Marc Krasner

Domaines complets d’existence des fonctions analytiques uniformes dans les corps valués complets

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 11, nº 2 (1969-1970), exp. nº 18, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1969-1970__11_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
11e année, 1969/70, n° 18, 8 p.

4 mai 1970

DOMAINES COMPLETS D'EXISTENCE DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES DANS LES CORPS VALUÉS COMPLETS

par Marc KRASNER

Résumé

1. - Dans tout ce qui suivra, il s'agira de fonctions analytiques uniformes au sens de l'auteur, définies par le prolongement analytique localement uniforme à partir des éléments analytiques, qui sont des limites uniformes de fractions rationnelles sur des ensembles quasi-connexes des corps valués complets algébriquement clos (1). Il a été démontré par l'auteur, en 1957 (2), qu'un tel prolongement ne conduit jamais (et quel que soit le corps algébriquement clos k, où on l'effectue) qu'aux fonctions globalement uniformes. Ainsi, si l'on fixe un élément analytique $f : D \twoheadrightarrow k$, où D est un ensemble quasi-connexe du "projectivisé" $k' = k \cup \{\infty\}$ d'un corps valué complet et algébriquement clos k, il existe, pour tout surcorps (valué) complet et algébriquement clos K de k, le domaine d'existence maximal $A_K(f) \in K' = K \cup \{\infty\}$ de la fonction analytique $F_K(f)$ définie par f : à savoir, $A_K(f)$ est l'ensemble de tous les points de K' qu'on peut atteindre en prolongeant un nombre fini de fois quelque élément analytique F de K, qui domine f (autrement dit, le support de F contient D, et f est la restriction de F à D). Il a été prouvé que de tels F existent (2), et $A_K(f)$ ne dépend pas de leur choix.

Soit D un ensemble ouvert de K' (par rapport à sa topologie de "sphère de Riemann"), et soit $C(D)$ le cercle minimal contenant D (qui peut être, en particulier, $= K$ ou $= K'$). Alors on appelle un <u>trou</u> de D, un ensemble T qui est : soit le complément $K' \mathbin{..} C(D)$ de $C(D)$ dans K', soit un cercle maximal de $C(D) \mathbin{..} D$, autrement dit un cercle $T \subset C(D)$, qui soit disjoint avec D, mais tel que tout cercle $T' \supset T$ ne le soit plus. Appelons $\tau_K(f)$ l'ensemble des trous de $A_K(f)$.

---

(1) Voir mes Notes [1] de 1954 et mon travail [3]. On sait qu'il existe actuellement d'autres théories de prolongement analytique dans l'ultramétrique, dont celle de TATE partant des éléments analytiques, qui sont (pour la dimension 1) beaucoup plus particuliers (et conduisent à une classe beaucoup plus étroite de fonctions), tandis que des éléments analytiques plus généraux ont été introduits récemment par A. MOTZKIN et P. ROBBA.

(2) Voir mes Notes [2] et mon travail [3], § 5.

Si L est une extension valuée algébriquement close et complète de K, et si T est un trou de $A_K(f)$, on appelle <u>L-image de</u> T, l'ensemble suivant T_L : si $T = K' \,..\, C(D)$, T_L est le complément dans L' du plus grand cercle de L' disjoint avec T ; et si $T \in C(D)$, T_L est le plus petit cercle de L' contenant T.

On peut montrer, en se basant sur les théorèmes mittag-leffleriens (3), que, quand on passe de K à L, on a

$$A_L(f) \supseteq A_K(f) \qquad \text{et} \qquad L' \,..\, A_L(f) \supseteq K' \,..\, A_K(f) \quad .$$

Mais, si l'on considère un trou $T \in \tau_K(f)$, il peut arriver que T_L ne soit pas disjoint avec $A_L(f)$. Ainsi, quand on passe du prolongement de f dans K au prolongement de f dans L, plusieurs phénomènes peuvent se produire :

1° Si $T \in \tau_K(f)$, T_L peut cesser d'être un trou de $A_L(f)$, mais contient un ensemble de trous de cet ensemble (cet ensemble de trous ne peut pas être vide, car sa réunion doit contenir T). On dira, dans ce cas, que le trou T <u>se disloque</u> quand on passe de K à L ;

2° Si le trou (forcément non circonférencié) T a le diamètre (semi-réel) r^-, où r appartient au groupe de valuation de L sans appartenir à celui de K, le trou de $A_L(f)$, contenant T, n'est pas T_L, mais le cercle de rayon r, qui le contient. On dit, dans ce cas, que le trou T <u>se circonférencie</u> ;

3° Des trous nouveaux, disjoints avec K, peuvent apparaître dans $\tau_L(f)$.

