

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

BENALI BENZAGHOU

## Suites d'unités algébriques vérifiant une relation de récurrence linéaire

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 10, n° 2 (1968-1969),  
exp. n° 15, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1968-1969\\_\\_10\\_2\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_2_A2_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUITES D'UNITÉS ALGÈBRIQUES VÉRIFIANT  
 UNE RELATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRE

par Benali BENZAGHOU

Soit  $K$  un corps commutatif ;  $\mathcal{R}(K)$  ([1]) est l'algèbre des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ ,  $a_n \in K$ , telles que les  $a_n$  vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, les opérations étant définies par

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n X^n \quad (\text{produit de Hadamard}) ,$$

$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$  est l'élément unité.

Soit  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$ ,  $a \neq 0$ , il existe une relation

$$a_{n+h} = q_1 a_{n+h-1} + \dots + q_h a_n , \quad \forall n \geq 0 ,$$

$h$  étant minimum.  $\alpha$  représente une fraction rationnelle  $\frac{P(X)}{Q(X)} \in K(X)$ , où  $Q(X) = 1 - q_1 X - \dots - q_h X^h$ ,  $\deg P < h$ .

A tout homomorphisme  $\varphi$  de corps commutatifs  $K \rightarrow K'$ , nous associons l'homomorphisme de  $\mathcal{R}(K)$  dans  $\mathcal{R}(K')$  défini par

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a_n) X^n .$$

Si  $E$  est une partie de  $K$ , nous définissons

$$\mathcal{R}(E, K) = \left\{ \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(K) ; a_n \in E, \forall n \geq 0 \right\} .$$

THÉORÈME 1. - Soit  $k$  un corps de nombres algébriques (extension de degré fini de  $\mathbb{Q}$ ). Soit  $\mathcal{A}$  l'anneau des entiers de  $k$ . Alors  $\mathcal{R}(k)$  (resp.  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, k)$ ) est une  $\mathcal{R}(\mathbb{Q})$ -algèbre (resp.  $\mathcal{R}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ -algèbre) entière, libre de type fini, de rang  $d = [k : \mathbb{Q}]$ .

Soit  $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$  une base de  $k$  sur  $\mathbb{Q}$ ; soit  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k)$ . Posons :

$$a_n = \lambda_{n,1} \omega_1 + \dots + \lambda_{n,d} \omega_d, \quad \lambda_{n,j} \in \mathbb{Q}.$$

Soit  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$  les  $\mathbb{Q}$ -homomorphismes injectifs de  $k$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Pour  $\sigma \in G$ ,  $\sigma\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}})$ . Par ailleurs,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 a_n \\ \vdots \\ \sigma_d a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \omega_1 & \sigma_1 \omega_d \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_d \omega_1 & \sigma_d \omega_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{n,1} \\ \vdots \\ \lambda_{n,d} \end{pmatrix},$$

et comme  $\Delta = \det(\sigma_i \omega_j) \neq 0$ ,

$$\lambda_{n,j} = \sum_{i=1}^d \omega_i \sigma_i(a_n) \cdot \Delta^{-1}.$$

Il en résulte que

$$\Lambda_j = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n,j} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}).$$

Comme  $\mathcal{R}(\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}) = \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ ,  $\Lambda_j \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$  et

$$\alpha = \Lambda_1 \omega_1 + \dots + \Lambda_d \omega_d.$$

Pour  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, k)$ , il suffit de prendre pour les  $(\omega_i)$  une base d'entiers,  $\{\frac{\omega_i}{\Delta}\}$  est alors une base de  $\mathcal{R}(\mathcal{A}, k)$  sur  $\mathcal{R}(\mathcal{Z}, \mathbb{Q})$ .

A chaque  $a_n$ , associons le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de  $k$  défini par  $x \mapsto a_n x$ :

$$P_n(Y) = Y^d + \alpha_{n,1} Y^{d-1} + \dots + \alpha_{n,d} \in \mathbb{Q}[X].$$

Alors

$$\alpha_j = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,j} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}),$$

et

$$P(Y) = Y^d + \alpha_1 Y^{d-1} + \dots + \alpha_d \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})[Y],$$

avec  $P(\alpha) = 0$ .

