Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MARC BACHMAKOV

Cohomologie des courbes elliptiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 1 (1969-1970), exp. nº 12, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 12, 4 p.

2 mars 1970

COHOMOLOGIE DES COURBES ELLIPTIQUES

par Marc BACHMAKOV

Le but de cet exposé est d'établir une dualité dans la cohomologie des courbes elliptiques sur un corps de nombres algébriques qui généralise un fait démontré par CASSELS [3].

1. Notations et rappels de résultats.

Soient k un corps de nombres algébriques, E une courbe elliptique définie sur k. Si E est aussi définie sur un corps K, pour toute extension normale L de corps K, les groupes de cohomologie de $\mathrm{Gal}(L/K) = G$, dans le groupe des points de E sur L, seront notés $H^i(G, E)$. On désigne par $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, et G son groupe de Galois sur k. De même, pour toute place π de k, on désigne par k_π une π-complétion de k, $\overline{k_\pi}$ sa clôture algébrique, et G le groupe de Galois de $\overline{k_\pi}$ sur k_π.

On définit le groupe de Šafarevič-Tate comme le noyau de l'homomorphisme

$$i : H^1(G, E) \to \sum_\pi H^1(G_\pi, E) .$$

Ce noyau sera désigné par Ш, et le conoyau de i par B. CASSELS [3] a démontré, en faisant l'hypothèse que Ш est fini, que $\mathrm{Char}\, B \simeq \widetilde{A}$, où $A = E(k)$, $\widetilde{A}$ est l'adhérence de A dans $\prod_\pi A_\pi$, avec $A_\pi = E(k_\pi)$. Il est connu, d'après SERRE [4], que $\widetilde{A} \simeq \varprojlim A/nA$. Les résultats analogues peuvent être obtenus pour les p-composantes des groupes introduits, en utilisant seulement l'hypothèse que la p-composante de Ш soit finie.

Considérons un ensemble S des places du corps k. Désignons par k_S l'extension maximale de k, non ramifiée en dehors de S, et par G_S son groupe de Galois sur k.

Pour un nombre premier p, on note $H_p^i, \ldots$ les p-composantes des groupes de cohomologie correspondants. Introduisons l'ensemble Σ des places du corps k contenant tous les diviseurs premiers de p, toutes les places où E a une mauvaise réduction, et les places archimédiennes.

PROPOSITION 1. - Pour tout ensemble $S \supset \Sigma$, le noyau de

$$i_S : H^1_p(G_S , E) \to \sum_{\pi \in S} H^1(G_\pi , E)$$

est la p-composante de Ш (cf., par exemple, [1]).

Le conoyau de i_S sera noté B_S. Notre but est de calculer B_S sans l'hypothèse de finitude de Ш .

2. Calculs.

PROPOSITION 2. - Il existe un ensemble fini Σ' tel que, pour tout $S \supset \Sigma'$, le noyau de l'homomorphisme

$$H^1(G_S , E_1) \to \sum_{\pi \in S} H^1(G_\pi , E_1)$$

soit nul, où E_1 désigne le noyau de la multiplication par p dans $E(\bar{k})$ (cf. [3]).

Dans tout ce qui suit, S désigne un ensemble fini des places de k contenant Σ et Σ'. On note E_N, $Ш_N$, $H^i(G , E)_N$, $(B_S)_N$, etc., les noyaux de la multiplication par p^N dans les groupes correspondants. Introduisons les groupes de Selmer $\mathfrak{S}^N$,

$$0 \to A/(p^N A) \to \mathfrak{S}^N \to Ш_N \to 0 .$$

PROPOSITION 3. - Le conoyau de l'homomorphisme

$$j_{S,1} : H^1(G_S , E)_1 \to \sum_{\pi \in S} H^1(G_\pi , E)_1$$

est isomorphe au groupe Char $\mathfrak{S}^1$.

Démonstration. - On utilise les résultats de TATE [5] sur la cohomologie du groupe G_S. La proposition entraîne que Ker $j_{S,1}$ ne dépend pas de S (qui a été choisi comme il a été dit plus haut). Ce noyau sera noté R^1 .