$A_K(f)$ est dit le domaine d'existence <u>définitif</u> de la fonction analytique uniforme définie par f, si, pour toute extension valuée algébriquement close et complète L de K, le passage $K \subset L$ ne fait disloquer aucun trou $T \in \tau_K(f)$, ni apparaître aucun trou nouveau. On peut prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Si l'extension valuée complète et algébriquement close</u> K <u>de</u> k <u>est maximalement complète, et si son corps résiduel n'est pas dénombrable,</u> $A_K(f)$ <u>est le domaine d'existence définitif de la fonction analytique uniforme définie par un élément analytique</u> f <u>de</u> k.

2. - Je rappelle les définitions d'un ensemble quasi-connexe et d'un ensemble quasi-connexe régulier d'un corps valué complet K. Soit $D \subsetneq K'$ un ensemble ayant au moins deux points, et soit $a \in D$, $a \neq \infty$. Soit $R(D)$ le diamètre semi-réel de D. L'ensemble D est dit <u>ultra-ouvert en</u> a, si, pour tout nombre réel

---

(3) Voir mes deux dernières Notes [2] et mon travail [3], § 6.

$r \lesssim R(D)$, $C(a\,,\,r) \,..\, D$ (où $C(a\,,\,r)$ est le cercle circonférencié de K' , de centre a et de rayon r) est contenu dans la réunion d'un nombre fini de circonférences (dans K') de centre a . On dit que D est <u>quasi-connexe</u>, s'il est ultra-ouvert en chacun de ses points $a \neq \infty$. Si K est discrètement valué, les ensembles quasi-connexes coïncident avec les ensembles ouverts, mais tel n'est plus le cas si la valuation de K est dense, en particulier s'il est algébriquement clos. On sait (4) que la quasi-connexité est préservée par les homographies non-singulières

$$x \dashrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}\,, \qquad \text{où} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \,,$$

que l'intersection d'une famille finie non disjointe et la réunion d'une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes est encore un tel ensemble. Il en résulte, en particulier, que $A_K(f)$ est toujours quasi-connexe.

Un ensemble quasi-connexe s'appelle <u>régulier</u>, s'il satisfait à la condition supplémentaire suivante : Pour tout cercle circonférencié $C = C(a\,,\,r) \subseteq C(D)$ et non disjoint avec D , le complément $C \,..\, D$ de D dans C est contenu dans la réunion d'un ensemble au plus dénombrable de cercles (non circonférenciés) de rayon (semi-réel) r^- . Il est clair que, si le corps résiduel de K est fini ou dénombrable, tout ensemble quasi-connexe de K est régulier, mais tel n'est pas le cas si le cardinal de ce corps résiduel est plus grand. La quasi-connexité régulière est aussi préservée par les homographies non singulières, et l'intersection non vide d'une famille finie d'ensembles quasi-connexes réguliers ainsi que la réunion d'une famille enchaînée de tels ensembles sont encore quasi-connexes réguliers.

On dira qu'un élément analytique est <u>régulier</u>, si son support l'est. J'ai prouvé (5) que, si K est une extension valuée complète algébriquement close d'un corps valué complet algébriquement clos k , tout élément analytique f de k est dominé par un élément analytique régulier convenable F de K . C'est précisément ce résultat qui a permis de prouver que les prolongements analytiques, à l'aide des éléments analytiques considérés, ne conduisent qu'aux fonctions globalement uniformes. Il en résulte aussi :

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout</u> $K \supseteq k$, $A_K(f)$ <u>est un ensemble quasi-connexe régulier.</u>

3. - On peut se poser les problèmes suivants :

(a) K étant un corps valué complet algébriquement clos, quels sous-ensembles

---

(4) Voir [1] et [3].

(5) Voir [2] et [3].

D de K' sont les domaines d'existence maximaux $A_K(f)$ des fonctions analytiques $F_K(f)$, définies par quelques éléments analytiques f de k (ou, ce qui revient au même, de quelque $k \in K$ complet et algébriquement clos) ? En particulier, lesquels parmi ces ensembles sont de tels domaines d'existence définitifs ?

