Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jacques Lesca

Équirépartition dans un anneau d'Adèles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 2 (1966-1967), exp. nº 15, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 15

13 mars 1967

EQUIRÉPARTITION DANS UN ANNEAU D'ADÈLES

par Jacques LESCA

Introduction. Sommaire.

Dans le § 1, nous rappelons la définition de l'équirépartition d'une suite dans le tore T .

Dans le § 2, après avoir défini un anneau d'adèles A , nous définissons l'équirépartition d'une suite d'adèles modulo $\mathcal{O}$, le sous-anneau des adèles entiers.

Dans le § 3, nous examinons la répartition modulo $\mathcal{O}$ des suites : $n \to na$ de points de A .

Dans le § 4, nous étudions la répartition modulo $\mathcal{O}$ des suites : $n \to \lambda a^n$ de points de A .

Dans ce dernier paragraphe, sera esquissée la démonstration d'un résultat qui généralise le résultat suivant dû à J. F. KOKSMA [5] : Pour tout λ réel et pour presque tout x réel, de valeur absolue supérieure à 1 , la suite $n \to \lambda x^n$ est équirépartie modulo 1 .

1. Rappel de définitions classiques de l'équirépartition.

(a) Equirépartition dans le tore $T = R/Z$. - On dit qu'une suite $u : n \to u_n$ est équirépartie dans T si, pour tout intervalle I de T ,

$$\lim_{n\to\infty} \{\Pi(I , n)/n\} = \mu(I) \tag{1}$$

(où $\Pi(I , n)$ désigne le nombre de points de la suite appartenant à I parmi les n premiers points de la suite, et $\mu(I)$ la mesure de I).

On a le critère d'équirépartition de la suite u dû à H. WEYL : " u est équirépartie si, et seulement si, pour tout $h \in Z$, $h \neq 0$:

$$\lim_{N\to\infty} \{ \sum_{n=1}^{N} (\exp 2\pi i\, hu_n)/N\} = 0 \quad . \tag{2}$$

(b) Equirépartition d'une suite dans un groupe topologique abélien compact G (voir [4]). - Désignons par $\Gamma = \Gamma(G)$ le groupe des homomorphismes continus de G dans $T = R/Z$ (lié de façon évidente au groupe des caractères continus de G)

(abréviation H. C.).

On dit qu'une suite u de points de G est équirépartie dans G si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 0$:

$$\lim_{N\to\infty} \{ \sum_{n=1}^{N} (\exp 2\pi i\ \gamma(u_n))/N \} = 0 \quad . \tag{3}$$

2. Définition de l'équirépartition dans un anneau d'adèles.

(a) Anneau d'adèles. - Soient k un corps de nombres algébriques, Ω l'ensemble de ses valuations, pour tout $p \in \Omega$, k_p désigne le complété de k pour la valuation p (la norme étant notée $|\ |_p$).

Pour S une partie de Ω contenant l'ensemble des valuations archimédiennes Ω_∞ , on définit l'anneau d'adèles $A = A_S$: A est le sous-anneau de l'anneau produit : $\prod_{p\in S} \{k_p\}$ défini par :

$$A = \{a = (a_p) \ ; \ \text{pour presque tout} \ \ p \in S \ , \ \ |a_p|_p \leqslant 1\} \quad .$$

Pour un idèle i de A , c'est-à-dire un adèle inversible, on définit

$$V(i) = \{a \in A \ ; \ \ \forall\ p \in S \ , \ \ |a_p|_p \leqslant |i_p|_p\} \quad .$$

Les $V(i)$ définissent un système fondamental de voisinages de 0 , pour une topologie qui munit A d'une structure d'anneau topologique localement compact.

Le groupe des H. C. de A . - A est auto-dual, c'est-à-dire qu'il existe un H.C. γ_0 tel que l'application :

$$a \to (x \to \gamma_0(ax))$$

définit un homéomorphisme de A dans le groupe de ses H. C. : $\Gamma = \Gamma(A)$.

Le sous-anneau $\mathcal{O}$ des entiers de A . - Définissons $\mathcal{O}$ par :

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_S = \{a \in A : \ \ a \in k \ ; \ \ \forall\ p \in \Omega - S \ , \ \ |a|_p \leqslant 1\} \quad (^1) \ .$$

$\mathcal{O}$ est un sous-anneau discret de A , et le groupe quotient $A/\mathcal{O}$ est compact. Son annulateur :

$$\mathcal{O}^* = \{\gamma \in \Gamma \ ; \ \ \forall\ x \in \mathcal{O} \ , \ \ \gamma(x) = 0\}$$

possède les mêmes propriétés. En outre, pour un choix convenable de γ_0 , $\mathcal{O}^*$ peut

---

[1] k étant identifié à son image dans l'injection canonique dans A .

être identifié (2) à un sous-anneau de k ; il est dénombrable.

(b) Définition de l'équirépartition modulo Θ. – La définition de l'équirépartition d'une suite u dans le groupe compact A/Θ se définit comme dans le § 1 (b).

