Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Mendès France

Dimension de Hausdorff. Application aux nombres normaux

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A5_0>

DIMENSION DE HAUSDORFF. APPLICATION AUX NOMBRES NORMAUX

par Michel MENDÈS FRANCE

Dans cet exposé, on se propose de définir et de calculer la dimension de Hausdorff de certains ensembles linéaires. Le plan adopté est le suivant :

I. Définition de la dimension.

II. p-mesure dans les espaces métriques.

III. Dimension de Hausdorff.

I. Définition de la dimension (topologique).

La dimension d'un ensemble se définit par récurrence [4]. On commence par définir les ensembles de dimension nulle.

I. 1. Dimension 0 .

Un espace topologique est de dimension nulle en un point x si tout voisinage U de x contient un voisinage V de x dont la frontière $\mathfrak{F}(V)$ est vide. Un espace topologique X non vide est de dimension nulle si, en chacun de ses points, il est de dimension nulle.

On montre que tout ensemble de nombres réels qui ne contient pas un intervalle est 0-dimensionel.

I. 2. Dimension n .

α. On pose $\dim(\emptyset) = -1$.

β. Un espace topologique X est de dimension inférieure ou égale à n au point x si tout voisinage U de x contient un voisinage V dont la frontière $\mathfrak{F}(V)$ a une dimension inférieure ou égale à $(n-1)$.

γ. Un espace topologique X est de dimension n (ou n-dimensionnel) au point x s'il est vrai que $\dim(X) \leq n$ et s'il est faux que $\dim(X) \leq n-1$ au point x .

δ. Un espace topologique X est de dimension infinie au point x, si, pour tout entier n, il est faux que $\dim(X) \leq n$.

ε. Si l'une des propriétés (β), (γ), (δ) est vraie en tout point $x \in X$, on dit que X est respectivement de dimension inférieure ou égale à n, de dimension n, de dimension infinie.

On montre que $\dim(\underset{\sim}{R}^n) = n$. (La démonstration de ce résultat est loin d'être simple.)

II. p-mesure dans les espaces métriques [4].

Soit X un sous-espace d'un espace métrique séparable. Désignons par p un nombre réel non négatif. Soit $\varepsilon > 0$ donné, $\delta(A)$ représentant le diamètre d'un ensemble métrique $(\delta(A) = \sup\limits_{x,x' \in A} d(x , x'))$, on pose :

(1)
$$m_p^\varepsilon(X) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i)]^p$$

où $\bigcup\limits_i A_i$ constitue un recouvrement ouvert de l'ensemble X par une famille dénombrable de sous-ensembles $\{A_i\}$ de diamètre ne dépassant pas ε. On convient de poser $[\delta(\emptyset)]^0 = 0$ et $[\delta(A)]^0 = 1$ si $A \neq \emptyset$.

Par définition, la p-mesure de l'ensemble X est donnée par l'expression

(2)
$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_p^\varepsilon(X) .$$

Remarquons que, pour $p = 1$ et pour $X \subset \underset{\sim}{R}$, on obtient la mesure extérieure de Lebesgue.

On vérifie aisément l'implication suivante :

(3)
$$X = \emptyset \iff m_0(X) = 0 .$$

LEMME 1. - $0 \leq p < q \implies m_p(X) \geq m_q(X)$. De plus si $m_p(X)$ est finie, alors $m_q(X) = 0$.

La démonstration de ce lemme découle immédiatement de l'inégalité évidente :

$$\sum_i [\delta(A_i)]^q \leq \sup_j [\delta(A_j)]^{q-p} \sum_i [\delta(A_i)]^p .$$

Démontrons maintenant l'important théorème :

THÉORÈME 1. – Soit X un sous-espace d'un espace métrique séparable. On a l'implication suivante :

$$\dim(X) = n \ , \quad 0 \leq n < \infty \implies m_n(X) > 0 \ .$$

La négation du théorème s'énonce :

$$m_n(X) = 0 \implies \dim(X) \neq n \ .$$

Nous allons démontrer en fait le résultat plus fort :

$$m_n(X) = 0 \implies \dim(X) \leq n - 1 \ .$$

Soit en effet $x_0 \in X$ et soit r un nombre réel positif. On considère la sphère

$$S(r) = \{x \mid x \in X \ , \ d(x \, , x_0) = r\} \ .$$

Montrons la proposition suivante :

$$m_{p+1}(X) = 0 \ , \quad 0 \leq p < \infty \implies m_p[S(r)] = 0$$

pour presque tous les nombres r.