PROPOSITION 4. - On a la suite exacte

$$0 \to Ш/pШ \to R^1 \xrightarrow{\alpha} (B_S)_1 \to 0 .$$

L'application α est définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1_p(G_S , E) & \longrightarrow & \sum_{\pi\in S} H^1_p(G_\pi , E) & \longrightarrow & B_S & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha} & & \\
H^1(G_S , E)_1 & \longrightarrow & \sum_{\pi\in S} H^1(G_\pi , E)_1 & \longrightarrow & R^1 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & & 0 & & & &
\end{array} .$$

La proposition entraîne que $(B_S)_1$ ne dépend pas de S .

3. Le groupe Λ_S .

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & A/(p^N A) & \longrightarrow & H^1(G_S , E_N) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\delta_N} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_N} \\
0 & \longrightarrow & \sum_{\pi\in S} A_\pi/(p^N A_\pi) & \xrightarrow{\gamma_N} & \sum_{\pi\in S} H^1(G_\pi , E_N)
\end{array} .$$

Le groupe Λ_S^N est défini comme $\gamma_N^{-1}(\mathrm{Im}\ \beta_N)$. On note Λ_S le groupe $\varprojlim \Lambda_S^N$. C'est un sous-groupe de

$$\prod_{\pi\in S} A'_\pi = \prod_{\pi\in S} \varprojlim A_\pi/(p^N A_\pi) .$$

PROPOSITION 5. - On a la suite exacte

$$0 \to \Lambda_S/\Big(\Lambda_S \cap p \prod_{\pi\in S} A'_\pi\Big) \to Ш^1 \to Ш_1/(Ш_1 \cap \widetilde{Ш}) \to 0 ,$$

où $\widetilde{Ш}$ contient les éléments de $Ш$ infiniment p-divisibles dans $Ш$.

PROPOSITION 6. - $\mathrm{Char}(B_S)_1 \simeq \Lambda_S/\Big(\Lambda_S \cap p \prod_{\pi\in S} A'_\pi\Big)$.

Cela résulte du fait que

$$Ш/pШ \simeq \mathrm{Char}\ Ш_1/(Ш_1 \cap \widetilde{Ш})$$

(cf. [2]).

THÉORÈME. - $\mathrm{Char}\ B_S \simeq \Lambda_S$.

La construction de l'accouplement correspondant peut être trouvée dans [1].

COROLLAIRE. - $\dim Ш = \dim_{\mathbb{Z}_p} \Lambda_S - r + \dim H^2(G_S , E)$, <u>où</u> $\dim Ш$ et $\dim H^2(G_S , E)$ <u>sont les dimensions des composantes</u> p-<u>divisibles, et</u> r <u>est le rang de</u> E <u>sur</u> k .

Ce fait était déjà indiqué dans [1]. Il entraîne un critère de finitude de la p-composante de Ш .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BACHMAKOV [BAŠMAKOV] (M. I.). - On the rank of abelian varieties, Soviet Math., t. 9, 1968, p. 954-956 ; [en russe], Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., t. 181, 1968, p. 1031-1033.

[2] CASSELS (J. W. S.). - Arithmetic on curves of genus 1 , IV : Proof of the Hauptvermutung, J. reine und angew. Math., t. 211, 1962, p. 95-112.

[3] CASSELS (J. W. S.). - Arithmetic on curves of genus 1 , VII : The dual exact sequence, J. reine und angew. Math., t. 216, 1964, p. 150-158.

[4] SERRE (J.-P.). - Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes, Izv. Akad. Nauk S. S. S. R., Ser. Mat., t. 28, 1964, p. 3-20.

[5] TATE (J.). - Duality theorems in Galois cohomology over number fields, Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1962. Stockholm], p. 288-295. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

(Texte reçu le 16 mars 1970)

Marc BACHMAKOV
Prof. assoc. Univ. Leningrad
39 avenue de l'Observatoire
75 - PARIS 06