Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Pierre Wassef

Une application de la théorie ergodique à la théorie métrique des fractions continues

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 8, 10 p.

19 janvier 1970

UNE APPLICATION DE LA THÉORIE ERGODIQUE À LA THÉORIE MÉTRIQUE DES FRACTIONS CONTINUES

par Pierre WASSEF

1. Préliminaires et définitions.

Etant donné un espace de probabilité $(\Omega , \mathfrak{F} , \mu)$, où Ω est un ensemble, $\mathfrak{F}$ une σ-algèbre de parties de Ω , et μ une probabilité sur $\mathfrak{F}$, on dira qu'une application mesurable T de Ω dans lui-même est ergodique, si :

(i) T préserve la mesure

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) , \qquad \forall A \in \mathfrak{F} ;$$

(ii) Les ensembles invariants par T sont de mesure 0 ou 1 ,

$$(\forall A \in \mathfrak{F}) , \quad (\mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0) \implies (\mu(A) = 0 \text{ ou } 1) ,$$

Δ désignant l'opération "différence symétrique" de deux ensembles.

THÉORÈME ergodique de Birkhoff. - Si f est une fonction de $L^1(\Omega , \mathfrak{F} , \mu)$, et si T est ergodique pour $(\Omega , \mathfrak{F} , \mu)$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \text{p. s. } [\mu] , \tag{1.1}$$

la notation p. s. $[\mu]$ signifiant que l'égalité (1.1) est vraie, sauf éventuellement pour les éléments ω d'un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ tel que $\mu(A) = 0$.

On pourra trouver la démonstration de ce théorème dans NEVEU [6], BILLINGSLEY [1].

2. Application à la théorie métrique des fractions continues.

(A) Rappelons que tout nombre réel ω peut être considéré comme étant la valeur d'une, et d'une seule, fraction continue

$$\omega = [a_0 ; a_1 , \ldots , a_n , \ldots] = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + 1/\ldots))) ,$$

où les a_i sont des entiers vérifiant $a_i > 0$, si $i > 0$. Si ω est rationnel, la fraction continue lui correspondant n'a qu'un nombre fini d'éléments, et réciproquement ; dans ce cas, nous conviendrons, en vue de l'unicité, de ne considérer que les fractions continues finies dont le dernier élément est différent de 1 , ce qui est toujours possible.

Nous ne considérerons dans cet exposé que le cas où $a_0 \simeq 0$, c'est-à-dire où $\omega \in [0 , 1)$, exception faite du point 1 . Nous étudierons les propriétés d'ergodicité de l'application T définie par

$$T\omega = \begin{cases} \{\frac{1}{\omega}\} , & \text{si } 0 < \omega \leqslant 1 , \\ 0 , & \text{si } \omega = 0 , \end{cases}$$

où $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, si $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel positif α .

Il est clair que si $\omega = [0 ; a_1 , a_2 , \dots , a_n , \dots]$,

$$T\omega = [0 ; a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots] .$$

On posera, d'autre part,

$$a_1(\omega) = \begin{cases} [\frac{1}{\omega}] , & \text{si } 0 < \omega \leqslant 1 , \\ + \infty , & \text{si } \omega = 0 , \end{cases}$$

$$a_n(\omega) = a_1(T^{n-1} \omega) ,$$

$$(2.1) \quad \begin{cases} p_{-1}(\omega) = 1 , \quad p_0(\omega) = 0 , \quad p_n(\omega) = a_n(\omega)\, p_{n-1}(\omega) + p_{n-2}(\omega) , \quad n \geqslant 1 , \\ q_{-1}(\omega) = 0 , \quad q_0(\omega) = 1 , \quad q_n(\omega) = a_n(\omega)\, q_{n-1}(\omega) + q_{n-2}(\omega) , \quad n \geqslant 1 , \end{cases}$$

avec la convention que $p_n(\omega)$ et $q_n(\omega)$ ne sont définis que pour $a_n(\omega)$ fini.

