

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTINE PATHIAUX

Répartition modulo 1 de la suite $\lambda\alpha^n$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1969-1970),
exp. n° 13, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_1_A9_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $\lambda\alpha^n$

par Martine PATHIAUX

1. Introduction.

Soit S l'ensemble des nombres de Pisot, c'est-à-dire, l'ensemble des entiers algébriques > 1 dont tous les conjugués sont intérieurs au cercle unité.

Soit T l'ensemble de Salem, des entiers algébriques > 1 dont tous les conjugués sont intérieurs ou sur le cercle unité, l'un au moins étant sur le cercle unité.

Il existe des caractérisations (C. PISOT [1] et [2], SALEM [3]) des nombres de S et de $S \cup T$ à l'aide du reste modulo 1 des suites $\lambda\alpha^n = u_n + \varepsilon_n$, où $-\frac{1}{2} < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, $u_n \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 1 (C. PISOT [1]). - Soit $\alpha > 1$; une condition nécessaire et suffisante pour que α appartienne à S est qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty .$$

Le théorème 1 peut être amélioré en remplaçant la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < \infty$ par $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N n \varepsilon_n^2 = 0$.

THÉORÈME 2 (C. PISOT [2]). - Soit $\alpha > 1$; une condition nécessaire et suffisante pour que α appartienne à $S \cup T$ est qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, tel que

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2e\alpha(\alpha+1)(1+\log \lambda)}, \quad \forall n \geq 0 .$$

La démonstration du théorème 1 utilise les déterminants de Kronecker D_0^S , et celle du théorème 2 le principe des tiroirs.

D'autre part, la méthode utilisée dans le théorème 1 permet de conclure dans le cas où $\varepsilon_n = o(n^{1/2})$.

THÉORÈME 1'. - Soit $\alpha > 1$; une condition suffisante pour que α appartienne à S est qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{(1+n)^{1/2} 2\alpha(\alpha+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

On se propose de redémontrer les théorèmes 1, 2, 1' par une autre méthode, et de donner une généralisation du théorème 2.

THÉORÈME 3. - Soient $\alpha > 1$ et $0 \leq q < \frac{1}{2}$; une condition suffisante pour que α appartienne à S est qu'il existe $\lambda \leq \lambda_0$, tel que

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{\psi(q)}{(1+n)^q}, \quad \text{avec } \psi(q) = \frac{1}{2e^{1-q} \alpha(\alpha+1)(1+(\log \lambda + 1)/(1-q))^{1-q}}.$$

Le principe consiste à généraliser celui du théorème 2 en utilisant t équations au lieu d'une seule.

Une valeur approchée de λ_0 est 18,6.

2. Lemmes.

LEMME 1. - Soient $r + 1$ formes linéaires indépendantes, à coefficients entiers rationnels, et à $s + 1$ variables, avec $r + 1 \leq s$,

$$y_i = \sum_{j=0}^s a_j v_{j,i}, \quad 0 \leq i \leq r;$$

il existe une solution (a_0, \dots, a_s) appartenant à \mathbb{Z}^{s+1} , vérifiant

$$y_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^s |a_i| \leq (r+2)(s-r)D^{1/(s-r)},$$

où D est un majorant des déterminants d'ordre $r + 1$.

Démonstration. - Supposons par exemple que le déterminant d'ordre $r + 1$ de valeur absolue maximum soit

$$D(V_0, \dots, V_r) = \begin{vmatrix} v_{0,0} & \dots & v_{0,r} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{r,0} & \dots & v_{r,r} \end{vmatrix}, \quad \text{où } V_j = \begin{pmatrix} v_{j,0} \\ \vdots \\ v_{j,r} \end{pmatrix} \quad \text{et } D = |D(V_0, \dots, V_r)|,$$

et résolvons le système d'inégalités

$$(I) \quad \left\{ |y_i| < 1, \quad i \in \{0, \dots, r\} \right\}.$$

Complétons le système (I) par $s - r$ inéquations.

$$(II) \quad \begin{cases} |y_i| < 1, & i \in \{0, \dots, r\}, \\ |a_j| \leq A, & r+1 \leq j \leq s. \end{cases}$$