PROPOSITION. - Soient  $k$  une extension galoisienne de degré fini de  $\mathbb{Q}$ ,  $G$  son groupe de Galois, soient  $k = \mathbb{Q}(\theta)$ , et  $F(X)$  le polynôme irréductible sur  $\mathbb{Q}$  de  $\theta$ . Soit  $\Lambda = \{\tau \in \mathcal{R}(k), F(\tau) = 0\}$ .

Soit  $\alpha \in \mathcal{R}(k)$  :

$$\alpha = \Lambda_1 + \Lambda_2 \theta + \dots + \Lambda_{d-1} \theta^{d-1}, \quad \Lambda_j \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}) .$$

Pour  $\Gamma \in \Lambda$ ,

$$\beta = \Lambda_1 + \Lambda_2 \Gamma + \dots + \Lambda_{d-1} \Gamma^{d-1}$$

a même polynôme caractéristique que  $\alpha$ .

Notons que  $\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X^n \in \mathcal{R}(k) \iff \gamma_n = \sigma_n(\theta)$ , où

$$\sigma_n \in G \quad \text{et} \quad (\sigma_n) \text{ périodique} .$$

Remarque. - Soit  $\beta \in \mathcal{R}(k)$ , ayant même polynôme caractéristique que  $\alpha$ . Alors  $b_n = \sigma_n(a_n)$ ,  $\sigma_n \in G$ , et il existe  $m \geq 1$  tel que

$$\sigma_{\mu+tm}(a_{\mu+tm}) = \sigma_{\mu}(a_{\mu+tm}), \quad \text{pour } \mu = 0, 1, \dots, m-1, t \in \mathbb{N} .$$

En effet, soit  $I_{\sigma} = \{n; \sigma_n(a_n) = \sigma(a_n)\} = \{n; b_n - \sigma(a_n) = 0\}$ . Par un théorème de Mahler ([3]), lorsque  $I_{\sigma}$  est infini,  $\sum_{n \in I_{\sigma}} X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{Q})$ .

PROPOSITION. - Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique zéro, algébrique-  
ment clos. Soit  $\mathcal{S}_0(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n; a_n \in K, (a_n) \text{ périodique} \right\}$ . Alors la fer-  
meture intégrale de  $K$  dans  $\mathcal{R}(K)$  est  $\mathcal{S}_0(K)$ , et  $\mathcal{S}_0(K)$  est intégralement fermée  
dans  $\mathcal{R}(K)$ .

THÉOREME 2. - Soient  $k$  un corps de nombres algébriques,  $\mathcal{U}$  son anneau d'en-  
tiers,  $\mathcal{U}$  son groupe d'unités ; alors  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$  est le groupe d'unités de  $\mathcal{R}(\mathcal{U}, k)$ ,  
et

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, k) \simeq \mathcal{S}'_0 \times \mathcal{S}_1^r ,$$

où  $\mathcal{S}'_0$  est un groupe commutatif dont tous les éléments sont d'ordre  $\leq e$ ,  
 $e =$  ordre du groupe  $\Gamma_k$  des racines de l'unité de  $k$ ,  $\mathcal{S}_1$  est un groupe abélien,  
 $r$  le nombre de Dirichlet de  $k$ .

Soit  $N$  l'application norme de  $k$  dans  $\mathbb{Q}$ .

Soit  $\alpha = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(U, k)$ , alors  $\mathcal{B} = \sum_n N(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathcal{Q})$  et  $\mathcal{B}^2 = \delta$ , d'où  $\alpha$  est inversible dans  $\mathcal{R}(k)$ .