Nous dirons qu'une suite u de points de A est équirépartie modulo Θ, si la suite $n \to \varphi(u_n)$ (φ désignant l'application canonique de A dans A/Θ) est équirépartie dans A/Θ.

Le groupe Θ étant un sous-groupe fermé de A, l'ensemble des H. C. de A/Θ peut être identifié à l'ensemble des H. C. de Θ^*, et on obtient naturellement le critère d'équirépartition.

PROPOSITION 1. – Une suite $u : n \to u_n$ de points de A est équirépartie modulo Θ si, et seulement si, pour tout H. C. γ de Θ^*, $\gamma \neq \theta$:

$$\lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (\exp 2\pi i\, \gamma(u_n))/N \right\} = 0 \quad . \tag{3}$$

Remarque 1. – On peut donner de l'équirépartition dans A/Θ une définition analogue à celle du § 1 (a). En effet, en utilisant, par exemple, un domaine fondamental, on peut définir des "pavages" qui permettent des partitions de A/Θ avec les "pavés arbitrairement petits". On déduit de là une mesure de Riemann et les caractérisations suivantes d'une suite équirépartie u :

(1) Pour tout pavé P,

$$\lim_{n\to\infty} \{\Pi(P\ ,\ n)/N\} = \mu(P) \quad ;$$

(2) Pour tout sous-ensemble X mesurable au sens de Riemann,

$$\lim_{n\to\infty} \{\Pi(X\ ,\ n)/n\} = \mu(A)$$

(où $\Pi(X\ ,\ n)$ est le nombre de points de la suite u appartenant à X parmi les n premiers points de la suite).

Remarque 2. – Mme Françoise BERTRANDIAS [1] et D. CANTOR [2] ont défini différemment l'équirépartition dans un ensemble d'adèles. Ce dernier, par exemple, en utilisant le "filtre des sections à droite" correspondant à une famille de parties finies de Θ, définit l'équirépartition modulo Θ pour les fonctions de Θ dans A.

---

(2) A et $\Gamma(A)$ étant identifiés par l'homéomorphisme décrit ci-dessus.

3. Quelques résultats généraux.

(a) Equirépartition modulo $\mathcal{O}$ des suites $n \to na$.

PROPOSITION 2. - Pour $a \in A$, les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) La suite $n \to na$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$;

(2) Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, la suite $n \to n\gamma(a)$ est équirépartie dans T ;

(3) Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, $\gamma(a)$ est irrationnel (image canonique d'un irrationnel de R dans R/Z) ;

(4) Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, $\gamma(a) \neq 0$;

(5) L'ensemble des classes $\{\omega(ua) : u \in \underset{\sim}{Z}\}$ des éléments (ua) est partout dense dans $A/\mathcal{O}$.

L'identification des cinq propriétés précédentes peut être faite dans le cadre plus général de l'équirépartition dans un groupe compact G , lorsque le groupe $\Gamma(G)$ est sans torsion. Elle est facile. L'identification des propriétés (4) et (5), par exemple, est la traduction du résultat d'analyse harmonique suivant : "L'annulateur d'un sous-groupe H d'un groupe abélien localement compact G est réduit à l'élément 0 , si, et seulement si, la fermeture de H dans G est G ".

Les propriétés (3) ou (4) permettent de déterminer les $a \in A$ tels que la suite $n \to na$ soit équirépartie modulo $\mathcal{O}$. C'est ainsi que si $k = Q$, quel que soit S , on obtient la condition nécessaire et suffisante d'équirépartition suivante : "La composante infinie de A est un irrationnel".

Plus généralement, soient $A_\infty = A_{\Omega_\infty}$, l'anneau d'adèles construit à partir des seules valuations archimédiennes, et $E = \mathcal{O}_\infty$ le sous-anneau des entiers de A (entiers de k au sens habituel). Le groupe additif A_∞^+ est isomorphe à R^n , et la trace définie dans k permet de définir naturellement une forme bilinéaire non dégénérée dans A (notée Tr), en outre E est un réseau, au sens habituel de $A_\infty^+ = R^n$. Si $a \in A_S$, désignons par a_∞ l'élément de A dont la composante pour chaque $p \in \Omega_\infty$ est la composante correspondante de a .

PROPOSITION 3. - Pour $a \in A_S$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) $n \to na$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}_S$;

(2) Pour tout $e \in E$: $tr(ea_\infty) \neq 0$ (est irrationnel) ;

(3) La suite $n \to na_\infty$ est équirépartie dans A_∞ modulo le réseau E .

(b) Equirépartition des polynômes.

PROPOSITION 4. - Si une suite (u_n) est telle que, pour tout $h \in N$, $h \neq 0$, la suite $n \to u_{n+h} - u_n$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$, alors la suite $n \to u_n$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$.

COROLLAIRE. - Si le polynôme $f(n) = a_r n^r + \ldots + a_0$ est tel que l'une des suites $n \to na_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$, alors la suite $n \to f(n)$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$.