Nous rappelons les résultats suivants qui se démontrent par récurrence (cf. KHINČIN [3]) :

$$(2.2) \qquad \omega = [0 ; a_1(\omega) , a_2(\omega) , \dots , a_n(\omega) + T^n \omega] , \qquad n \geqslant 1 ,$$

$$(2.3) \qquad q_n(\omega)\, p_{n-1}(\omega) - p_n(\omega)\, q_{n-1}(\omega) = (-1)^n , \qquad n \geqslant 0 ,$$

$$(2.4) \quad [0 ; a_1(\omega) , \dots , a_n(\omega) + t] = \frac{p_n(\omega) + t p_{n-1}(\omega)}{q_n(\omega) + t q_{n-1}(\omega)} , \qquad (n \geqslant 1 , \ 0 \leqslant t \leqslant 1) ,$$

$$(2.5) \qquad [0 , a_1(\omega) , \dots , a_n(\omega)] = \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)} , \qquad (n \geqslant 0) ,$$

$$(2.6) \qquad \omega = \frac{p_n(\omega) + (T^n \omega)\, p_{n-1}(\omega)}{q_n(\omega) + (T^n \omega)\, q_{n-1}(\omega)} , \qquad (n \geqslant 1) ,$$

$$(2.7) \qquad \frac{1}{q_n(\omega)[q_n(\omega) + q_{n+1}(\omega)]} \leqslant \left|\omega - \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)}\right| \leqslant \frac{1}{q_n(\omega)\; q_{n+1}(\omega)} , \qquad (n \geqslant 1) ,$$

$$(2.8) \qquad p_n(\omega) \geqslant 2^{(n-2)/2} , \qquad q_n(\omega) \geqslant 2^{(n-1)/2} , \qquad (n \geqslant 2) ,$$

$$(2.9) \qquad \left|\log \frac{\omega}{p_n(\omega)/q_n(\omega)}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n-2}} , \qquad (n \geqslant 2) .$$

Enfin, si $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ sont des entiers positifs, on notera $\Delta_{a_1,a_2,\dots,a_n}$ l'ensemble des $\omega \in [0 , 1]$ tels que $a_i(\omega) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Il est clair que $\Delta_{a_1,\dots,a_n}$ est l'image de l'intervalle $[0 , 1[$ par la fonction $\psi_{a_1,\dots,a_n}$, définie par

$$(2.10) \qquad \psi_{a_1,\dots,a_n}(t) = [0 , a_1 , \dots , a_n + t] = \frac{p_n + tp_{n-1}}{q_n + tq_{n-1}} ,$$

où les p_i et les q_i sont construits à partir des a_i par les formules (2.1) ; or d'après (2.3), cette fonction est croissante pour n pair, et décroissante pour n impair ; par conséquent :

$$\Delta_{a_1,\dots,a_n} = \begin{cases} \left[\dfrac{p_n}{q_n} , \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right[, & \text{si } n \text{ est pair} , \\[2ex] \left]\dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} , \dfrac{p_n}{q_n}\right] , & \text{si } n \text{ est impair} . \end{cases}$$

Donc, si λ désigne la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0 , 1]$, il découle de (2.8) que

$$\lambda(\Delta_{a_1,\dots,a_n}) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Les intervalles de la forme $\Delta_{a_1,\dots,a_n}$ sont appelés intervalles fondamentaux de rang n ; la dernière inégalité montre que la classe de tous les intervalles fondamentaux, lorsque n varie, engendre la tribu des boréliens de l'intervalle $[0 , 1]$.

(En ce qui concerne la théorie des fractions continues, voir KHINČIN [3].)

