Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Daniel Barsky

Formes linéaires p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 2, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A1_0>

FORMES LINÉAIRES p-ADIQUES

par Daniel BARSKY

Le but de cet exposé est d'établir une formule p-adique analogue à la formule intégrale de Cauchy dans le cas complexe

$$\int_{\text{cercle } c} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \begin{cases} 2i\pi\, f(a) \ , & \text{si } a \text{ est intérieur à } c \ , \\ 0 \ , & \text{si } a \text{ est extérieur à } c \ . \end{cases}$$

1. Rappels d'analyse p-adique.

Soient p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique que l'on notera v_p ; on note $|x| = \frac{1}{p^{v_p(x)}}$. On appelle U la couronne unité de $\mathbb{Q}_p$: $U = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| = 1\}$, et $\mathcal{C}(U, \mathbb{Q}_p)$ l'espace des fonctions continues de U dans $\mathbb{Q}_p$. On sait (cf. [2]) que toute fonction $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{Q}_p)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n (1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right) \cdots \left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \ ,$$

avec les conditions suivantes :

(i) La suite $n \to \alpha^n$ est une suite très bien répartie dans U au sens de [2], c'est-à-dire que si $\bar{\alpha}$ désigne l'image de α dans l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Z}_p$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, corps résiduel de la valuation, $\bar{\alpha}$ est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, et $v_p(\alpha^{p-1} - 1) = 1$;

(ii) $\lim_{n\to+\infty} |b_n(1-\alpha)(1-\alpha^2) \cdots (1-\alpha^n)| = 0$;

(iii) $\sup_{x\in U} |f(x)| = \max_{n\in\mathbb{N}} |b_n(1-\alpha) \cdots (1-\alpha^n)|$.

Soient L l'espace des fonctions de U dans $\mathbb{Q}_p$, développables en série de Laurent, L^+ le sous-espace de L des fonctions ayant les coefficients d'indice < 0 nuls, et L^- le sous-espace de L des fonctions ayant les coefficients d'indice $\geqslant 0$ nuls. On a les équivalences suivantes (cf. [1]) :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} b_n (1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right) \cdots \left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \ ;$$

$$f(x) \in L^+ \iff \lim_{n\to+\infty} |b_n| = 0 \ ;$$

- $f(x) \in L^- \iff \exists\, \varphi \in \mathcal{C}(U, \mathbb{Q}_p)$ telle que, $\forall\, n$, on ait $\varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) = b_n$;

et

$$f(x) \in L \implies \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| .$$

On munira dorénavant les fonctions de la norme $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_n| = \|f\|$.

2. Formes linéaires sur L .

Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right) \dots \left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$. Posons

$$\langle \mu_0 | f \rangle = b_0 ,$$

$$\langle \mu_1 | f \rangle = b_0 + b_1 ,$$

$$\vdots$$

$$\langle \mu_n | f \rangle = b_0 + b_1 + \dots + b_n .$$

$$\vdots$$

On note $n_k = p^k(p-1)$, c'est le nombre de boules de rayon r tel que

$$v_p(r) = k+1$$

contenues dans U . On pose la définition suivante.

DÉFINITION. - $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{Q}_p)$ *est* μ-*intégrable si la suite* $\nu_k = \langle \mu_{n_k - 1} | f \rangle$ *admet une limite, lorsque* $k \to +\infty$. *Soit* $\langle \mu | f \rangle$ *cette limite.*

PROPOSITION 1. - *Toute fonction* $f \in L^+$ *est* μ-*intégrable.*

On a vu que $f \in L^+ \iff \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, donc la suite $\langle \mu_n | f \rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i$ est convergente lorsque $n \to +\infty$, car elle satisfait au critère de Cauchy ultramétrique : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$. A fortiori, la suite $\langle \mu_{n_k - 1} | f \rangle$ est convergente lorsque $k \to +\infty$.

PROPOSITION 2. - $\langle \mu | 1 \rangle = 1$ *et* $\langle \mu | x^n \rangle = 0$.

Posons $Q_n(x) = (1-x) \dots \left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$ et $Q_0(x) = 1$, il vient $1 = 1.Q_0(x)$, donc $\langle \mu | 1 \rangle = 1$,

$$x^n = \sum_{h=0}^{n} a_h^n\, Q_h(x) ,$$

et en identifiant le terme constant

$$\sum_{h=0}^{n} a_h^n = 0 \quad ,$$

donc $\langle \mu | x^n \rangle = 0$.