En effet soit E un ensemble borné. On pose :

$$(4) \qquad \begin{cases} r_1 = \inf\limits_{x \in E} d(x_0 \, , x) \\ r_2 = \sup\limits_{x \in E} d(x_0 \, , x) \ . \end{cases}$$

Il est évident que :

$$(5) \qquad r_2 - r_1 \leq \delta(E) \ .$$

Par suite, les intégrales considérées étant des intégrales supérieures :

$$\int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap E])^p \, dr = \int_{r_1}^{r_2} (\delta[S(r) \cap E])^p \, dr$$

$$\int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap E])^p \, dr \leq [\delta(E)]^p \int_{r_1}^{r_2} dr$$

$$(6) \qquad \int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap E])^p \, dr \leq [\delta(E)]^{p+1} \ .$$

Mais $m_{p+1}(X) = 0$ par hypothèse. Il existe donc une suite de recouvrements ouverts $(A_j^n)_{j=1}^{\infty}$

$$X \subset \bigcup_j A_j^n$$

telle que

(7) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [\delta(A_j^n)]^{p+1} = 0 \quad .$$

Les relations (6) et (7) impliquent que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap A_j^n])^p \, dr = 0 \quad .$$

On peut intervertir les signes $\int$ et Σ car, A_j^n étant ouvert, la fonction $\delta[S(r) \cap A_j^n]$ est semi-continue inférieurement :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\delta[S(r) \cap A_j^n])^p \, dr = 0 \quad .$$

D'après TITCHMARSCH ([6], section 1.2.5, p. 388), il existe une sous-suite (n_k) telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\delta[S(r) \cap A_j^{n_k}])^p = 0 \qquad \text{presque partout}$$

et par suite

$$m_p[S(r)] = 0 \qquad \text{presque partout.}$$

Ceci démontre la proposition. Pour $p = 0$, elle devient :

$$\begin{aligned} m_1(X) = 0 &\implies m_0[S(r)] = 0 \qquad \text{p. p.} \\ &\implies S(r) = \emptyset \qquad \text{p. p.} \\ &\implies \dim(X) = 0 \end{aligned}$$

le théorème 1 se démontre alors aisément par induction.

III. Dimension de Hausdorff.

III. 1. Définition.

X représentant un sous-ensemble d'un espace métrique séparable, la dimension de Hausdorff de X (notée H-dim(X)) est donnée par l'expression :

(8) $$\text{H-dim}(X) = \sup_{m_p(X)>0} \{p\} = \inf_{m_q(X)=0} \{q\} \quad .$$

Or le théorème 1 montre que l'on a :

$$m_{\dim(X)}(X) > 0 \quad .$$

On en déduit le corollaire important

(9) $$\text{H-dim}(X) \geqslant \dim(X) .$$

La notion de dimension de Hausdorff permet de classer certains ensembles de mesure nulle. Par exemple dans [5], on montre que la dimension de Hausdorff d'un ensemble parfait de Cantor à rapport ξ $(0 < \xi < \frac{1}{2})$ est égale à $\text{Log } 2/\text{Log}(\frac{1}{\xi})$. D'une façon plus générale, si V est un ensemble linéaire, le résultat suivant est vrai :

$$\text{H-dim}(V) < 1 \implies \text{mes}(V) = 0 \qquad (\text{mesure de Lebesgue sur } \underset{\sim}{R}) .$$

Dans le paragraphe qui suit, nous allons étudier la dimension de Hausdorff de l'ensemble des nombres qui ne sont pas normaux.

III. 3. Nombres normaux.

Soit x un nombre irrationnel de l'intervalle $(0 , 1)$ dont le développement binaire s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} \qquad (\varepsilon_n(x) = 0 \text{ ou } 1) .$$

Au nombre x, on associe la suite de Rademacher

$$\{ r_n(x) \}_{n \in \underset{\sim}{N}} \quad \text{où} \quad r_n(x) = 1 - 2\varepsilon_n(x) .$$

Par définition, on dit qu'un nombre $x \in (0 , 1)$ est "simplement normal dans la base 2" (ou plus brièvement : "normal") si l'égalité suivante a lieu :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} r_n(x) = 0 .$$

Nous allons établir le théorème suivant dû à W. A. BEYER [1] :

THÉORÈME 2. - L'ensemble V des nombres x de l'intervalle $(0 , 1)$, qui ne sont pas simplement normaux dans la base 2, est de mesure nulle et de dimension de Hausdorff égale à 1.

