

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARY DOLORÈS SCHROT

Pseudo-valuations sur les domaines de Dedekind

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, n° 2 (1966-1967),
exp. n° 10, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PSEUDO-VALUATIONS SUR LES DOMAINES DE DEDEKIND

par Mary Dolorès SCHROT

Introduction. - Il est bien connu qu'il existe, sur le corps \mathbb{Q} des rationnels, des classes topologiques $\tilde{\varphi}$, de valuations non archimédiennes φ , de sorte que chaque classe corresponde à un élément irréductible p de \mathbb{Z} , ou à un idéal premier P dans \mathbb{Z} :

$$\tilde{\varphi} \longleftrightarrow p \longleftrightarrow P = p\mathbb{Z} .$$

La complétion \mathbb{Q}_p de \mathbb{Q} par rapport à φ est encore un corps, et si S est un système quelconque de représentants de \mathbb{Z} modulo p , on peut exprimer \mathbb{Q}_p par la totalité des séries formelles dans p à coefficients dans S . A condition que $p \neq 2$, on peut choisir S , tel que les éléments de \mathbb{Q} correspondent aux séries dont la partie finale est périodique, et que les entiers relatifs s'écrivent comme les polynômes dans p à coefficients dans S . C'est à peu près pareil pour le corps $k(X)$ des quotients de l'anneau $k[X]$ de polynômes à une indéterminée, sur k , un corps fini.

Pour généraliser cette situation, on peut considérer un domaine moins spécial, ou bien une fonction φ définie d'une manière moins restrictive.

Définition. - Soient H un anneau, et $\varphi : H \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ telle que :

- 1° $\varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$;
- 2° $\forall 0 \neq \alpha \in H, \varphi(\alpha) > 0$;
- 3° $\varphi(\alpha\beta) \leq \varphi(\alpha) \varphi(\beta)$;
- 4° $\varphi(\alpha - \beta) \leq \max\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$.

On appelle une telle fonction une pseudo-valuation non-archimédienne ou, simplement, une pseudo-valuation. On exclut aussi, dans la suite, le cas trivial où $\varphi(\alpha) \geq 1, \forall 0 \neq \alpha \in H$.

En cherchant une généralisation de la situation de tout-à-l'heure, il est naturel d'exiger un domaine de Dedekind. En exigeant davantage, on trouvera une généralisation utilisable uniquement quand H est un corps global.

Considérons un domaine de Dedekind J , et son corps de quotients F . Soit φ une pseudo-valuation définie sur F et bornée sur J . Soit

$$\delta = \sup\{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in J\} .$$

Pour chaque ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, soit

$$G_\varepsilon = \{\alpha \in J \mid \omega(\alpha) < \varepsilon\},$$

et soit B_ε l'idéal engendré par G_ε dans J .

THÉOREME 1. - Chaque telle ω détermine un ensemble fini $\mathcal{P}_\omega = \{P_1, P_2, \dots, P_\ell\}$ d'idéaux premiers de J , tel que

$$B_\varepsilon = P_1^{a_1(\varepsilon)} P_2^{a_2(\varepsilon)} \dots P_\ell^{a_\ell(\varepsilon)}, \quad \text{où } a_i(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_i(\varepsilon) = +\infty, \quad 1 \leq i \leq \ell.$$

Ceci exige d'abord un lemme.

LEMME. - Quel que soit ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, il existe $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_+$ tel que

$$B_1^t \subseteq G_\varepsilon.$$

Il existe $G' = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\} \subset G$, tel que B_1 est engendré par G' .
Soit

$$\varepsilon_1 = \max\{\omega(\gamma_i) \mid 1 \leq i \leq s\}.$$

Alors, $\beta \in B_1$ implique $\omega(\beta) \leq \varepsilon_1$. Soit $\delta < \varepsilon$, de sorte que $B_1 \neq J$. Il suffit de choisir t tel que $\varepsilon_1^t \delta < \varepsilon$, car chaque élément de B_1^t s'écrit comme une somme des produits $\alpha \gamma_1^j \dots \gamma_t^j$, $\alpha \in J$, $\gamma_j^j \in G'$, $1 \leq j \leq t$.

Soit \mathcal{P}_ω l'ensemble des idéaux premiers qui divisent B_1 , c'est-à-dire

$$B_1 = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_\ell^{a_\ell}, \quad a_i \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } P_i \in \mathcal{P}_\omega, \quad 1 \leq i \leq \ell.$$

Alors, $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$B_1^{t(\varepsilon)} \subseteq G_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon \subseteq B_1,$$

de sorte que

$$B_\varepsilon = P_1^{a_1(\varepsilon)} P_2^{a_2(\varepsilon)} \dots P_\ell^{a_\ell(\varepsilon)},$$

et $\varepsilon_0 < \varepsilon$ implique $a_i(\varepsilon_0) \geq a_i(\varepsilon)$.