PROPOSITION 3. - $\frac{1}{x}$ <u>est</u> μ-<u>intégrable, et</u> $\langle \mu | \frac{1}{x} \rangle = 0$.

On verra, dans la démonstration de la proposition 4, que

$$\frac{1}{x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\alpha^n} (1 - x) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \quad ,$$

$$\langle \mu_{n_k - 1} | \frac{1}{x} \rangle = 1 + \frac{1}{\alpha} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{n_k - 1}} = \frac{1 - (1/\alpha^{n_k})}{1 - (1/\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{n_k - 1}} \frac{\alpha^{n_k} - 1}{\alpha - 1} \quad .$$

Montrons que $\lim_{k \to \infty} \langle \mu_{n_k - 1} | \frac{1}{x} \rangle = 0$, et, plus précisément, que

$$| \langle \mu_{n_k - 1} | \frac{1}{x} \rangle | \leqslant \frac{1}{p^{k+1}} \quad .$$

$$| \langle \mu_{n_k - 1} | \frac{1}{x} \rangle | = \left| \frac{1}{\alpha^{n_k - 1}} \right| \times \frac{1}{|\alpha - 1|} \times |\alpha^{n_k} - 1| \quad ,$$

$$\left| \frac{1}{\alpha^{n_k - 1}} \right| \times \frac{1}{|\alpha - 1|} = 1 \quad .$$

Par récurrence, on a :

$|\alpha^{p-1} - 1| = \frac{1}{p}$, par définition de α ,

$|\alpha^{p^{k+1}(p-1)} - 1| = |\alpha^{p^k(p-1)} - 1| \; |1 + \alpha^{n_k} + \alpha^{2n_k} + \ldots + \alpha^{(p-1)n_k}|$,

$|\alpha^{p^{k+1}(p-1)} - 1| \leqslant \frac{1}{p^k} \; |1 + \alpha^{n_k} + \ldots + \alpha^{(p-1)n_k}|$,

d'après l'hypothèse de récurrence. Or $\overline{\alpha^{in_k}} = (\overline{\alpha})^{in_k} = 1$, car n_k est un multiple de $(p - 1)$, donc

$$\overline{1 + \alpha^{n_k} + \ldots + \alpha^{(p-1)n_k}} = p.\overline{1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad |1 + \alpha^{n_k} + \ldots + \alpha^{(p-1)n_k}| \leqslant \frac{1}{p}$$

$$\Longrightarrow \quad |\alpha^{p^{k+1}(p-1)} - 1| \leqslant \frac{1}{p^{k+1}} \, .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 4. - $\frac{1}{x^h}$ <u>est</u> μ-<u>intégrable, et</u> $\langle \mu | \frac{1}{x^h} \rangle = 0$.

$$\frac{1}{x^h} = \sum_{n \geqslant 0} d_{n,h} (1 - x)\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right) \, .$$

Les $d_{n,h}$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} d_{n,1} = \frac{1}{\alpha} d_{n-1,1} \, , \quad n \geqslant 1 \, , \\ d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^h} d_{n-1,h} + d_{n,h-1} \, , \quad n \geqslant 1 \, , \quad h \geqslant 2 \, , \\ d_{0,h} = 1 \, , \quad \forall \, h \geqslant 1 \, . \end{cases}$$

On a la relation suivante :

$$\frac{1}{x^h} - 1 = (1 - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^h}\right) \, ,$$

donc

$$\sum_{n \geqslant 1} d_{n,h} \, Q_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{n \geqslant 0} d_{n,i} \, Q_n(x) \, .$$

Posons

$$\sum_{n \geqslant 1} d_{n,h} \, Q_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \, .$$

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^h} \, ,$$

$$X = \frac{x}{\alpha} \, , \qquad f(X) = \frac{1}{\alpha X} + \ldots + \frac{1}{\alpha^h X^h}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n \geqslant 1} d_{n,h} \, Q_{n-1}(X) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geqslant 0} d_{n,1} \, Q_n(X) + \ldots + \frac{1}{\alpha^h} \sum d_{n,h} \, Q_n(x)$$

$$\Longrightarrow \quad d_{n+1,h} = \frac{1}{\alpha} d_{n,1} + \frac{1}{\alpha^2} d_{n,2} + \ldots + \frac{1}{\alpha^h} d_{n,h} \, .$$