(B) La théorie métrique des fractions continues a pour objet, étant donnée une propriété (P) portant sur les quotients partiels a_i ou sur les convergents $\frac{p_n}{q_n}$, de déterminer la mesure de l'ensemble des nombres réels dont les quotients partiels ou les convergents vérifient la propriété (P). En particulier, on pourra étudier "l'importance" de telle ou telle loi d'approximation d'un nombre réel par ses convergents, suivant la mesure de l'ensemble des nombres qui la vérifient. Le théorème ergodique, appliqué à la transformation T définie au début de cet exposé, va nous donner des renseignements sur les propriétés vérifiées ou non presque-partout, c'est-à-dire sur un ensemble de mesure 1.

Notons que les résultats que nous obtiendrons sont connus depuis 1935-1937 par les travaux de KHINČIN et de Paul LÉVY, mais que les démonstrations ergodiques (cf. BILLINGSLEY [1] ; ROKHLIN [7]) sont sensiblement plus simples que les démonstrations d'origine.

Ergodicité de la transformation T. - Il est clair que T ne préserve pas la mesure de Lebesgue λ. Cependant, il est une mesure de même type spectral que λ et pour laquelle T est ergodique, c'est la mesure de Gauss, P, définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $[0\,,\,1)$ par

$$P(A) = \frac{1}{\log 2}\int_A \frac{dx}{1+x}\,, \qquad A \in \mathcal{B}\ .$$

Remarquons que la classe des ensembles de P-mesure nulle coïncide avec celle des ensembles de λ-mesure nulle.

THÉORÈME 1. - T est ergodique pour la mesure P.

Preuve.

1° T préserve P : Il suffit de vérifier que T préserve la mesure des intervalles de la forme $[0\,,\,\alpha)$, $\alpha < 1$; or

$$T^{-1}([0\,,\,\alpha)) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k+\alpha}\,,\,\frac{1}{k}\right) ;$$

les intervalles $\left[\frac{1}{k+\alpha}\,,\,\frac{1}{k}\right)$ étant disjoints, il suffit de vérifier que

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{1/(k+\alpha)}^{1/k}\frac{dx}{1+x} ;$$

or

$$\int_{1/(k+\alpha)}^{1/k}\frac{dx}{1+x} = \log\left(1+\frac{1}{k}\right) - \log\left(1+\frac{1}{k+\alpha}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) - \log\left(1+\frac{\alpha}{k+1}\right) = \int_{\alpha/(k+1)}^{\alpha/k}\frac{dx}{1+x}\ ,$$

d'où le résultat.

2° <u>Ergodicité de</u> T : Fixons n entiers positifs a_1 , a_2 , ... , a_n ; notons $\psi_n = \psi_{a_1,\dots,a_n}$ et $\Delta_n = \Delta_{a_1,\dots,a_n}$. La longueur de l'intervalle Δ_n est $\pm\ (\psi_n(1) - \psi_n(0))$, selon la parité de n ; d'autre part, d'après (2.6), on peut écrire $\omega = \psi_n(T^n\ \omega)$ si $\omega \in \Delta_n$; donc si $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, l'intervalle

$$\{\omega \mid \ x \leqslant T^n\ \omega < y\} \cap \Delta_n$$

aura pour longueur $\pm\ (\psi_n(y) - \psi_n(x))$, selon la parité de n , par conséquent

$$\frac{\lambda(T^{-n}([x\ ,\ y[) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)} = \lambda(T^{-n}([x\ ,\ y[)/\Delta_n) = \frac{\psi_n(y) - \psi_n(x)}{\psi_n(1) - \psi_n(0)}\ ,$$

ce qui s'écrit, d'après (2.3) et (2.10),

$$\lambda(T^{-n}([x\ ,\ y[)/\Delta_n) = (y - x)\ \frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + xq_{n-1})(q_n + yq_{n-1})}\ ;$$

or on a toujours

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + xq_{n-1})(q_n + yq_{n-1})} \leqslant 2\ ,$$

on obtient donc, en posant $A = [x\ ,\ y[$,

$$\frac{1}{2}\ \lambda(A) \leqslant \lambda(T^{-n}(A)/\Delta_n) \leqslant 2\lambda(A)\ , \tag{2.11}$$

et il est clair que (2.11) reste vraie si l'on remplace A par une réunion disjointe finie d'intervalles $[x\ ,\ y[$, et par conséquent lorsque A est un borélien quelconque de l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.