Le théorème de Minkowski permet d'affirmer que si $D > A^{s-r}$, le système (II) admet une solution (a_0, \dots, a_s) appartenant à \mathbb{Z}^{s+1} . Posons $A = D^{1/(s-r)}$; alors

$|a_j| \leq D^{1/(s-r)}$ pour $j \in \{r+1, \dots, s\}$. Mais

$$a_0 v_{0,0} + \dots + a_r v_{r,0} = - (a_{r+1} v_{r+1,0} + \dots + a_s v_{s,0}) ,$$

...

$$a_0 v_{r,0} + \dots + a_r v_{r,r} = - (a_{r+1} v_{r+1,r} + \dots + a_s v_{s,r}) ,$$

soit

$$|a_i| = \left| \sum_{j=r+1}^s a_j \frac{D(v_0, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_r)}{D} \right| ,$$

ou encore

$$|a_i| \leq (s-r) D^{1/(s-r)} , \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, r\} ,$$

d'où

$$\sum_{i=0}^s |a_i| \leq (r+2)(s-r) D^{1/(s-r)} .$$

LEMME 2. - Soit le système (I) :

$$(I) \quad \left\{ y_i = a_0 u_i + \dots + a_s u_{s+i} = 0 , \quad i \in \{0, \dots, t\} , \right.$$

avec $t \leq s-1$ et $u_i = \lambda \alpha^i - \epsilon_i$.

Si le système est de rang $r+1$ où $r \leq t$, il existe une solution de (I) appartenant à \mathbb{Z}^{s+1} , telle que

$$\sum_{i=0}^s |a_i| \leq (r+2)(s-r) [(s+1) \alpha^{2s} (\lambda+1)^2 (1+\alpha)^{2r} A_{s,r}]^{1/2(s-r)} ,$$

où

$$A_{s,r} = \sup_{\mu} \prod_{i=1}^{i=r} \rho_{\mu(i),s,r} ,$$

$\mu(i)$ désignant une suite de r entiers distincts compris entre 1 et t , et

$$\rho_{j,s,r} = \sup_{\nu} \sum_{i=1}^r \epsilon_{\nu(i)}^2 ,$$

$\nu(i)$ désignant une suite de $r+1$ entiers distincts compris entre $j-1$ et $j+s$.

Démonstration. - Le système est de rang $r+1$, il est alors équivalent à

$$(II) \begin{cases} y_0 = 0, \\ y_{\mu(1)} = 0, \\ \dots \\ y_{\mu(r)} = 0. \end{cases} \quad \text{avec } 1 \leq \mu(1) < \mu(2) < \dots < \mu(r) \leq t,$$

Les déterminants d'ordre $r + 1$ extraits du système (II) sont alors identiques à ceux d'ordre $r + 1$ extraits du système (III),

$$(III) \begin{cases} z_0 = 0, & z_0 = y_0, \\ z_i = \sum_{j=0}^s a_j \eta_{j,i}, \end{cases}$$

avec

$$\eta_{j,i} = u_{\mu(i)+j} - \alpha u_{\mu(i)+j-1},$$

ou encore

$$\eta_{j,i} = \alpha \varepsilon_{\mu(i)+j-1} - \varepsilon_{\mu(i)+j}.$$

En appliquant la majoration de Hadamard relative aux déterminants, on obtient

$$|D|^2 \leq (r + 1) \alpha^{2s} (\lambda + 1)^2 (1 + \alpha)^{2r} A_{s,r},$$

et le résultat du lemme s'obtient à l'aide du lemme 1.

En utilisant les notations du lemme 2, on a la condition suivante.

LEMME 3. - Pour que la relation $a_0 u_n + \dots + a_s u_{n+s} = 0$ soit vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il suffit que, $\forall n \geq t$,

$$(A) \quad (1 + \alpha)^{2s} \alpha^{2s} (\lambda + 1)^2 (r + 2)^{2(s-r)} (s - r)^{2(s-r)} (r + 1) \sigma_n^{2(s-r)} A_{s,r} < 1,$$

en posant

$$\sigma_n = \sup_{n \leq i \leq n+s+1} |\varepsilon_i|.$$

Démonstration. - Il suffit que

$$|a_0(\varepsilon_n - \alpha \varepsilon_{n-1}) + \dots + a_s(\varepsilon_{n+s} - \alpha \varepsilon_{n+s-1})| < 1, \quad \text{pour } n \geq t + 1,$$

soit

$$\sum_{i=0}^s |a_i| (1 + \alpha) \sigma_n < 1, \quad \text{pour } n \geq t,$$

et en appliquant le lemme 2, on obtient la condition (A).

