cause de la périodicité et

$$\varphi_i(u_i \alpha_i) = \sum_{j=1}^k \varphi_i(u_j \alpha_j)$$

car

$$\varphi_i(u_j \alpha_j) = \varphi_i(0) = 0 \quad \text{si } j \neq i.$$

Nous pouvons illustrer cela par le cas particulier suivant, où tous les rapports α_i/α_j sont rationnels. On peut alors supposer que $\alpha_i = a_i$ est un entier rationnel pour $i = 1, \dots, k$, et que $(a_1, \dots, a_k) = 1$.

Posons $P = a_1 \dots a_k$ et $d_i = p.g.c.d.$ des a_j avec $j \neq i$. Si ω est une solution de (1) telle que $\omega(P) = 0$, alors on a $\omega(m a_i a_j) = 0$ pour tout

$m \geq 1$ entier et tout $i \neq j$. En effet, on a

$$\omega(u_i a_i + u_j a_j) = \omega(u_i a_i) + \omega(u_j a_j)$$

pour $u_i \geq 0$, $u_j \geq 0$.

En posant $\mu = \omega(a_i a_j)$, on en déduit pour $u_i = a_j$, $u_j = a_i$: $\omega(2 a_i a_j) = 2\mu$ et par récurrence, $\omega(m a_i a_j) = m\mu$. Pour $m = \prod_h a_h$, $h \neq i$, $h \neq j$, on a

$$\omega(P) = \frac{P}{a_i a_j} \mu = 0, \quad \text{donc } \mu = 0.$$

Posons maintenant $\lambda = f(P)/P$, alors la fonction $\omega(x) = f(x) - \lambda x$ vérifie (1) et $\omega(P) = 0$. Définissons

$$\varphi_i(x) = \omega(u_i a_i) \quad \text{si } x = \sum_{j=1}^k u_j a_j$$

alors $x \equiv y \pmod{d_i}$ donne $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, ainsi $\varphi_i(x)$ est bien défini et possède la période d_i , donc aussi tous les a_j avec $j \neq i$. Par suite f est linéaire si et seulement si tous les d_i valent 1 pour $i = 1, \dots, k$.

D'autre part on a

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x).$$

Cherchons aussi maintenant, dans quel cas f est non décroissant, alors

$$(f(x) - f(y))/(x - y) \geq 0$$

ou encore

$$(\omega(x) - \omega(y))/(x - y) \geq -\lambda.$$

Posons

$$-\lambda_i = \min(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))/(x - y)$$

ce minimum est atteint pour un couple x, y au moins. En divisant l'intervalle (x, y) en intervalles de longueur 1, on voit qu'il existe un x_i tel que

$$\varphi_i(x_i + 1) - \varphi_i(x_i) = -\lambda_i.$$

Comme a_i est premier avec d_i , on peut trouver un entier $u_i \geq 0$ tel que $x_i \equiv a_i u_i \pmod{d_i}$; en posant $x = \sum_{i=1}^k a_i u_i$ on aura $x \equiv x_i \pmod{d_i}$ pour tout $i = 1, \dots, k$, donc

$$\varphi_i(x + 1) - \varphi_i(x) = -\lambda_i$$

et par suite

$$\omega(x + 1) - \omega(x) = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \geq -\lambda.$$

Il en résulte que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq \lambda$.

Réciproquement, soit $\varphi_i(x)$ une fonction périodique de période d_i , avec $\varphi_i(0) = 0$ et soit $-\lambda_i = \min \varphi_i(x+1) - \varphi_i(x)$. Posons

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)$$

et soit λ un nombre vérifiant $\lambda \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, alors $f(x) = \omega(x) + \lambda x$ est une solution non décroissante de (1).

