

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-PAUL BERTRANDIAS

## Critères d'équirépartition modulo un

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 4 (1962-1963), exp. n° 2, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1962-1963\\_\\_4\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A2_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CRITÈRES D'ÉQUIRÉPARTITION MODULO UN

par Jean-Paul BERTRANDIAS

1. Définitions. Théorèmes fondamentaux.

Etant donnée une suite  $\{u_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), de nombres réels, on étudie sa répartition modulo un c'est-à-dire la répartition dans l'intervalle  $[0, 1[$  de la suite  $\{u_n\}$  des parties fractionnaires des nombres  $u_n$ .

Soit  $[\alpha, \beta[$  un intervalle contenu dans l'intervalle  $[0, 1[$ . On note  $N(\alpha, \beta)$  le nombre des termes de la suite  $\{u_n\}$  d'indice inférieur à  $N$  et dont la partie fractionnaire  $u_n$  appartient à l'intervalle  $[\alpha, \beta[$ .

DÉFINITION 1. - On dit que la suite  $\{u_n\}$  est équirépartie modulo un (e. r. mod 1) si, quel que soit l'intervalle  $[\alpha, \beta[ \subset [0, 1[$ , on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(\alpha, \beta)}{N} = \beta - \alpha .$$

Des conditions nécessaires et suffisantes d'équirépartition sont données par les théorèmes suivants (théorèmes de H. WEYL) :

THÉOREME 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $\{u_n\}$  soit e. r. mod 1 est que, pour toute fonction  $f(x)$  intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle  $[0, 1[$ , on ait :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) = \int_0^1 f(x) dx .$$

THÉOREME 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $\{u_n\}$  soit e. r. mod 1 est que, pour tout entier  $\ell$  positif ( $\ell > 0$ ), on ait :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2i\pi\ell u_n) = 0 . .$$

Une condition suffisante d'équirépartition est la suivante :

THÉOREME 3. (Critère de Van der Corput). - Une condition suffisante pour que la suite  $\{u_n\}$  soit e. r. mod 1 est que les suites  $\{u_n\} = \{u_{n+k} - u_n\}$  soient e. r. mod 1 pour tous les entiers  $k > 0$ .

Les démonstrations classiques de ces théorèmes ont été données l'an dernier par J. CHAUVINEAU [4]. Le but de cet exposé est de démontrer quelques critères d'équidistribution analogues à celui de Van der Corput au moyen de certaines méthodes utilisées dans la théorie des fonctions pseudo-aléatoires. Le point de départ de ces applications se trouve dans le travail de J. BASS [1]. La rédaction de cet exposé reprend et complète un article à paraître dans les comptes rendus du Colloque de Théorie des nombres [Août 1962. BREUKELEN].

## 2. Fonctions pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires.

Les fonctions pseudo-aléatoires ont été définies comme fonctions de la variable réelle continue [1], [3] mais pour l'étude des suites, il est plus commode d'utiliser directement des fonctions de la variable discrète  $n = 0, 1, 2, \dots$ . On prendra alors comme définition :

DÉFINITION 2. - Une fonction  $f(n)$  est pseudo-aléatoire si la fonction de corrélation

$$(1) \quad \gamma(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+k) \overline{f(n)} = M_n f(n+k) \overline{f(n)}$$

existe pour tous les entiers  $k$  et est nulle en moyenne quadratique c'est-à-dire que

$$(2) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^{K-1} |\gamma(k)|^2 = \pi_k |\gamma(k)|^2 = 0 .$$

Si les limites intervenant dans (1) n'existent pas, on peut, dans certains cas, définir un ensemble  $G$  de "fonctions de corrélation généralisées"  $\gamma_G(k)$ . On suppose que

$$(3) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = M^2 < \infty$$

et

$$(4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} f(N) = 0 .$$

L'inégalité de Schwarz donne

$$(5) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n+k) \overline{f(n)} \leq M^2$$

et par le procédé diagonal, on peut trouver au moins une suite d'entiers  $\{N_j\}$  strictement croissante, telle que

$$(6) \quad \frac{1}{N_j} \sum_{n=0}^{N_j-1} f(n+k) \overline{f(n)}$$

converge quel que soit l'entier  $k$ , vers une limite qu'on appellera  $\gamma_G(k)$ .

DÉFINITION 3. - Si toutes les fonctions  $\gamma_G(k)$  possibles vérifient la condition (2), on dira que la fonction  $f(n)$  est quasi-pseudo-aléatoire.

### 3. Propriétés des fonctions pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires.

Les théorèmes connus sur les fonctions pseudo-aléatoires [(1), (3)] s'adaptent facilement au cas discret et aux fonctions quasi-pseudo-aléatoires. On obtient ainsi :

THÉORÈME 4. - Les fonctions  $\gamma_G(k)$  [ou  $\gamma(k)$ ] sont bornées par  $\gamma_G(0)$  [ou  $\gamma(0)$ ] et sont de type positif.