(b) Etant donné un tel ensemble $D \subseteq K'$, décrire, d'une manière suffisamment explicite, toutes les fonctions analytiques dans K dont il est le domaine d'existence maximal, respectivement un tel domaine définitif.

Si la solution du problème (b) présente des difficultés, qui paraissent, pour le moment, insurmontables, j'ai pu, par contre, résoudre complètement le problème (a). Mais, comme je l'ai appris plus tard, Alhanan MOTZKIN l'avait déjà résolu (pour le cas particulier où K est le complété $\hat{\Omega}_p$ de la clôture algébrique d'un corps p-adique) deux ans plus tôt, dans sa thèse de l'Université de Los Angeles (inconnue à l'époque en France). La solution du cas général est la réciproque suivante du théorème 2 :

THÉORÈME 3. - Tout ensemble quasi-connexe régulier de K' est le domaine d'existence maximal de quelque fonction analytique uniforme f(X) de K , qu'on peut choisir de manière qu'il soit définitif si K est maximalement complet.

Comme le corps résiduel de $\hat{\Omega}_p$ est dénombrable et, par suite, tous les ensembles quasi-connexes y sont réguliers, le théorème 3 prend, dans ce cas particulier démontré par A. MOTZKIN, la forme :

THÉORÈME (A. MOTZKIN). - Tout ensemble quasi-connexe de $\hat{\Omega}_p$ est le domaine d'existence maximal d'une fonction analytique convenable f(X) de $\hat{\Omega}_p$.

L'idée de ma démonstration du théorème 3 et celle de A. MOTZKIN sont très proches. Cette idée est esquissée plus loin. En fait, la seule raison de ce que A. MOTZKIN n'a pas formulé et démontré le théorème 3 dans toute sa généralité a été qu'il ne connaissait pas, à l'époque, mes Notes des Comptes Rendus [2] et mon travail [3], où a été définie la notion d'élément analytique régulier, et a été démontrée l'existence de tels éléments dominant un élément analytique donné (d'ailleurs, A. MOTZKIN ne s'intéressait, à l'époque, qu'aux seules fonctions analytiques des $\hat{\Omega}_p$).

Idée de démonstration du théorème 3. - Comme l'analyticité et la quasi-connexité régulière, ainsi que le prolongement mutuel des éléments analytiques, sont préservés par toute homographie non singulière, il suffit de prouver le théorème sous l'hypothèse que ∞ appartient au domaine quasi-connexe régulier D . Ceci posé, on peut faire la description suivante de $\tau_K(D)$. Soit C_0 le plus petit cercle contenant le complément (dans le corps algébriquement clos considéré K) $K' .. D$ de D . Si C_o est non circonférencié, on peut montrer, en se basant sur la définition des ensembles quasi-connexes, que $C_o = K' .. D$. Si $C_o = K' .. D$, on a $\tau_K(D) = \{C_o\}$. Sinon, soit r_o le diamètre (semi-réel) $d(C_o)$ de C_o (r_o est réel, car C_o est circonférencié). Alors, à cause de la régularité de D et de $C_o \neq K' .. D$, il existe au moins deux, et au plus un ensemble dénombrable de sous-cercles $\overline{C}_{o,i_1}$ de C_o de rayon r_o^- , tels que $\overline{C}_{o,i_1} \not\subset D$. Soit C_{o,i_1} le plus petit cercle contenant $\overline{C}_{o,i_1} .. D$. Si $C_{o,i_1} \subset K' .. D$ (ce qui est certainement le cas s'il est non circonférencié), c'est un trou de D , et on a $C_{o,i_1} \in \tau_K(D)$. Sinon, si $r_{o,i_1} = d(C_{o,i_1})$, il existe au moins deux, et au plus un, ensembles dénombrables de sous-cercles $\overline{C}_{o,i_1,i_2}$ de C_{o,i_1} de rayon $(r_{o,i_1})^-$, tels que $\overline{C}_{o,i_1,i_2} \not\subset D$, et soit C_{o,i_1,i_2} le plus petit cercle contenant $\overline{C}_{o,i_1,i_2} .. D$. Un C_{o,i_1,i_2} peut être déjà un trou de D , sinon il est circonférencié et, r_{o,i_1,i_2} étant son rayon, contient au moins deux, et au plus un, ensembles dénombrables de sous-cercles $\overline{C}_{o,i_1,i_2,i_3}$ de rayon $(r_{o,i_1,i_2})^-$, non contenus dans D . Chaque $\overline{C}_{o,i_1,i_2,i_3}$ contient le plus petit cercle C_{o,i_1,i_2,i_3} contenant $\overline{C}_{o,i_1,i_2,i_3} .. D$, auquel on peut appliquer, de nouveau, le même procédé. Finalement, après l'application ad infinitum du procédé décrit, on aboutit à la situation suivante :