Pour montrer l'isomorphisme, nous avons besoin du résultat suivant :

LEMME ([1]). - Soit  $K$  un corps commutatif, de caractéristique zéro. Alors  
 $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(K)$  est inversible dans  $\mathcal{R}(K)$  si, et seulement si, il existe un  
entier  $m \geq 1$ , des éléments  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$  non nuls de  $K$  tels que, pour  
 $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $a_\mu \neq 0$  et  $a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t$  pour tout  $t \geq 0$ .

Introduisons, pour un corps commutatif  $K$ ,

$$\mathcal{S}_j(K) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid \exists P_0, \dots, P_{m-1} \in K[X], m \geq 1, \right.$$

tels que  $\deg P_\mu \leq j$  et  $a_{\mu+tm} = P_\mu(t)$ ,  
 pour  $\mu = 0, 1, \dots, m-1, t \in \mathbb{N}$  } .

PROPOSITION. - Soit  $\varepsilon$  une unité fondamentale de  $k$ , et soit  $(\varphi(n))$  une suite de  $\mathbb{Z}$ . Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) \iff \sum_n \varphi(n) X^n \in \mathcal{S}_1(\mathbb{Z}, \mathcal{Q}),$$

où  $\mathcal{S}_1(\mathbb{Z}, k) = \{ \alpha \in \mathcal{S}_1(k) ; a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0 \}$ .

Il suffit d'appliquer le lemme ci-dessus.

COROLLAIRE. - Soit  $\varepsilon$  une unité fondamentale de  $k$ . Alors le groupe multiplicatif  $\mathcal{R}_\varepsilon = \{ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(k) ; (\varphi(n)) \text{ suite de } \mathbb{Z} \}$  est isomorphe au groupe additif  $\mathcal{S}_1(\mathbb{Z}, \mathcal{Q})$ .

Soient  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  des unités fondamentales de  $k$ ,  $\alpha = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}(U, k)$ .  
 Posons

$$a_n = \zeta_n \varepsilon_1^{\varphi_1(n)} \dots \varepsilon_r^{\varphi_r(n)}, \quad \zeta_n \in \Gamma_k, \varphi_j(n) \in \mathbb{Z},$$

alors, par le lemme,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_j^{\varphi_j(n)} X^n, \quad j = 1, \dots, r,$$

D'où

$$\alpha_0 = \sum_n \zeta_n X^n \in \mathcal{R}(k) ,$$

et  $\alpha_0^e = \delta$  .

$\mathcal{S}'_0$  est le sous-groupe de  $\mathcal{S}_0(k^*)$  des éléments tels que  $\tau^e = \delta$  ,  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}})$  , ce qui démontre le théorème 3.

PROPOSITION. - Soient  $\bar{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  ,  $\bar{\mathbb{A}}$  son anneau d'entiers,  $\bar{\mathbb{U}}$  son groupe d'unités,  $\Gamma$  le groupe des racines de l'unité. Alors  $\mathcal{R}(\bar{\mathbb{U}}, \bar{\mathbb{Q}})$  est le groupe des unités de  $\mathcal{R}(\bar{\mathbb{U}}, \bar{\mathbb{Q}})$  , et  $\mathcal{R}(\Gamma, \bar{\mathbb{Q}})$  est son groupe de torsion.

Il suffit de remarquer que si  $\alpha \in \mathcal{R}(\bar{\mathbb{Q}})$  , il existe un corps de nombres  $k$  tel que  $\alpha \in \mathcal{R}(k)$  , et d'appliquer le théorème 3.

COROLLAIRE 1. - Soit  $(a_n)$  une suite d'unités algébriques (sur  $\underline{\mathbb{Z}}$ ) vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Alors il existe un entier  $m \geq 1$  et des unités  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$  tels que, pour  $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ ,

$$a_{\mu+tm} = a_\mu \alpha_\mu^t , \quad \text{pour tout } t \geq 0 .$$

COROLLAIRE 2. - Toute suite de racines de l'unité vérifiant une relation de récurrence linéaire est périodique.