D'après le théorème de Bochner-Herglotz, il existe donc des mesures  $\alpha_G(\omega)$  non négatives et bornées sur  $(0, 1[$  telles que

$$(7) \quad \gamma_G(k) = \int_0^1 \exp i\omega k \, d\alpha_G(\omega) .$$

D'après le théorème de Wiener-Schoenberg, on a :

THÉORÈME 5. - Les mesures spectrales  $\alpha_G(\omega)$  sont continues, c'est-à-dire que ces mesures ne comportent pas de masses ponctuelles.

La condition (2) est en effet équivalente à la continuité des mesures  $\alpha_G(\omega)$ .

Entre les moyennes de  $f(n)$  et des fonctions  $\gamma_G(k)$  on a l'inégalité

$$(8) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \right|^2 \leq \sup_G \sum_k \gamma_G(k) = \sup_G \Delta \alpha_G$$

$\Delta \alpha_G$  étant la masse concentrée au point  $\omega = 0$ . D'après le théorème 5, on a donc :

THÉORÈME 6. - La moyenne d'une fonction pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire existe et est nulle.

Une autre importante propriété de moyenne est la suivante [3] :

THÉORÈME 7. - Le produit d'une fonction pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire par une fonction presque périodique au sens de Besicovitch  $B^2$  (p. p.  $B^2$ ) a une moyenne nulle.

### 4. Suites pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires.

A une suite  $\{u_n\}$  de nombres réels définis modulo un, on peut associer de manière biunivoque la fonction :

$$g(n) = \exp 2i\pi u_n .$$

DÉFINITION 4. - Si toutes les puissances positives  $g^\ell(n)$  de  $g(n)$  sont pseudo-aléatoires (resp. quasi-pseudo-aléatoires) on dira que la suite  $\{u_n\}$  est pseudo-aléatoire (resp. quasi-pseudo-aléatoire).

On notera  $\gamma^{(\ell)}(k)$  ou  $\gamma_G^{(\ell)}(k)$  les fonctions de corrélation ordinaires ou généralisées des fonctions  $g^\ell(n)$ .

D'après des résultats de E. HLAVKA [8], on peut dire que presque toutes les suites sont pseudo-aléatoires, "presque toutes" étant entendu au sens de la mesure de Haar sur le tore infini. Les fonctions de corrélation correspondantes sont de la forme :

$$\gamma(0) = 1 \quad \text{et} \quad \gamma(k) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 0 .$$

#### 5. Critères classiques d'équirépartition.

Le théorème 2 peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 8. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $\{u_n\}$  soit équirépartie modulo un est que la fonction associée  $g(n)$  soit telle que

$$(9) \quad M_n g^\ell(n) = 0$$

pour tout entier  $\ell$  non nul.

Le théorème 6 montre alors immédiatement qu'une suite pseudo-aléatoire ou quasi-pseudo-aléatoire est équirépartie. Dans les critères classiques d'équirépartition, ce sont de telles suites qui interviennent.

Démonstration du critère de Van der corput. - Le théorème 8 montre que :

$$(10) \quad M_n \exp 2i\pi \ell [u_{n+k} - u_n] = 0$$

donc  $\gamma^{(\ell)}(k) = 0$  pour  $k$  et  $\ell$  non nuls. Les fonctions  $g^\ell(n)$  sont pseudo-aléatoires pour  $\ell$  non nul. La suite  $\{u_n\}$  est alors pseudo-aléatoire donc équirépartie.

THÉORÈME 9. - Si  $\{u_{n+k} - u_n\}$  est équirépartie pour des valeurs de  $k$  de densité naturelle 1, la suite  $\{u_n\}$  est équirépartie.

L'égalité (10), valable pour une suite de valeurs de  $k$  de densité 1, donne ici  $\gamma_G^{(\ell)}(k) = 0$  pour une suite de densité 1. Donc toutes les fonctions de corrélation généralisées ont une moyenne quadratique nulle. Les fonctions  $g^\ell(n)$  et donc la suite  $\{u_n\}$  sont quasi-pseudo-aléatoires d'où le résultat.

THÉOREME 10. (KOROBOV-POSTNIKOV). - Si  $\{u_{n+k} - u_n\}$  est équirépartie pour tous les entiers  $k$  non nuls ou plus généralement pour des valeurs de  $k$  de densité 1 la suite  $\{u_{\lambda n + \mu}\}$  est équirépartie,  $\mu$  et  $\lambda \neq 0$  étant des entiers fixes.