Supposons qu'il existe ε' tel que $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$,

$$a_1(\varepsilon) = a_1(\varepsilon').$$

Alors $B_\varepsilon = B_{\varepsilon'}$, C_ε , tandis que $P_1 \nmid C_\varepsilon$. On peut fixer un β quelconque dans $B_{\varepsilon'}$,

et choisir $\varepsilon < \varepsilon'$ tel que $0 < \varepsilon \cdot \delta \cdot \omega(1/\beta) < 1$. Puis, en choisissant $\alpha \in C_\varepsilon$ tel que $P_1 \nmid \alpha J$, on trouvera une contradiction :

$$1 \leq \omega(\alpha) = \omega((\alpha\beta)/\beta) \leq \omega(\alpha\beta) \omega(1/\beta) \leq \varepsilon \delta \omega(1/\beta) < 1 .$$

Donc $\omega \rightarrow \wp$.

On observe maintenant, \wp étant fixé, que, pour chaque $\xi \in F^*$, il existe une seule factorisation de ξJ de la forme

$$(P_1^{d_1} P_2^{d_2} \dots P_\ell^{d_\ell} A)/D$$

où $d_i \in \mathbb{Z}$ et $(A, D) = (A, P_i) = (D, P_i) = J$, $1 \leq i \leq \ell$.

THÉOREME 2. - Soit $\wp = \{P_1, P_2, \dots, P_\ell\}$. Il existe ω sur F , bornée sur J , telle que $\wp_\omega = \wp$.

On peut choisir $0 < c_i < 1$, $1 \leq i \leq \ell$, et définir

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(\xi) = \max\{c_i^{d_i} \mid 1 \leq i \leq \ell\} .$$

Il est facile de vérifier que ω est une pseudo-valuation.

Donc on peut dire que chaque ω détermine un ensemble \wp , et que chaque \wp détermine au moins une pseudo-valuation ω :

$$\omega \rightarrow \wp \rightarrow \omega' .$$

Dans un tel cas, il est visible que $\omega \sim \omega'$ sur J .

Pour un \wp donné, soit

$$\mathfrak{M} = \{\mu \in J \mid P \in \wp \implies P \nmid \mu J\} .$$

Quel que soit $C \subseteq J$, on peut définir

$$C_{\mathfrak{M}} = \{\alpha/\mu \mid \alpha \in C, \mu \in \mathfrak{M}\} .$$

Evidemment, $J_{\mathfrak{M}} = \{\xi \in F \mid \xi J = (P_1^{d_1} P_2^{d_2} \dots P_\ell^{d_\ell} A)/D, d_i \geq 0\}$.

THÉOREME 3. - Soient \wp donné, et ω telle que $\wp_\omega = \wp$. Soit

$$\delta = \sup\{\omega(\alpha) \mid \alpha \in J\} .$$

Alors,

$$\{\alpha \in F \mid \omega(\alpha) \leq 1\} \subseteq J_{\mathfrak{M}} \subseteq \{\alpha \in F \mid \omega(\alpha) \leq \delta\} .$$

Soit $\alpha \in F$, $\varphi(\alpha) \leq 1$, tandis que

$$\alpha J = (P_1^{d_1} P_2^{d_2} \dots P_\ell^{d_\ell} A) / D ,$$

où il existe $j \geq 1$ tel que $d_i < 0$, $1 \leq i \leq j$, $d_i \geq 0$, $j+1 \leq i \leq \ell$. Soit $c_i = -d_i \geq 1$, $1 \leq i \leq j$. D'après le lemme, il existe $t = t(1)$ tel que $B_1^t \subseteq G_1$,

où $B_1 = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_\ell^{a_\ell}$. De plus, il existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tel que $sc_i \geq a_i t$, $1 \leq i \leq j$. Donc,

$$\alpha^s D^s \prod_{i=1}^j P_1^{sc_i - a_i t} B_1^t = A^s \prod_{i=j+1}^{\ell} P_i^{sd_i + a_i t} ,$$

de sorte que

$$\alpha^s C B_1^t = H , \quad \text{où } P_i \nmid H , \quad 1 \leq i \leq j .$$

Soit $\lambda \in H$, $P_i \nmid \lambda$, $1 \leq i \leq j$, de sorte que $\varphi(\lambda) \geq 1$. On a $\lambda/\alpha^s \in B_1^t$, de sorte que $\varphi(\lambda/\alpha^s) < 1$, donc

$$1 \leq \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda/\alpha^s \cdot \alpha^s) \leq \varphi(\lambda/\alpha^s) < 1 ,$$

ce qui est une contradiction.