Étudions maintenant le cas général. Pour cela nous allons établir d'abord une égalité fondamentale. Soit I, J une partition de l'ensemble des indices $1, \dots, k$. Nous allons prendre dans E deux éléments x_h, y_h tels que $x_h - y_h$ soit fixe. Pour cela nous poserons

$$x_h = \sum_{i \in I} u_i \alpha_i + \sum_{j \in J} u_j^{(h)} \alpha_j, \quad y_h = \sum_{i \in I} v_i \alpha_i + \sum_{j \in J} v_j^{(h)} \alpha_j$$

et nous nous donnons des entiers q_j , $j \in J$, de signe arbitraire. Posons $\delta_j = \pm 1$ tel que $\delta_j q_j \geq 0$.

Soient $w_j \geq 0$ et $h \geq 1$ des entiers ; soit

$$u_j^{(h)} = w_j + h q_j \quad \text{si } \delta_j = +1$$

$$u_j^{(h)} = w_j + (h-1) |q_j| \quad \text{si } \delta_j = -1$$

et

$$v_j^{(h)} = w_j + (h-1) q_j \quad \text{si } \delta_j = +1$$

$$v_j^{(h)} = w_j + h |q_j| \quad \text{si } \delta_j = -1$$

On a ainsi dans les deux cas $u_i^{(h)} - v_i^{(h)} = q_j$ et

$$x_h - y_h = \sum_{i \in I} (u_i - v_i) \alpha_i + \sum_{j \in J} q_j \alpha_j.$$

D'autre part

$$f(x_h) - f(y_h) = \sum_{i \in I} (f(u_i \alpha_i) - f(v_i \alpha_i)) + \sum_{j \in J} (f(u_j^{(h)} \alpha_j) - f(v_j^{(h)} \alpha_j)).$$

En sommant pour $h = 1, 2, \dots, m$, il vient l'égalité :

$$(2) \quad \sum_{h=1}^m \{f(x_h) - f(y_h)\} \\ = m \sum_{i \in I} \{f(u_i \alpha_i) - f(v_i \alpha_i)\} + \sum_{j \in J} \delta_j \{f((w_j + m|q_j|) \alpha_j) - f(w_j \alpha_j)\}$$

où

$$x_h - y_h = \sum_{i \in I} (u_i - v_i) \alpha_i + \sum_{j \in J} q_j \alpha_j.$$

Supposons maintenant que f soit monotone, non décroissant.

1° Prenons tous les u et v nuls sauf pour un indice i , où nous supposons $u_i = u > 0$ et $v_i = 0$, et pour un indice j ; nous supposons $q_j = -q$, avec $q > 0$. Nous prendrons une partition I, J telle que $i \in I$ et $j \in J$. Pour chaque $u \geq 2$, nous choisissons q de sorte que $0 \leq u \alpha_i - q \alpha_j < \alpha_j$; posant $q' = q + 1$, on aura $-\alpha_j \leq u \alpha_i - q' \alpha_j < 0$. Pour tout entier positif n , nous définissons m et w_j par division: $n = mq + w_j$, $0 \leq w_j \leq q - 1$. On aura

$$x_h - y_h = u \alpha_i - q \alpha_j > 0, \quad \delta_j = -1$$

donc (2) et la monotonie de f donnent

$$mf(u \alpha_i) - f(n \alpha_j) + f(w_j \alpha_j) \geq 0.$$

Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ et par suite:

$$\frac{f(n \alpha_j)}{n \alpha_j} \leq \frac{m}{(mq + w_j) \alpha_j} f(u \alpha_i) + \frac{f(w_j \alpha_j)}{n \alpha_j}.$$

Posons alors

$$\lambda' = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n \alpha_j)}{n \alpha_j}$$

on a donc

$$\lambda' \leq f(u \alpha_i) / q \alpha_j.$$

De manière analogue, en posant

$$\lambda'' = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n \alpha_j)}{n \alpha_j}$$

on obtient avec q' l'inégalité

$$\lambda'' \geq f(u \alpha_i) / q' \alpha_j.$$

On a ainsi

$$\frac{f(u \alpha_i)}{u \alpha_i + \alpha_j} \leq \lambda'' \leq \lambda' \leq \frac{f(u \alpha_i)}{u \alpha_i - \alpha_j}$$

ces inégalités montrent que $f(n \alpha_j) / n \alpha_j$ a une limite si $n \rightarrow \infty$, et que cette limite est indépendante de l'indice j . Nous poserons