3. Remarques.

(a) Si $r = t = s - 1$, en utilisant l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, on a

$$A_{s,r} \leq S_{2(s-1)}^{s-1} 2^{s-1}, \quad \text{où } S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 (i+1).$$

(b) Si $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon_n'$, avec ε_n' décroissant avec n , alors

$$A_{s,r} \leq S_{2r}^{\prime r} 2^r.$$

En particulier, si $\varepsilon_n' = \frac{\psi}{(n+1)^q}$ et $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$, on a

$$S_n' \leq 2\psi^2 (n+1)^{1-2q},$$

et la condition (A) devient :

$$(A') \frac{\psi^{2s} (1+\alpha)^{2s} \alpha^{2s} (\lambda+1)^2 (r+2)^{2(s-r)} (s-r)^{2(s-r)} (r+1)^{r(1-2q)+1} 2^{(3-2q)r}}{(t+1)^{2q(s-r)}} < 1,$$

ou encore

$$(A'') \frac{(1+\alpha)^{2s} \alpha^{2s} \psi^{2s} (\lambda+1)^2 (r+2)^{2(s-r)} (s-r)^{2(s-r)} 2^{(3-2q)r} (r+1) s^r}{(t+1)^{2qs}} < 1.$$

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ n'est pas une fraction rationnelle, quel que soit r_0 , il existe $r \geq r_0$ tel que $D_0^r \neq 0$. Soit $s = r + 1$, alors le rang du système (I) est $s - 1$. Donc quel que soit s_0 , il existe $s \geq s_0$ tel que $s - r = 1$.

4. Applications.

1° Si $\lim S_n = 0$, en utilisant les remarques 3 (a) et 3 (c), on retrouve le théorème 1'.

2° Si $q = \frac{1}{2}$, en utilisant les remarques 3 (b) et 3 (a) et le lemme 3, on obtient la condition :

$$\exists s, \text{ tel que } s - r = 1 \text{ et } \psi(1+\alpha) \alpha(\lambda+1)^{1/s} (s+1)^{1/s} 2 < 1;$$

et la remarque 3 (c) permet de retrouver le théorème 1'.

3° Si $q = 0$: Dans la condition (A''), t n'intervient pas. On choisit donc t de façon que r prenne le moins de valeur possible, soit $t = 0$, $r = 0$, et on obtient la condition suivante,

$$\psi(1 + \alpha) \alpha(\lambda + 1)^{1/s} 2s < 1 ,$$

et on retrouve ainsi le théorème 2.

4° $0 < q < \frac{1}{2}$: Dans la condition (A''), les termes dépendants de r ,

$$f(s, r) = 2^{(3-2q)r} (s-r)^{2(s-r)} s^r \cdot (r+1) \cdot (r+2)^{2(s-r)}$$

est une fonction décroissante de r , si $s < 7$. En prenant $t = s - 1$, on obtient alors

$$\psi(1 + \alpha) \alpha(\lambda + 1)^{1/s} 2s^{1-q} < 1 .$$

On détermine s de façon que ψ soit maximum, soit $s = \left[\frac{\log \lambda + 1}{1 - q} \right] + 1$, et on obtient

$$\psi \leq \frac{1}{2e^{1-q} \alpha(\alpha + 1) (1 + (\log \lambda + 1)/(1 - q))^{1-q}} .$$

La condition sur $s < 7$ entraîne la restriction $\lambda \leq \lambda_0$ avec $\lambda_0 \simeq 18,6$. D'où le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math., Paris, 1938).
- [2] PISOT (Charles). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946/47, p. 153-160.
- [3] SALEM (Raphaël). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, D. C. Heath and Company, 1963 (Heath mathematical Monographs).

(Texte reçu le 8 juillet 1970)

Martine PATHIAUX
87 rue de Paris
78 - SAINT-REMY-les-Chevreuses