Cette relation est équivalente à la relation annoncée. On vérifie aisément (cf. [2]) que l'on a

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^n} \frac{((1/\alpha^n) - \alpha)((1/\alpha^n) - \alpha^2) \ldots ((1/\alpha^n) - \alpha^{h-1})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^h)} ,$$

$$d_{n,h} = \frac{1}{\alpha^{nh}} \frac{(1 - \alpha^{n+1})(1 - \alpha^{n+2}) \ldots (1 - \alpha^{n+h-1})}{(1 - \alpha) \ldots (1 - \alpha^h)} .$$

Montrons maintenant la proposition 4 par récurrence sur h . Elle est vraie pour $h = 1$ (proposition 3),

$$\langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^{h+1}} \rangle = \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,h+1} = \frac{1}{\alpha^{h+1}} \sum_{n=1}^{n_k-1} d_{n-1,h+1} + \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,h}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{h+1}} \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^{h+1}} \rangle - d_{n_k-1,h+1} + \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^h} \rangle ,$$

$$\langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^{h+1}} \rangle \left(1 - \frac{1}{\alpha^{h+1}}\right) = \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^h} \rangle - d_{n_k-1,h+1} .$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\lim_{k\to+\infty} \langle \mu_{n_k-1} | \frac{1}{x^h} \rangle = 0 \quad ;$$

montrons que $\lim_{k\to+\infty} d_{n_k-1,h+1} = 0$,

$$d_{n_k-1,h+1} = \frac{1}{\alpha^{(n_k-1)h}} \frac{(1 - \alpha^{n_k})(1 - \alpha^{n_k+1}) \ldots (1 - \alpha^{n_k+h-2})}{(1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^{h+1})} .$$

D'après la démonstration de la proposition 2, il est clair que $\lim_{k\to\infty} d_{n_k-1,h+1} = 0$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 5. - <u>Les formes linéaires</u> μ_{n_k-1} <u>sont de normes</u> $\leqslant 1$ <u>sur l'espace</u> L <u>muni de la norme</u> $\sup_{n\geqslant 0} |b_n| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$, <u>si on écrit</u>

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} b_n Q_n(x) .$$

En effet,

$$\|\mu_{n_k-1}\| = \sup_{f\in L} \frac{|\langle \mu_{n_k-1} | f\rangle|}{\|f\|}$$

$$= \sup_{f\in L} \Big(\Big|\sum_{n=0}^{n_k-1} b_n\Big|\Big) \Big/ \Big(\sup_{n\in \underset{\sim}{N}} |b_n|\Big)$$

$$\leqslant \sup_{f\in L} \Big(\max_{0\leqslant n\leqslant n_k-1} |b_n|\Big) \Big/ \Big(\sup_{n\in \underset{\sim}{N}} |b_n|\Big) \leqslant 1 \ .$$

THÉORÈME (BANACH-STEINHAUS [3]). - Soient $\{f_n\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathcal{B}(E\ ,\ F)$ (formes linéaires continues de E dans F), et E_0 une partie dense de E . Si, quel que soit $x \in E_0$, $\lim\limits_{n\in \underset{\sim}{N}} f_n(x_0)$ existe, il existe $f \in \mathcal{B}(E\ ,\ F)$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $f(x) = \lim\limits_{n\in \underset{\sim}{N}} f_n(x)$.

PROPOSITION 6. - Les fonctions $f \in L$ sont μ-intégrables.

En effet, les $(x^n)_{n\in \underset{\sim}{Z}}$ sont denses dans L , et on a vu qu'ils sont μ-intégrables. On conclut donc en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus.

3. Formule de Cauchy.

LEMME.

$$\langle \mu | \frac{x}{(x-h)^n}\rangle = \begin{cases} 0\ , & \text{si } |h| > 1\ , \\ 0\ , & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n > 1\ , \\ 1\ , & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n = 1\ . \end{cases}$$

Si $|h| > 1$, $\dfrac{x}{(x-h)^n} \in xL^+$, donc $\langle \mu | \dfrac{x}{(x-h)^n}\rangle = 0$;

Si $|h| < 1$, $\dfrac{x}{(x-h)^n} = \dfrac{1}{x^{n-1}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dbinom{k+n-1}{k} \Big(\dfrac{h}{x}\Big)^k$, donc

$$\langle \mu | \frac{x}{(x-h)^n}\rangle = \begin{cases} 0\ , & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n > 1\ , \\ 1\ , & \text{si } |h| < 1 \text{ et } n = 1\ . \end{cases}$$