(A) On obtient un ensemble I de vecteurs $i^{(s)} = (0 , i_1 , i_2 , \ldots , i_s) \in \underset{\sim}{N}^{s+1}$ $(s = 0 , 1 , 2 , \ldots)$, tel que :

1° Si un vecteur $(0 , i_1 , \ldots , i_s) \in I$, tout son début $(0 , i_1 , \ldots , i_t)$, où $t < s$, appartient aussi à I ;

2° Si un vecteur $(0 , i_1 , \ldots , i_{s-1})$ est prolongeable, autrement dit s'il est le début d'un vecteur, $(0 , i_1 , \ldots , i_{s-1} , i_s) \in I$, l'ensemble des valeurs, que prend l'indice i_s dans ses prolongements I , est un début, ayant au moins deux éléments de la suite $0 , 1 , 2 , \ldots$ des nombres naturels.

(B) Une application ξ : $(0 , i_1 , \ldots , i_s) \to C_{o,i_1,\ldots,i_s}$ de I dans l'ensemble des cercles de K , telle que :

1° $C_{o,i_1,\ldots,i_{s-1},i_s} \subset C_{o,i,\ldots,i_{s-1}}$;

2° Si $(0 , i , \ldots , i_s) \in I$ est prolongeable, $C_{o,i_1,\ldots,i_s}$ est circonférencié.

Les cercles $C_{o,i_1,\dots,i_s}$ seront dits les prétrous de D de rang s. Un tel prétrou est un trou de D, si, et seulement si, $(0, i_1, \dots, i_s) \in I$ n'est pas prolongeable, auquel cas il sera dit un trou accessible de D, et

$$p(C_{o,i_1,\dots,i_{s-1},i_s}) = r_{o,i,\dots,i_{s-1}} : r_{o,i,\dots,i_{s-1},i_s}$$

sera dit, dans ce cas, la profondeur du trou $T = C_{o,i_1,\dots,i_s}$ (cette profondeur est toujours $\geqslant 1^+ > 1$, et est un nombre réel si T est circonférencié). L'ensemble des trous accessibles de D sera noté $\tau_a(D)$, et un prétrou C de D sera dit accessible si $C .. D$ est une réunion de trous accessibles. Une suite infinie $(0, i_1, i_2, \dots, i_s, \dots)$ sera dite un fil de I, si, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$, son début $(0, i_1, \dots, i_s)$ appartient à I. Etant donné un tel fil, si l'intersection $\bigcap_s C_{o,i_1,\dots,i_s}$ n'est pas vide, elle est un trou de D, noté $C_{o,i_1,\dots,i_s,\dots}$ (si elle est vide, on attache au fil considéré un objet "idéal", noté de la même manière, et appelé un "trou caché" ; il est à remarquer que, si K est maximalement complet, l'intersection considérée n'est jamais vide, donc il n'existe pas de trous cachés). De tels trous seront appelés cantoriens, et leur ensemble sera noté $\tau_c(D)$. On montre qu'il n'y a pas d'autres trous qu'accessibles ou cantoriens : $\tau_K(D) = \tau_a(D) \cup \tau_c(D)$. D'autre part, si C est un prétrou non accessible, il existe au moins un trou cantorien $T \subseteq C$. En effet, il existe un point $P \in C$ n'appartenant à aucun trou accessible et, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$, un, et un seul, prétrou C_s de rang s tel que $P \in C_s$, et $T = \bigcap_s C_s$ est le trou cantorien cherché. On appellera largeur d'un trou cantorien, l'infimum, sur la droite réelle, des rayons $r_{o,i_1,\dots,i_s}$ des prétrous, dont il est l'intersection. Un trou (accessible ou cantorien) est dit ponctuel, s'il est réduit à un seul point.

Construisons, par une suite dénombrable de choix au plus dénombrables, une application $\varphi : L \to \tau_c(D)$ de l'ensemble (au plus dénombrable) L des prétrous inaccessibles de D dans celui $\tau_c(D)$ des trous cantoriens de D, qui satisfasse aux conditions :

(a) Pour tout $C \in L$, on a $\varphi.C \subset C$;

(b) Si $C, C' \in L$ sont tels que $\varphi.C \subseteq C' \subseteq C$, on a $\varphi.C' = \varphi.C$.