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n \alpha_j)}{n \alpha_j} \quad \text{quel que soit } j = 1, \dots, k.$$

Posons maintenant

$$\omega(x) = f(x) - \lambda x.$$

alors $\omega(x)$ vérifie (1) et vérifie de plus

$$(\omega(x) - \omega(y))/(x - y) \geq -\lambda \quad \text{pour } x \in E, y \in E$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(x)/x = 0 \quad \text{pour } x \in E.$$

2° Supposons maintenant $k = 3$ et $I = \{1\}$, $J = \{2, 3\}$. Prenons dans (2), pour f , la fonction ω et $w_j = 0$. En divisant par

$$m(x_h - y_h) = m\{(u_1 - v_1) \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + q_3 \alpha_3\}$$

on obtient :

$$\frac{\omega(u_1 \alpha_1) - \omega(v_1 \alpha_1) + \delta_2 \omega(m|q_2|\alpha_2)/m + \delta_3 \omega(m|q_3|\alpha_3)/m}{(u_1 - v_1) \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + q_3 \alpha_3} \geq -\lambda$$

Si α_2/α_3 est irrationnel, nous choisissons $v_1 = 0$, et q_2 et q_3 tels que

$$0 < u_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + q_3 \alpha_3 < \varepsilon$$

alors si $m \rightarrow \infty$, on en déduit que

$$\omega(u_1 \alpha_1) \geq -\lambda \varepsilon.$$

On peut, pour le même u_1 , trouver q_2' et q_3' tels que

$$-\varepsilon < u_1 \alpha_1 + q_2' \alpha_2 + q_3' \alpha_3 < 0, \quad \text{d'où } \omega(u_1 \alpha_1) \leq \lambda \varepsilon$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\omega(u_1 \alpha_1) = 0$.

On obtient ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Si les rapports α_1/α_2 , α_2/α_3 , α_3/α_1 sont irrationnels, toute fonction f , non décroissante, vérifiant (1) est de la forme λx .

Dans le cas de $k = 2$ et α_1/α_2 irrationnel, l'égalité (2) donne de même pour la fonction ω l'inégalité

$$\frac{\omega(u_1 \alpha_1) - \omega(v_1 \alpha_1)}{(u_1 - v_1) \alpha_1 + q_1 \alpha_2} \geq -\lambda.$$

Définissons alors la fonction $\varphi_1(x)$ par

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1(x + \alpha_2) = \varphi_1(x), \quad \varphi_1(u_1 \alpha_1) = \omega(u_1 \alpha_1)$$

et la fonction $\varphi_2(x)$ par

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2(x + \alpha_1) = \varphi_2(x), \quad \varphi_2(u_2 \alpha_2) = \omega(u_2 \alpha_2).$$

Pour $x = u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2$ on a ainsi

$$\omega(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \text{et } \omega(u_1 \alpha_1) = \varphi_1(x);$$

de même si $y = v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2$, on a

$$\omega(v_1 \alpha_1) = \varphi_1(y), \quad \text{d'où} \quad (\varphi_1(x) - \varphi_1(y))/(x - y) > -\lambda.$$

c'est-à-dire $\varphi_1(x) + \lambda x$ est une fonction monotone non décroissante.

On montre de même que $\varphi_2(x) + \lambda x$ est monotone non décroissant.

En vertu de la périodicité de $\varphi_i(x)$, on peut remarquer que $\varphi_i(x)$ est défini sur l'ensemble E_i des x de la forme $u_i \alpha_i + q_j \alpha_j$, où u_i entier ≥ 0 , mais où q_j est un entier de signe arbitraire; par suite E_i est un ensemble de nombres réels partout dense.

Etablissons un lemme.