PROPOSITION 7. - Soit $f \in L^+$, et soit $h \in \underset{\sim}{Q}_p$ tel que $|h| \neq 1$, alors :

$$\langle \mu | \frac{xf(x)}{(x-h)^{n+1}}\rangle = \begin{cases} 0\ , & \text{si } |h| > 1\ , \\ \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(h)\ , & \text{si } |h| < 1\ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. - Si $|h| > 1$, $\dfrac{f(x)}{(x-h)^{n+1}} \in L^+$, donc $\dfrac{xf(x)}{(x-h)^{n+1}} \in xL^+$, qui est inclus dans le noyau de μ .

Si $|h| < 1$,

$$f(x) = f(h) + (x-h)\, f'(h) + (x-h)^2 \frac{f^{(2)}(h)}{2!} + \ldots$$

$$+ (x-h)^n f^{(n)}(h) + (x-h)^{n+1} \varphi(x) \quad ,$$

où $\varphi(x) \in L^+$,

$$\langle\mu | \frac{xf(x)}{(x-h)^{n+1}}\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle\mu | \frac{xf^{(i)}(h)}{i!(x-h)^{n+1-i}}\rangle + \langle\mu | \frac{xf^{(n)}(h)}{n!(x-h)}\rangle + \langle\mu | x\varphi(x)\rangle \quad ,$$

d'après le lemme,

$$\langle\mu | \frac{xf^{(n)}(h)}{n!(x-h)}\rangle = \frac{1}{n!} f^{(n)}(h) \qquad \text{et} \qquad \langle\mu | \frac{xf^{(i)}(h)}{i!(x-h)^{n+1-i}}\rangle = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \ ,$$

enfin $x\varphi(x) \in xL^+$, donc $\langle\mu | x\varphi x\rangle = 0$.

4. <u>Définition de</u> $\langle\mu_a^r | f(x)\rangle$ <u>dans le cas où</u> $f(x)$ <u>est analytique dans un cercle de rayon</u> $\geqslant r$, <u>de centre</u> a ($r \in$ groupe de valuation) .

DÉFINITIONS. - <u>On pose</u>

$$\langle\mu_a^1 | f(x)\rangle = \langle\mu_0^1 | g(y)\rangle \ , \qquad \underline{\text{où}} \quad g(y) = f(x+a) \quad .$$

<u>On pose</u>

$$\langle\mu_0^r | f(x)\rangle = \langle\mu_0^1 | f(ry)\rangle \qquad \underline{\text{et}} \qquad |y| = 1 \quad .$$

On justifie facilement cette définition en remarquant que la suite $r\alpha^n$ est une suite très bien répartie dans la couronne de rayon r , et que, dans ces conditions, toute la théorie du paragraphe 2 peut être refaite, et conduit au résultat

$$\langle\mu_0^r | f(x)\rangle = \langle\mu_0^1 | f(\frac{x}{r})\rangle \quad .$$

<u>Remarque</u> 1. - Toute la théorie précédente est valable dans un sous-groupe G de la couronne unité d'un corps local, défini comme suit :

$$G = \{1 , \alpha , \alpha^2 , \ldots , \alpha^n , \ldots \mid |\alpha| = 1 \ \text{et} \ \alpha^n \neq 1 , \ \forall n\} \quad .$$

<u>En particulier</u>, elle est valable dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Il faut alors

considérer la suite $\mu_{q^k(q-1)-1}$, où $q = p^s$ est le nombre d'éléments du corps résiduel.

Remarque 2. - A partir des formules précédentes, on peut obtenir une formule des résidus par la même méthode que SCHNIRELMAN (cf. [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (William W.). - Transcendental numbers in the p-adic domain, Amer. J. of Math., t. 88, 1966, p. 274-308.

[2] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[3] HILY (Jacques). - Sur les espaces de Banach ultramétriques. Algèbres de fonctions localement analytiques (Thèses Sc. math. Nancy, 1969).

[4] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 91-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[5] MONNA (A. F.). - Sur le théorème de Banach-Steinhaus, Proc. Kon. Ned. Akad. Van Wetensch., t. 66, 1963, p. 121-131.

(Texte reçu le 8 décembre 1969)

Daniel BARSKY
Stag. Rech. C. N. R. S.
10 avenue Stéphane Mallarmé
75 - PARIS 17