4. Répartition de la suite $n \to \lambda x^n$.

Soit

$$M = \{a \in A ; \ \forall p \in S, \ |a_p|_p \leqslant 1\} .$$

Si $x \in M$, une suite $n \to \lambda x^n$ ne peut être équirépartie modulo $\mathcal{O}$. On peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - Pour tout $\lambda \in A$, tel que pour tout $p \in S$, $\lambda_p \neq 0$, et pour presque tout $x \in A - M$, la suite $n \to \lambda x^n$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$.

Esquissons une démonstration. Dans une première partie, on se ramène à une démonstration concernant une seule composante (voir (d) ci-dessous), et dans la seconde partie, on fait la démonstration pour chaque composante possible.

Première partie de la démonstration.

1° En utilisant le fait que $\mathcal{O}^*$ est dénombrable, on est ramené à démontrer :

(a) Soit $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, alors, pour presque tout $x \in A - M$:

$$\lim_{N \to \infty} \{ \sum_{n=1}^{N} (\exp 2\pi i \ \gamma(\lambda x^n))/N \} = 0 . \tag{3}$$

2° On détermine une famille $\mathcal{D} = \{D\}$ de parties de A convenablement définies, incluses dans $A - M$, et dont une union dénombrable remplit $A - M$. On se ramène à la démonstration suivante :

(b) Soient $D \in \mathcal{D}$ et $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$, alors pour presque tout $x \in D$, (3) est vérifiée.

3° Si nous utilisons un calcul et une méthode (très ingénieuse) dus à KOKSMA [5], la démonstration de (b) se ramène à :

(c) <u>Pour</u> $D \in \mathcal{D}$ <u>et</u> $\gamma \in \mathcal{O}^*$, $\gamma \neq 0$:

$$(1/N^2) \sum_{1 \leq n < m \leq N} \left|\int_D \exp 2\pi i \;\Phi_{m,n}(x)\; dx\right| = O(\log N/N) \quad ,$$

<u>où</u> $\Phi_{m,n}(x) = \lambda(x^m - x^n)$.

4° Enfin, en utilisant le fait que $D = \prod_{p \in S} (D_p)$ est un ensemble produit, que pour une composante q , D_q ne rencontre pas le disque unité, que tout H.C. $\neq 0$ de $\mathcal{O}^*$ est la somme de H. C. non nuls définis dans chaque composante, on est ramené à démontrer :

(d) <u>Soient</u> $q \in S$, D_q <u>un sous-ensemble convenable de</u> k_q , $\gamma_q \in \Gamma(k_q)$, $\gamma_q \neq 0$. <u>Alors</u> :

$$(1/N^2) \sum_{1 \leq n < m < N} \left|\int_{D_q} \exp 2\pi i \;\gamma_q(\Phi_{m,n}(x_q)\; dx_q)\right| = O(\log N/N) \quad .$$

<u>Deuxième partie de la démonstration</u>. - On est ramené à la majoration de

$$I(m\ ,\ n) = \left|\int_D \exp 2\pi i \;\Phi_{m,n}(x)\; dx\right|$$

dans les trois cas : $k_q = R$, $k_q = \underset{\sim}{C}$, k_q est non archimédien.

Dans le cas réel, la majoration de Koksma convient.

Dans le cas non archimédien, il suffit d'adapter certaines démonstrations dues à Françoise BERTRANDIAS [1].

Dans le cas complexe, l'adaptation (difficile) des méthodes utilisées dans le cas réel a été faite par J.-P. BERTRANDIAS.

<u>Remarque</u> 1. - Le résultat précédent est complètement différent de la généralisation du théorème de Koksma donnée par Françoise BERTRANDIAS dans [1].

<u>Remarque</u> 2. - Par des procédés analogues aux précédents, on peut démontrer : "Pour tout $a \in A - M$ et pour presque tout $\lambda \in A$, la suite $n \to \lambda a^n$ est équirépartie modulo $\mathcal{O}$ ". (Il est d'ailleurs possible d'avoir un énoncé général qui engloberait les deux résultats.)

<u>Remarque</u> 3. - On ne connaît pas d'élément a pour lequel la suite $n \to na$ soit équirépartie modulo $\mathcal{O}$. Par contre, en transformant légèrement les S-nombres de Françoise BERTRANDIAS [1], on obtient des éléments de $A - M$ pour lesquels la suite a^n tend vers 0 modulo $\mathcal{O}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, 1965, Mémoire n° 4, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris 1965).

[2] CANTOR (D.). - The elementary theory of diophantine approximation over the ring of adeles, Illinois J. Math., t. 9, 1965, p. 677-700.

[3] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 3e année, 1961/62, n° 7, 35 p.

[4] EYMARD (Pierre). - Suites équiréparties dans un groupe compact, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 14e année, 1960/61, n° 3, 11 p.

[5] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compos. Math., Groningen, t. 2, 1935, p. 250-258.