Quel que soit $\xi \in J_{\mathbb{M}}$, il existe $\zeta \in J$ et $\mu \in \mathbb{M}$ tels que $\xi = \zeta/\mu$. De plus, il existe $\alpha \in J$ tel que $\alpha\mu - 1 = \beta \in B_1^t$. Donc,

$$\xi = \alpha\zeta - \beta\xi \quad \text{et} \quad \varphi(\xi) = \varphi(\alpha\zeta) \leq \delta .$$

THÉOREME 4. - $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_{\varphi'}$, si, et seulement si, $\varphi \sim \varphi'$ sur F .

Soient φ et φ' deux pseudo-valuations telles que $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_{\varphi'}$; et soit $\{\xi_s\} \subset F$ une suite telle que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(\xi_s) = 0 .$$

Il existe alors $s_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall s \geq s_0$, $\xi_s \in J_{\mathbb{M}}$, de sorte qu'il existe $\alpha_s \in J$ et $\mu_s \in \mathbb{M}$ tels que $\xi_s = \alpha_s/\mu_s$. Alors,

$$\varphi(\alpha_s) = \varphi(\xi_s \mu_s) \leq \delta \varphi(\xi_s) ,$$

d'où

$$\varphi(\alpha_s) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(\alpha_s) \rightarrow 0 ,$$

car $\varphi \sim \varphi'$ sur J . Mais,

$$\varphi'(\xi_s) = \varphi'(\alpha_s/\mu_s) \leq \delta' \varphi'(\alpha_s) ,$$

de sorte que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \omega'(\xi_s) = 0 .$$

Alors, $\tilde{\omega} \longleftrightarrow \rho$.

Soit γ un élément quelconque de J tel que $\gamma J \neq J$. Soit

$$\rho_\gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_\ell\}$$

l'ensemble des idéaux premiers qui divisent γJ , c'est-à-dire,

$$\gamma J = P_1^{b_1} P_2^{b_2} \dots P_\ell^{b_\ell} , \quad b_i \in \mathbb{Z}_+ , \quad 1 \leq i \leq \ell .$$

Quel que soit $\xi \in \mathbb{F}^*$, il existe une seule expression

$$\xi J = (\gamma^k C)/D$$

telle que $(\gamma J, D) = (C, D) = J$ et $\gamma J \nmid C$. Si $0 < c < 1$, on peut définir $\omega(0) = 0$, $\omega(\xi) = c^k$, et vérifier que ω est une pseudo-valuation. Ainsi, on a obtenu le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soit γ donné, il existe ω , discrète sur \mathbb{F} et bornée sur J , telle que $\rho_\omega = \rho_\gamma$. On peut définir ω de sorte que

$$\{\alpha \in \mathbb{F} \mid \omega(\alpha) \leq \omega(\gamma)^j\} = \{\alpha \in \mathbb{F} \mid \omega(\alpha) < \omega(\gamma)^{j-1}\} = \gamma^j J_{\mathbb{M}} .$$

Donc $\tilde{\omega} \longleftrightarrow \rho \longleftarrow \gamma$.

Maintenant, on exige de plus que J soit un domaine où $[J : C] < \infty$ quel que soit l'idéal $(0) \neq C \subseteq J$.

THÉORÈME 6. - Soit $\gamma \in J$ un élément tel que $\gamma J \neq J$. Soit

$$S = \{0 = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\omega-1}\} \simeq J/\gamma J$$

un système de représentants, où $\omega = [J : \gamma J]$. Alors, à chaque élément $\xi \in \mathbb{F}^*$, correspond un, et un seul, entier relatif j_0 et une suite $\{0 \neq \beta_{j_0}, \beta_{j_0+1}, \dots\}$ d'éléments de S , de sorte que, pour toute ω telle que $\rho_\omega = \rho_\gamma$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\xi - \sum_{j=j_0}^t \beta_j \gamma^j) = 0 .$$

Soit ξ donné. Il existe j_0 tel que

$$\xi J = (\gamma^{j_0} C)/D \quad \text{où} \quad (\gamma J, D) = (C, D) = J \quad \text{et} \quad \gamma J \nmid C .$$