Si L_s est l'ensemble des prétrous appartenant à L, dont le rang est s, construisons successivement des sous-ensembles convenables $\hat{L}_s \subseteq L_s$, après avoir construit l'application φ sur les $\hat{L}_t$, $t < s$, déjà construits. On pose $\hat{L}_1 = L_1$, et on choisit arbitrairement, pour tout $C \in \hat{L}_1$, $\varphi.C$ parmi les trous cantoriens $T \subseteq C$, ce qui constitue le premier pas de construction. Supposons déjà effectués $s - 1$ premiers pas de construction, c'est-à-dire qu'on a déjà construit

$\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$, ... , $\hat{L}_{s-1}$, et φ sur leur réunion $\hat{L}^{(s-1)}$. Si φ à construire satisfait aux conditions (a) et (b), sa partie déjà construite définit φ sur l'ensemble $L^{o(s-1)}$ des prétrous appartenant à L , contenant quelque $\varphi.C$, où $C \in \hat{L}^{(s-1)}$. Et, pour que la partie de φ donnée sur $\hat{L}^{(s-1)}$ puisse se prolonger, en accord avec (a) et (b), à l'ensemble $L^{o(s-1)}$, il faut et il suffit que $\varphi.C$ et $\varphi.C' \neq \varphi.C$, où C , $C' \in \hat{L}^{(s-1)}$, ne soient jamais contenus dans un même prétrou $\subseteq C \cap C'$. Cette condition étant supposée satisfaite, posons $\hat{L}_s = L_s \,..\, L^{o(s-1)}$, et choisissons, pour chaque $C \in \hat{L}_s$, comme $\varphi.C$ un trou cantorien arbitraire $\subseteq C$. Soient C , $C' \in \hat{L}^{(s)} = \hat{L}^{(s-1)} \cup \hat{L}_s$. Si C , $C' \in \hat{L}^{(s-1)}$ et $\varphi.C \neq \varphi.C'$, il n'existe aucun prétrou $\subseteq C \cap C'$ contenant $\varphi.C$ et $\varphi.C'$. Si C , $C' \in \hat{L}_s$, et $C \neq C'$, C et C' sont disjoints, et on a la même conclusion. Enfin, si $C \in \hat{L}_s$ et $C' \in \hat{L}^{(s-1)}$, le prétrou C_s de rang s , contenant $\varphi.C$, appartient à $L^{o(s-1)}$, donc C_s est différent et, par suite, disjoint de C' , et on a $\varphi.C \not\subseteq C'$. Donc φ satisfait à la même condition sur $\hat{L}^{(s)}$, et la construction s'effectue sans obstacles.

Soit $\tau^o = \tau_a(D) \cup \varphi.L$. C'est un ensemble dénombrable de trous, et il existe des applications $T \to a(T)$ de τ^o dans K (dont on supposera en avoir choisi une), telles que la série $\sum_{T \in \tau^o} a(T)$ converge. D'autre part, si Γ est le groupe de valuation de K , soit $\gamma \to b(\gamma)$ une application de Γ dans K , telle que $|b(\gamma)| = \gamma$. Enfin, soit $T \to c(T)$ une application de l'ensemble $\tau(D)$ des trous de D dans K , telle que $c(T) \in T$. Enfin, comme d'habitude, $M_f^{(c)}(r)$ désigne, pour une série de Laurent $f(X) = \sum a_i(X-c)^i$ en $X - c$, et pour un r tel que $f(X)$ converge sur la circonférence $|X - c| = r$, le maximum $\max_i (|a_i| r^i)$ des termes de $f(X)$ sur cette circonférence.

Soient :

$F(X)$ une série de Laurent principale en X , qui converge si $|X| \geqslant 1$, et diverge si $|X| < 1$;

$G(X)$ une série de Laurent principale en X , qui converge si $|X| > 1$, et est telle que $M_G(r) \to +\infty^-$ quand $r \to 1^+$ (cette série diverge si $|X| \leqslant 1$) ;

$H(X) = X^{-1}$.

Soit $T \in \tau^o$. Faisons-lui correspondre, comme suit, une série de Laurent $f_T(X)$ en $X - c(T)$:

Si T est accessible et non circonférencié, et si le diamètre de T est r^- , on pose

$$f_T(X) = a(T)\ F(b(r)^{-1}[X - c(T)]) \quad ;$$