Que l'ensemble V soit de mesure nulle, cela est un résultat classique dû à BOREL, nous ne le démontrerons pas. Etablissons la seconde partie du théorème :

On définit l'application $T_n : (0 , 1) \to (0 , 1)^n$ par :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(x)}{2^i} \to T_n(x)$$

où la j-ième coordonnée de $T_n(x)$ est

$$T_n^j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{in+j}(x)}{2^{i+1}} \qquad (j = 1 , 2 , \ldots , n) .$$

On peut alors énoncer les deux lemmes suivants :

LEMME 2. - Si $x \in (0 , 1)$ est irrationnel, on a $r_{(i-1)n+j}(x) = r_i(T_n^j(x))$.

Démonstration évidente.

LEMME 3. - Soit $A \subset (0 , 1)$. On a alors l'inégalité

(10) $$n[\text{H-dim}(A)] \geqslant \text{H-dim}[T_n(A)] .$$

En fait, l'égalité a lieu, mais l'inégalité suffit pour la démonstration du théorème 2.

Démonstration. - Un cube binaire est un cube ouvert dans R^n , dont les 2^n sommets ont pour coordonnées

$$\frac{k_1 + \delta_1}{2^m} , \frac{k_2 + \delta_2}{2^m} , \ldots , \frac{k_n + \delta_n}{2^m}$$

où $\delta_i = 0$ ou 1 , et où k_i est un nombre entier fixé, $0 \leqslant k_i \leqslant 2^m - 1$. Un tel cube sera noté $W(k_1 , \ldots , k_n \mid m)$ ou, s'il n'y a aucune confusion possible, W . Pour $n = 1$, un cube binaire et un intervalle que l'on représente par I . Dans la définition de la dimension de Hausdorff, on remplace les ensembles A_i par des cubes binaires $W(k_1 , \ldots , k_n \mid m)$ et les diamètres par la longueur d'une arête du cube 2^{-m} . Le développement binaire du nombre rationnel $k_i\, 2^{-m}$ étant

$$\frac{k_i}{2^m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j^i}{2^j} \qquad \varepsilon_j^i = 0 \quad \text{ou} \quad 1 ,$$

au cube $W(k_1 , \ldots , k_n \mid m)$, on associe l'intervalle ouvert

$$I = \left] \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_j^i}{2^{(j-1)n+i}} , \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_j^i}{2^{(j-1)n+i}} + \frac{1}{2^{mn}} \right[.$$

On appelle s l'application $W \to I = s(W)$. La longueur $\ell(I)$ de l'intervalle I est 2^{-mn} . Désignons par $\{I^n\}$ l'ensemble de tous les intervalles binaires sur $(0 , 1)$ de longueur 2^{-Kn} , $(K = 0 , 1 , 2 , \ldots)$. L'application s est alors une bijection de l'ensemble des cubes binaires sur l'ensemble $\{I^n\}$. L'application réciproque s^{-1} est alors bien définie. Si $e(W)$ désigne la longueur de l'arête du cube W , on voit que l'on a :

(11) $$\ell(s(W)) = [e(W)]^n .$$

Montrons que l'inégalité (10) a lieu : on peut toujours supposer que l'ensemble A ne contient aucun points $p2^{-K}$, car, si A contenait de tels points, sa dimension de Hausdorff serait inchangé par leur suppression. Soient donnés deux nombres positifs arbitraires ε et δ. D'après le lemme 1 et la définition (8), il existe un recouvrement de l'ensemble A par des intervalles binaires I_i tel que

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} [\ell(I_i)]^{\delta+\text{H-dim}(A)} < \varepsilon .$$

On remplace le recouvrement $\bigcup_i I_i$ par un recouvrement $\bigcup_i I_i^n$ $(I_i^n \in \{I^n\})$ en remplaçant chaque intervalle I_i de longueur 2^{-p_i} par $2^{q_i-p_i}$ intervalles de longueur 2^{-q_i} où q_i est le plus petit entier supérieur ou égal à p_i et qui soit multiple de n. La réunion des cubes $s^{-1}(I_i^n)$ recouvre alors l'ensemble $T_n(A)$ et, d'après l'égalité (11) et l'inégalité (12) :

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} e(s^{-1}(I_i^n))^{n[\delta+\text{H-dim}(A)]} = \sum_{i=1}^{\infty} (\ell(I_i^n))^{\delta+\text{H-dim}(A)} < \varepsilon . 2^n .$$

L'inégalité (13) ayant lieu pour tout ε et δ positifs, on en déduit l'inégalité (10).