D'autre part, la densité de la mesure de Gauss par rapport à λ varie entre $\frac{1}{2\log 2}$ et $\frac{1}{\log 2}$, donc, pour tout borélien $M \subset [0\ ,\ 1]$, on a

$$\frac{\lambda(M)}{2\log 2} \leqslant P(M) \leqslant \frac{\lambda(M)}{\log 2}\ .$$

On peut donc trouver deux constantes positives absolues α et β , telles que

$$\alpha P(A) \leqslant P(T^{-n}(A)/\Delta_n) \leqslant \beta P(A)\ , \tag{2.12}$$

quel que soit le borélien A de l'intervalle $[0\ ,\ 1]$, et quel que soit l'intervalle fondamental Δ_n .

Supposons maintenant que A est T-invariant, c'est-à-dire que $P(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$; on peut écrire, en vertu de (2.12),

$$\alpha P(A) \leqslant P(A/\Delta_n) = \frac{P(A \cap \Delta_n)}{P(\Delta_n)} \quad .$$

Si $P(A) > 0$, cela peut s'écrire

$$\alpha P(\Delta_n) \leqslant \frac{P(\Delta_n \cap A)}{P(A)} = P(\Delta_n/A) \quad . \tag{2.13}$$

Cette inégalité reste vraie lorsqu'on remplace Δ_n par une réunion dénombrable disjointe d'intervalles fondamentaux, comme ces réunions forment une algèbre qui engendre la σ-algèbre des boréliens de l'intervalle $[0 , 1]$, l'inégalité reste vraie lorsque l'on remplace Δ_n par un borélien $E \subset [0 , 1]$, soit

$$\alpha P(E) \leqslant P(E/A) \ , \qquad E \in \mathcal{B} \ ;$$

en particulier, lorsque $E = A^c$, on obtient $P(A^c) = 0$, ce qui achève la démonstration.

On déduit du théorème ergodique le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - Quelle que soit $f \in L^1([0 , 1] , \mathcal{B} , P)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 f(x) \frac{dx}{1+x} \quad \text{p. s. } [P \text{ ou } \lambda] \ .$$

Applications.

1° Si f est la fonction caractéristique de l'ensemble des $\omega \in [0 , 1]$, tels que $a_1(\omega) = k$, où k est un entier positif donné, on obtient que la fréquence asymptotique de k parmi les quotients partiels $a_1(\omega)$, $a_2(\omega)$, ... est presque sûrement égale à

$$\frac{1}{\log 2} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} > 0 \quad ,$$

en particulier si $\Omega_q = \{\omega \mid a_n(\omega) \leqslant q \ , \ n \geqslant 1\}$, alors $P(\Omega_q) = 0$. On en déduit que l'ensemble des ω , dont les quotients partiels sont bornés, est de mesure nulle (P ou λ) .

2° Si $f(\omega) = \log a_1(\omega)$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(\omega) \ldots a_n(\omega)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2 + 2k}\right)^{(\log k)/(\log 2)} \quad \text{p. s. } [P \text{ ou } \lambda] \ .$$

3° En ce qui concerne les problèmes des applications diophantiennes, le résultat le plus important est le suivant.