LEMME. - Soit $g(x)$ une fonction définie sur un ensemble H partout dense. Soient $x' \in H$, $y' \in H$ tels que $x' > y'$ et que $g(x') - g(y') \leq \rho(x' - y')$. Alors, quel que soit δ vérifiant $0 < 5\delta \leq x' - y'$, on peut trouver $x \in H$, $y \in H$, $x > y$ tels que $\delta < x - y < 5\delta$ et $g(x) - g(y) \leq \rho(x - y)$.

L'idée de la démonstration consiste à partager l'intervalle y', x' en intervalles partiels, de longueur 3δ et de déplacer légèrement les points de division, de façon à ce qu'ils fassent partie de H .

Précisons : il existe un entier impair $2r + 1$ tel que

$$3(x' - y')/5\delta \leq 2r + 1 \leq (x' - y')/\delta$$

en effet

$$(x' - y')/\delta - 3(x' - y')/5\delta = 2(x' - y')/5\delta > 2.$$

Partageons maintenant l'intervalle y', x' en $2r + 1$ intervalles égaux et choisissons dans le $2j$ -ième intervalle ouvert, un point x_j de l'ensemble partout dense H et cela pour $j = 1, \dots, r$. Posons de plus $x_0 = y'$, $x_{r+1} = x'$. On a alors

$$\delta \leq (x' - y')/(2r + 1) < x_{j+1} - x_j < 3(x' - y')/(2r + 1) \leq 5\delta$$

pour $j = 0, 1, \dots, r$.

Définissons ρ_j par

$$g(x_{j+1}) - g(x_j) = \rho_j(x_{j+1} - x_j)$$

alors

$$g(x') - g(y') = \sum_{j=0}^r \rho_j(x_{j+1} - x_j).$$

L'un au moins des ρ_j vérifie $\rho_j \leq \rho$, sinon on aurait $g(x') - g(y') > \rho(x' - y')$.
En prenant $x = x_{j+1}$, $y = x_j$ avec j tel que $\rho_j \leq \rho$, on aura

$$\delta < x - y < 5\delta \quad \text{et} \quad g(x) - g(y) \leq \rho(x - y).$$

Le lemme est ainsi démontré. Ce lemme va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 2. - Si $k = 2$ et si α_1/α_2 est irrationnel, toute fonction f , non décroissante, vérifiant (1), est de la forme

$$f(x) = \lambda x + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \text{où} \quad \varphi_i(0) = 0$$

$$\varphi_i(x + \alpha_j) = \varphi_i(x) \quad \text{si} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2$$

et

$$(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))/(x - y) \geq -\lambda_i \quad \text{avec} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda.$$

Il ne nous reste qu'à démontrer que $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda$. Pour cela, montrons d'abord que l'on peut trouver $x \in E_1$, $y \in E_1$, $y < x$ tels que

$$(\varphi_1(x) - \varphi_1(y))/(x - y) \leq -\lambda_1 + \varepsilon$$

et $s \in E_2$, $t \in E_2$, $t < s$ tels que

$$(\varphi_2(s) - \varphi_2(t))/(s - t) \leq -\lambda_2 + \varepsilon$$

avec de plus $x - y < s - t < 5(x - y)$ et cela quel que soit $\varepsilon > 0$ donné.

Posons

$$-\lambda_i = \inf(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))/(x - y), \quad i = 1, 2, \quad x \in E_i, \quad y \in E_i, \quad x \neq y;$$

comme $\varphi_i(x) + \lambda x$ est croissant, on a $\lambda_i \leq \lambda$ et λ_i est fini. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $x_i \in E_i$, $y_i \in E_i$, $y_i < x_i$ tels que

$$(\varphi_i(x_i) - \varphi_i(y_i))/(x_i - y_i) \leq -\lambda_i + \varepsilon.$$

1° Si $x_1 - y_1 \geq x_2 - y_2$, on applique le lemme avec $g = \varphi_1$, $x' = x_1$, $y' = y_1$, $\rho = -\lambda_1 + \varepsilon$ et en prenant $\delta = (x_2 - y_2)/5$, alors $5\delta \leq x' - y'$.