Alors, il suffit de donner la justification pour le cas où $\xi \in J_{\mathfrak{M}}$ et $\xi \notin B_{\mathfrak{M}}$ avec $B = \gamma J$. On peut trouver $\beta_0 \in S$ tel que

$$\xi \equiv \beta_0 \pmod{B_{\mathfrak{M}}},$$

où $(\xi - \beta_0)/\gamma = \xi_1 \in J_{\mathfrak{M}}$, car $J_{\mathfrak{M}}/B_{\mathfrak{M}} \simeq J/B$, et S est un système de représentants des deux. On peut donc déterminer $\beta_1, \xi_2, \beta_2, \dots$ de sorte que, pour chaque $t \in \mathbb{Z}_+$,

$$\xi = \sum_{j=0}^t \beta_j \gamma^j + \xi_{t+1} \gamma^{t+1}.$$

Alors, si φ est définie comme dans le théorème 5,

$$\varphi\left(\xi - \sum_{j=0}^t \beta_j \gamma^j\right) = \varphi(\xi_{t+1} \gamma^{t+1}) \leq \varphi(\gamma)^{t+1}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

On peut écrire également,

$$\xi = \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j.$$

THÉORÈME 7. - Soit \mathfrak{K} l'anneau de toutes les séries formelles

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j, \quad \beta_{j_0} \neq 0, \quad \beta_j \in S, \quad j \geq j_0 \dots$$

Soit φ une pseudo-valuation telle que $\mathfrak{P}_{\varphi} = \mathfrak{P}_{\gamma}$. Alors, \mathfrak{K} est la complétion F_{φ} de F par rapport à φ .

Il suffit de vérifier que \mathfrak{K} est la complétion par rapport à une telle φ . On peut choisir $0 < c < 1$, et définir

$$\varphi\left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j\right) = c^{j_0}.$$

Si $\xi \in F$ et $\xi = \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j = \gamma^{j_0} \xi'$, alors $\xi' \in J_{\mathfrak{M}}$ et $\xi J = (\gamma^{j_0} C)/D$, où

$(C, D) = (D, \gamma J) = J$ et $\gamma J \nmid C$. Il est visible que φ est une pseudo-valuation et que, sur F , φ est la même que dans le théorème 5.

Soit

$$A = \left\{ \sum_{j=j_0}^{j_1} \beta_j \gamma^j \mid \beta_j \in S, \quad j_0 \in \mathbb{Z}, \quad j_1 \in \mathbb{Z}, \quad j_1 \geq j_0 \right\}.$$

Evidemment, $A \subseteq F$. Soit $\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j$ un élément quelconque de \mathcal{K} . Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $j_1 \geq j_0$ tel que $c^{j_1} \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\varphi\left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j - \sum_{j=j_0}^{j_1} \beta_j \gamma^j\right) = \varphi\left(\sum_{j=j_1+1}^{\infty} \beta_j \gamma^j\right) < c^{j_1} \leq \varepsilon.$$

Alors A (et a fortiori F) est φ -dense dans \mathcal{K} .

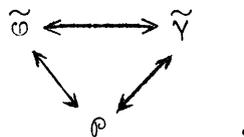
Soit $\{\xi_s\}$ une suite de Cauchy dans \mathcal{K} ; $\xi_s = \sum_{j=j(s)}^{\infty} \beta_j^{(s)} \gamma^j$. Nous cherchons un élément $\xi = \sum_{j=j_0}^{\infty} \beta_j \gamma^j$ tel que $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(\xi_s - \xi) = 0$. En éliminant éventuellement un nombre fini d'éléments ξ_s , on peut supposer que $\varphi(\xi_s - \xi_t) < 1$, pour tous s, t , et définir $\beta_j = \beta_j^{(1)}$, $j(1) \leq j < \infty$. Pour chaque $k \geq 1$, il existe $s(k)$ tel que $s, t \geq s(k)$ implique $\varphi(\xi_s - \xi_t) < c^k$. On peut alors définir $\beta_k = \beta_k^{s(k)}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, si $c^k < \varepsilon$ et $s \geq s(k)$,

$$\varphi(\xi_s - \xi) < \varepsilon.$$

En somme on peut constater :

Soit J un domaine de Dedekind où, quel que soit l'idéal $(0) \neq C \subseteq J$, $[J:C] < \infty$ et C^a est un idéal principal pour quelque $a \in \mathbb{Z}_+$. Soit F le corps des quotients de J . Il existe donc des correspondances bijectives entre :

- 1° Les classes $\tilde{\omega}$ de pseudo-valuations définies sur F et bornées sur J ,
- 2° Les classes $\tilde{\gamma}$ d'éléments de J , dont les diviseurs sont les mêmes,
- 3° Les ensembles finis ρ d'idéaux premiers de J .



Il est toujours possible de représenter la complétion F_{φ} de F par rapport à φ par un anneau \mathcal{K} de séries formelles.

Nous verrons, dans une seconde conférence, que nos conditions sont remplies exactement, quand F est un corps global, et nous y trouverons une manière de caractériser les parties de \mathcal{K} correspondant à J et à F .