LEMME FONDAMENTAL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(\omega) = \frac{\pi^2}{12 \log 2} \quad \text{p. s. } [P \quad \text{ou} \quad \lambda] \quad .$$

<u>Preuve</u>. - Il est clair, d'après les formules (2.1), que $p_{j+1}(\omega) = q_j(T\omega)$; par conséquent,

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{q_n(\omega)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{p_{n+1-k}(T^{k-1}\,\omega)}{q_{n+1-k}(T^{k-1}\,\omega)} \quad ,$$

et d'après (2.5), ceci est égal à $\prod_{k=1}^{n} [0 \; ; a_k(\omega) \; , \; \dots \; , \; a_n(\omega)]$. D'autre part, on peut écrire (2.9) sous la forme

$$\text{(b)} \qquad |\log T^{k-1}\,\omega - \log[0 \; ; a_k(\omega) \; , \; \dots \; , \; a_n(\omega)]| \leqslant \frac{1}{2^{n-k-1}} \; , \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \quad .$$

En convenant de noter θ , θ_1 , θ_2 , ... des nombres réels tels que $|\theta_i| \leqslant 1$, (a) et (b) peuvent s'écrire

$$\log \frac{1}{q_n(\omega)} = \sum_{k=1}^{n} \log T^{k-1}\,\omega + \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{2^{n-k-1}} \quad ,$$

d'où

$$\frac{1}{n} \log q_n(\omega) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log T^k\,\omega + \frac{4\theta}{n} \quad ;$$

or, d'après le théorème 2,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log T^k\,\omega = -\frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 + x} \quad \text{p. s. } [P] \quad ,$$

en intégrant par parties l'intégrale de droite, on obtient

$$-\int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 + x} = \int_0^1 \log(x + 1) \, \frac{dx}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k + 1} \, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k + 1)^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad .$$

Q. E. D.

On déduit du lemme et de (2.7) que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left|\omega - \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)}\right| = - \frac{\pi^2}{6 \log 2} \quad \text{p. s. } [P] \ .$$

THÉORÈME FONDAMENTAL de la théorie métrique des fractions continues. - Soit $f(q)$ une fonction positive définie sur les entiers positifs.

(a) Si la suite $qf(q)$ est non croissante, et si la série $\sum_q f(q)$ diverge, alors, pour presque tout $\omega[\lambda]$, l'inégalité

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}$$

a une infinité de solutions en p et q.

(b) Si la série $\sum_q f(q)$ converge, alors, pour presque tout $\omega[\lambda]$, cette inégalité a au plus un nombre fini de solutions en p et q.

Démonstration. - Cette démonstration, que l'on trouvera dans [1] et [3], est basée essentiellement sur le lemme fondamental ci-dessus et sur le lemme suivant.

LEMME 2. - Soit $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers positifs ; l'ensemble des nombres réels $\omega \in [0 , 1)$ tels que l'inégalité $a_n(\omega) > \alpha_n$ ait lieu pour une infinité d'entiers n, est de mesure 0 ou 1, suivant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ converge ou diverge.

Preuve. - Soit $E_n = \{\omega \mid a_n(\omega) > \alpha_n\}$, T laissant la mesure P invariante, on a $P(E_n) = P\{\omega \mid a_1(\omega) > \alpha_n\}$; or, dire que $a_1(\omega) > \alpha_n$ équivaut à dire que $\omega \in \left[0 , \frac{1}{\alpha_n + 1}\right[$; par conséquent, $P\{\omega \mid a_1(\omega) > \alpha_n\}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\alpha_n}$, et il résulte du lemme de Borel-Cantelli que, si $\sum_n \frac{1}{\alpha_n}$ converge, l'inégalité $a_n(\omega) > \alpha_n$ n'est réalisée qu'un nombre fini de fois au plus, sauf sur un ensemble de mesure nulle.

D'autre part, l'inégalité

$$\alpha P(A) \leqslant P(T^{-n} A/\Delta_n) \ , \qquad A \in \mathcal{B} \ ,$$

s'écrit

$$P(E_{n+1}/\Delta_n) \geqslant \frac{1}{\alpha'(\alpha_{n+1} + 1)} \ ,$$

où Δ_n désigne un intervalle fondamental de rang n, et α' une constante absolue. Or il est clair que E_{n+1} est indépendant de Δ_n, et que les ensembles E_m forment une suite indépendante ; par conséquent, $P(E_{n+1}/\Delta_n) = P(E_{n+1})$, et on en déduit