Le lemme donne alors des valeurs de x et y et on prend $s = x_2$, $t = y_2$.

2° Si $(x_2 - y_2)/5 < x_1 - y_1 < x_2 - y_2$, il suffit de prendre $x = x_1$, $y = y_1$, $s = x_2$, $t = y_2$.

3° Si $x_1 - y_1 \leq (x_2 - y_2)/5$, on applique le lemme avec $g = \varphi_2$, $x' = x_2$, $y' = y_2$, $\rho = -\lambda_2 + \varepsilon$ et en prenant $\delta = x_1 - y_1$. Le lemme donne alors s et t et on prend $x = x_1$, $y = y_1$.

Or l'inégalité $x - y < s - t$ peut s'écrire $x - s < y - t$; comme α_1/α_2 est irrationnel, il existe des entiers positifs u, v aussi grands que l'on veut tels que l'on ait

$$x - s < v \alpha_1 - u \alpha_2 < y - t$$

c'est-à-dire aussi

$$t + v \alpha_1 < y + u \alpha_2; \quad x + u \alpha_2 < s + v \alpha_1.$$

Comme $y < x$, on a de plus $y + u \alpha_2 < x + u \alpha_2$. On suppose u, v assez grands pour que les quatre nombres suivants, rangés par ordre croissant :

$$t + v \alpha_1, \quad y + u \alpha_2, \quad x + u \alpha_2, \quad s + v \alpha_1$$

appartiennent tous à l'ensemble discret E .

La fonction $\psi(x) = \varphi_2(x) + \lambda_2 x$ est croissante donc

$$\psi(x + u \alpha_2) - \psi(y + u \alpha_2) \leq \psi(s + v \alpha_1) - \psi(t + v \alpha_1).$$

En tenant compte de la période α_1 de φ_2 , cela s'écrit :

$$\lambda_2(x - y) + \varphi_2(x + u \alpha_2) - \varphi_2(y + u \alpha_2) \leq \lambda_2(s - t) + \varphi_2(s) - \varphi_2(t) \leq \varepsilon(s - t).$$

D'autre part, en tenant compte de la période α_2 de φ_1 , on a :

$$\lambda_1(x - y) + \varphi_1(x + u \alpha_2) - \varphi_1(y + u \alpha_2) = \lambda_1(x - y) + \varphi_1(x) - \varphi_1(y) \leq \varepsilon(x - y).$$

En ajoutant, il vient :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y) + \omega(x + u \alpha_2) - \omega(y + u \alpha_2) \leq 6\varepsilon(x - y).$$

Par ailleurs, on sait que

$$\omega(x + u \alpha_2) - \omega(y + u \alpha_2) \geq -\lambda(x + u \alpha_2 - y - u \alpha_2) = -\lambda(x - y)$$

donc

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda)(x - y) \leq 6\varepsilon(x - y)$$

c'est-à-dire, comme $x - y > 0$, on a l'inégalité cherchée $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda$, et le théorème 2 est démontré.

On peut obtenir des résultats analogues en supposant que les valeurs de f appartiennent à un espace de Banach, et en remplaçant la monotonie de f par une condition de continuité uniforme : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe η tel que $\|x - y\| < \eta$ entraîne $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, pour x, y appartenant à l'ensemble E , les α_i étant des éléments d'un espace de Banach.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESICOVITCH (A. S.). - On additive functions of a positive integer, Studies in mathematical analysis and related topics, An essays on honor of George Polya, p. 38-41. - Stanford, Stanford University, 1962.
 - [2] ERDÖS (P.). - On the distribution function of additive functions, Annals of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.
 - [3] MOSER (L.) and LAMBEK (J.). - On monotone multiplicative functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 544-545.
 - [4] PISOT (C.) and SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.
 - [5] SCHOENBERG (I. J.). - On two theorems of P. Erdős and A. Rényi, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 53-58.
-