Les fonctions  $g^\ell(n)$  sont quasi-pseudo-aléatoires. On peut appliquer le théorème 7 avec la fonction périodique  $\varphi(n) = \varphi^\ell(n)$  définie par

$$\begin{cases} \varphi(n) = 1 & \text{si } n = \mu \text{ modulo } \lambda, \\ \varphi(n) = 0 & \text{si } n \neq \mu \text{ modulo } \lambda. \end{cases}$$

On a  $M_m \exp 2i\pi \ell u_{\lambda m + \mu} = 0$  et le théorème 8 donne le résultat.

THÉOREME 11. - Si la suite  $\{u_n\}$  est telle que pour tout entier  $\ell \neq 0$  et pour tout  $a > 0$  les inégalités :

$$|\gamma_G^{(\ell)}(k)| \geq a$$

ou à plus forte raison :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp 2i\pi \ell [u_{n+k} - u_n] \right| \geq a$$

n'ont lieu que pour une suite de valeurs de  $k$  de densité nulle, la suite  $\{u_n\}$  est équirépartie.

En effet, d'après les conditions imposées, les moyennes quadratiques des fonctions  $\gamma_G^{(\ell)}(k)$  sont toutes nulles et la suite  $\{u_n\}$  est quasi-pseudo-aléatoire donc équirépartie.

## 6. Autre critère d'équirépartition.

Les critères précédents utilisent tous la moyenne quadratique de la fonction de corrélation : si celle-ci est nulle, la mesure spectrale  $\alpha(\omega)$  est continue. On peut utiliser d'autres conditions de continuité de  $\alpha(\omega)$ .

Si, étant donné un entier  $\nu > 0$ , on considère la fonction  $\gamma_G(\nu h)$  de l'entier  $h$ , on voit facilement qu'elle est de type positif et que, par conséquent,

$$\gamma_G(\nu h) = \int_0^1 \exp 2i\pi \omega h \, d\beta_G(\omega) = \int_0^1 \exp 2i\pi \omega \nu h \, d\beta_G(\nu \omega)$$

$\beta_G(\omega)$  étant une mesure non négative et bornée sur  $[0, 1[$ . En comparant avec l'expression de  $\gamma_G(\nu h)$  donnée par (7), on obtient :

$$\beta_G(\omega) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_G\left(\frac{\omega + j}{\nu}\right).$$

Comme  $\alpha_G(\omega)$  et  $\beta_G(\omega)$  sont des mesures non négatives et bornées la continuité de  $\beta_G(\omega)$  est équivalente à la continuité de  $\alpha_G(\omega)$ . Cette condition de continuité permet d'obtenir le critère suivant dont l'énoncé est dû à H. DELANGE (cité dans [4]).

THÉOREME 12. - Si les suites  $\{u_{n+k} - u_n\}$  sont équiréparties pour des valeurs de  $k$  multiples d'un même entier positif  $\nu$  :  $k = \nu, 2\nu, \dots, h\nu, \dots$  (ou même simplement pour une suite de valeurs de  $h$  de densité 1), la suite  $\{u_n\}$  est équirépartie (ou plus généralement les suites  $\{u_{\lambda n + \mu}\}$  sont équiréparties).

En effet, l'hypothèse entraîne que les fonctions  $\gamma_G^{(\ell)}(\nu h)$  ont une moyenne quadratique nulle (en  $h$ ) et donc que les mesures  $\beta_G^{(\ell)}(\omega)$  correspondantes sont continues. Les mesures  $\alpha_G^{(\ell)}(\omega)$  sont alors aussi continues ou, ce qui revient au même, les fonctions  $\gamma_G^{(\ell)}(k)$  ont une moyenne quadratique nulle. La suite  $\{u_n\}$  est donc quasi-pseudo-aléatoire et est équirépartie.

#### 7. Généralisations.

En suivant les méthodes indiquées par E. HLAWKA [7] et J. CIGLER [5], on peut généraliser la notion de suites pseudo-aléatoires et quasi-pseudo-aléatoires pour des suites d'éléments d'un groupe compact à base dénombrable. On peut ainsi traduire de manière immédiate le théorème 12 par exemple.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASS (Jean). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-64.
- [2] BASS (J.) et BERTRANDIAS (J.-P.). - Moyennes de sommes trigonométriques et fonctions d'autocorrélation, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 2457-2459.
- [3] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions presque périodiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 2226-2228.
- [4] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.
- [5] CIGLER (Johann). - Über eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Theorie der Gleichverteilung, J. für die reine und angew. Math., t. 210, 1962, p. 141-147.
- [6] CIGLER (J.) und HELMBERG (G.). - Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, Jahr. Deut. Math. Verein., t. 64, 1961, p. 1-50.
- [7] HLAWKA (Edmund). - Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 4, 1955, p. 33-47.
- [8] HLAWKA (Edmund). - Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung, Publ. Math., Debrecen, t. 7, 1960, p. 181-186.