C. Q. F. D.

<u>Démonstration du théorème 2.</u> - V représente l'ensemble des nombres x de l'intervalle $(0 , 1)$, qui ne sont pas simplement normaux. Appelons B l'ensemble des nombres simplement normaux dans l'intervalle $(0 , 1)$. Soit K un entier positif arbitraire, supérieur à 1, et soit x_K un point fixé de l'ensemble V. On pose :

$$E = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{K-1} \times \{x_K\} .$$

Du théorème de Borel "presque tous les nombres sont simplement normaux", on déduit que $\text{H-dim}(E) = K - 1$. Considérons d'autre part l'ensemble $A = (T_K)^{-1} E$, c'est-à-dire $A = \{x \mid T_K(x) \in E\}$.

$$x \in A = (T_K)^{-1} E \implies \begin{cases} T_K^q(x) = x_q \in B & q = 1 , 2 , \dots , K-1 \\ T_K^K(x) = x_K \in V . \end{cases}$$

On a donc, si $x \in A$:

$$\frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{nK} r_i(x) = \frac{1}{K}\left[\sum_{q=1}^{K-1}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} r_{jK+q}(x) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{jK}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[\sum_{q=1}^{K-1}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} r_j(x_q) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_j(x_K)\right]$$

d'après le lemme 2. Quand n tend vers $+\infty$, le second membre de l'égalité précédente est équivalent à

$$\frac{1}{nK}\sum_{j=1}^{n} r_j(x_K)$$

qui, puisque $x_K \in V$, ne tend pas vers 0. Ainsi $x \in A \implies x \in V$ soit $A \subset V$.

L'égalité $T_K(A) = E$ et le lemme 3 montrent que

(14) $$K[\text{H-dim}(A)] \geqslant \text{H-dim}(E) = K - 1 .$$

L'inclusion $A \subset V$ implique que

(15) $$\text{H-dim}(V) \geqslant \text{H-dim}(A) ,$$

et la comparaison des inégalités (14) et (15) entraîne que

(16) $$\text{H-dim}(V) \geqslant \frac{K-1}{K} .$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout entier $K > 1$, on en conclut que $\text{H-dim}(V) \geqslant 1$. Mais $V \subset (0, 1)$, donc $\text{H-dim}(V) \leqslant 1$. Ceci démontre le théorème.

Ajoutons, pour terminer, que des résultats du même type ont été obtenus par divers auteurs. Entre autres :

<u>si</u> $N(x, i)$ <u>représente le nombre de</u> 0 <u>dans la suite</u> $[\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_i(x)]$, <u>alors l'ensemble des</u> $x \in (0, 1)$, <u>tels que</u> $\lim_{i\to\infty} \frac{N(x, i)}{i} = p$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$, a <u>une dimension de Hausdorff égale à</u> α <u>où</u>

$$2^{\alpha} = \frac{1}{p^p(1-p)^{1-p}} \qquad [2].$$

Ce résultat contient d'ailleurs le théorème de Beyer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEYER (Williams A.). - Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 35-46.

[2] EGGLESTON (H. G.). - The fractional dimension of a set defined by decimal properties, Quarterly J. of Math., Oxford Series, t. 20, 1949, p. 31-36.

[3] HAUSDORFF (Felix). - Dimension und äusseres Mass, Math. Annalen, t. 79, 1919, p. 157-179.

[4] HUREWICZ (W.) and WALLMAN (H.). - Dimension theory. - Princeton, Princeton University Press, 1948 (Princeton mathematical Series, 4).

[5] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[6] TITCHMARSCH (E. C.). - Theory of functions. Reprinted and corrected from the 2nd edition (1939). - Oxford, Oxford University Press, 1952.