Suites de S-unités. - Soit  $k$  un corps de nombres, et soit  $M_k$  l'ensemble des valuations sur  $k$  . Pour toute partie finie  $S$  de  $M_k$  , contenant l'ensemble  $S_\infty$  des valuations archimédiennes, considérons  $\underline{J}_S = \prod_{v \in S} k_v^* \times \prod_{v \notin S} U_v$  , le groupe des S-idèles de  $k$  , où  $k_v$  est le complété de  $k$  pour  $v$  ,  $U_v$  son groupe d'unités.

$k^*$  se plonge canoniquement dans le groupe des idèles  $\underline{J}$  de  $k$  ; soit  $k_S$  l'image réciproque de  $\underline{J}_S$  ;  $k_S$  est le groupe des S-unités de  $k$  . Pour  $S = S_\infty$  ,  $k_S = \mathcal{U}$  .

La structure de  $k_S$  est donnée par le théorème de Dirichlet-Minkowski-Hasse-Chevalley ([4]) : il existe un nombre fini de S-unités fondamentales,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  telles que toute S-unité  $\varepsilon$  s'écrit de manière unique :

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_\ell^{u_\ell} , \quad \text{où } \zeta \in \Gamma_k , u_j \in \underline{\mathbb{Z}} .$$

En d'autres termes,  $k_S \simeq \Gamma_k \times \underline{\mathbb{Z}}^\ell$  .

Cet isomorphisme se "fonctorise" par  $\mathcal{R}$  :

THÉORÈME 3. -  $\mathcal{S}_S = \mathcal{R}(k_S, k)$  est un sous-groupe du groupe des unités  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{R}(k)$ ,  $\mathcal{S}_S \simeq \mathcal{S}'_0 \times \mathcal{S}^{\mathcal{L}}_1$ , et  $\mathcal{S} = \varinjlim \mathcal{S}_S$ .

Le théorème est une conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION ([2]). - Soit  $(a_n)$  une suite de S-unités de  $k$ . Alors :

$$" \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(k) " \iff " \alpha \text{ est inversible dans } \mathcal{R}(k) " .$$

COROLLAIRE 1. - Soit  $a$  un nombre algébrique non nul, non racine de l'unité.  
Soit  $(\varphi(n))$  une suite de  $\mathbb{Z}$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a^{\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) &\iff \sum_{n=0}^{\infty} a^{-\varphi(n)} X^n \in \mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}) \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) X^n \in \mathcal{S}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) . \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2. - Soit  $G$  un sous-groupe de type fini de  $\overline{\mathbb{Q}}^*$ . Alors  $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}})$  est un sous-groupe du groupe des unités de  $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}})$ .

Signalons pour  $\mathbb{C}$  le résultat suivant :

PROPOSITION. - Soit  $D = \{z ; z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = 1\}$ . Alors  $\mathcal{R}(D, \mathbb{C})$  est un sous-groupe du groupe des unités  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{R}(\mathbb{C})$  ; et  $\mathcal{R}(\Gamma, \mathbb{C})$  est le sous-groupe de torsion de  $\mathcal{R}(D, \mathbb{C})$ .

COROLLAIRE. - Soit  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ . Alors

$$\sum_n \arg(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) \implies \sum_n |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) .$$

Notons que pour  $\alpha \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$  :

$$\sum_n |a_n| X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) \iff \sum_n \operatorname{sgn}(a_n) X^n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}) .$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZAGHOU (Benali). - Sur l'algèbre de Hadamard des fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 9e année, 1967/68, n° 15, 16 p.
- [2] BENZAGHOU (Benali). - Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 10e année, 1968/69, n° 1, 14 p.
- [3] MAHLER (Kurt). - On the Taylor coefficients of rational functions, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 52, 1956, p. 39-48.
- [4] WEYL (Hermann). - Algebraic theory of numbers. - Princeton, Princeton University Press, 1940 (Annals of Mathematics Studies, 1).

(Texte reçu le 24 avril 1969)

Benali BENZAGHOU  
M. Ass. Fac. Sc. Alger  
Maison des Etudiants arméniens  
57 boulevard Jourdan  
75 - PARIS 14

---