$$P(E_m^c \cap E_{m+1}^c \cap \dots \cap E_{m+k}^c) \leqslant \prod_{i=0}^{k} \left(1 - \frac{1}{\alpha'(\alpha_{m+i} + 1)}\right) ;$$

or ce produit diverge vers zéro si la série $\sum_n \frac{1}{\alpha_n}$ diverge, auquel cas on a

$$P(E_m^c \cap E_{m+1}^c \cap \dots) = 0 , \qquad m \geqslant 1 ,$$

ce qui exprime que l'inégalité $a_n(\omega) > \alpha_n$ n'est réalisée qu'au plus un nombre fini de fois, sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Q. E. D.

<u>Preuve du théorème fondamental</u>. - Pour prouver (a), fixons un entier N tel que $\log N > \frac{\pi^2}{12 \log 2}$. D'après le lemme fondamental, l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log q_n(\omega) > \log N$$

a lieu au plus pour un nombre fini de valeurs de n, sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Si $\Phi(n) = N^n f(N^n)$, le fait que la suite $\{qf(q)\}$ soit non croissante implique que

$$\sum_{q=N^n}^{q=N^{n+1}-1} f(q) \leqslant 2 \log N . \Phi(n) ,$$

de sorte que la série $\sum_n \Phi(n)$ diverge si la série $\sum_q f(q)$ diverge et, dans ce cas, il résulte du lemme 2 que l'inégalité

$$(\alpha) \qquad a_{n+1}(\omega) > \frac{1}{\Phi(n)}$$

a lieu pour une infinité de valeurs de n, sauf sur un ensemble de mesure nulle ; mais si cette inégalité a lieu, on peut écrire

$$\left|\omega - \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)}\right| < \frac{1}{q_n(\omega)\ q_{n+1}(\omega)} \leqslant \frac{1}{a_{n+1}(\omega)\ q_n(\omega)^2} \leqslant \frac{\Phi(n)}{q_n(\omega)^2} .$$

Or on a vu que, pour n suffisamment grand,

$$(\beta) \qquad \frac{1}{n} \log q_n(\omega) < \log N \quad ,$$

soit $q_n(\omega) < N^n$, donc que

$$\Phi(n) = N^n f(N^n) \leqslant q_n(\omega)\ f(q_n(\omega)) \quad ,$$

de sorte que

$$|\omega - \frac{p_n(\omega)}{q_n(\omega)}| < \frac{f(q_n(\omega))}{q_n(\omega)} \quad ,$$

et comme il est clair que les inégalités (α) et (β) ont lieu simultanément pour une infinité de valeurs de n , (a) est démontré.

La deuxième partie du théorème est une conséquence du lemme de Borel-Cantelli.

Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BILLINGSLEY (Patrick). - Ergodic theory and information. - New York, J. Wiley and Sons, 1965 (Wiley Series in Probability and mathematical Statistics).

[2] DOEBLIN (W.). - Remarques sur la théorie métrique des fractions continues, Compositio Math., t. 7, 1940, p. 353-371.

[3] KHINČIN (A. Ja.). - Continued fractions. 3rd edition. - Chicago, University of Chicago Press, 1963 (Phoenix Sciences Series).

[4] LÉVY (P.). - Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue, Bull. Soc. math. France, t. 57, 1929, p. 178-194.

[5] LÉVY (P.). - Théorie de l'addition des variables aléatoires. - Paris, Gauthier-Villars, 1937 (Monographies des Probabilités, 1).

[6] NEVEU (J.). - Bases mathématiques du calcul des probabilités. - Paris, Masson, 1964.

[7] ROKHLIN (V. A.). - New progress in the theory of transformations with invariant measure, Russian math. Surveys, t. 15, 1960, n° 4, p. 1-22.

(Texte reçu le 28 janvier 1970)

Pierre WASSEF
15 bis rue du Pot de Fer
75 - PARIS 05