Marthe Grandet-Hugot

P.-V. éléments dans un corps de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 16, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 12e année, 1970/71, n° 16, 11 p.

15 mars 1971

P.-V. ÉLÉMENTS DANS UN CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Marthe GRANDET-HUGOT

1. Introduction et notations.

On appelle nombre de Pisot-Vijayaraghavan (ou plus simplement nombre P.-V.), un entier algébrique réel supérieur à 1, dont tous les conjugués par rapport à $\mathbb{Q}$ sont de valeur absolue strictement inférieure à 1. Nous noterons par S l'ensemble des nombres P.-V. L'ensemble S possède des propriétés remarquables, nous en rappellerons quelques-unes avant de les généraliser à d'autres ensembles de nombres algébriques.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel $\theta > 1$ appartienne à S, est qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, si l'on pose $\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$, où $u_n \in \mathbb{Z}$, $-\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ converge, de plus $\lambda \in \mathbb{Q}(\theta)$. Ce résultat a été prouvé en associant à la suite $\{u_n\}$ la fonction à variable complexe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \ ;$$

on montre alors que f est une fraction rationnelle, d'où l'on déduit que $\theta \in S$ [10].

En associant à une suite convergente d'éléments $\theta_\lambda \in S$ une famille compacte de fractions rationnelles, SALEM [11] a montré que l'ensemble S est fermé. A partir de ce résultat, on peut obtenir une caractérisation des ensembles dérivés successifs de S ([6], [8]).

On peut étendre certaines de ces propriétés, en particulier ce qui concerne la répartition modulo 1, à des ensembles d'éléments algébriques dans l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ [2].

Par ailleurs, H. G. SENGE [12] a construit des ensembles fermés de nombres algébriques sur un corps K, dont la définition rappelle celles des P.-V. éléments. Nous étudierons d'autres ensembles fermés, et en donnerons une caractérisation.

Pour un corps quadratique imaginaire, l'étude est analogue à ce qu'elle est pour le corps des rationnels [8]. Nous supposerons donc que le corps de base K n'est pas un tel corps.

Nous désignerons par K un corps de nombres algébriques de degré s, dans lequel l'anneau A des entiers algébriques est partout dense (K n'est pas un corps quadratique imaginaire), V_∞ est l'ensemble des valeurs absolues archimédiennes de K , V est un ensemble fini de valeurs absolues K contenant V . Si v est une valeur absolue sur K , on désignera par K_v la complétion de K pour cette valeur absolue, par Γ_v le groupe des valeurs absolues de K_v , et par Ω_v la complétion de sa clôture algébrique.

De plus, nous poserons

$$\Omega_V = \prod_{v \in V} \Omega_v \qquad \text{et} \qquad \Omega_\infty = \prod_{v \in V_\infty} \Omega_v \ .$$

2. Fonctions à caractéristique bornée dans Ω_V .

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de donner une généralisation du théorème suivant dû à D. CANTOR :

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in A$, $z \in \underline{C}$, une série de puissances. Supposons que les fonctions conjuguées $f^{(i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} z^n$ $(i = 1 , \ldots , s)$ soient à caractéristique bornée dans le disque $|z| < \rho_i$ (c'est-à-dire soient le quotient de deux fonctions régulières bornées), où $\prod_{i=1}^{s} \rho_i \geqslant 1$. Alors f est une fraction rationnelle.

Auparavant, nous définirons les fonctions à caractéristique bornée dans un corps valué complet.

Soit Ω un corps valué complet, soit f une fonction définie pour $\{x \in \Omega \ ; \ |x| < \rho\}$; on dit que f est à caractéristique bornée dans $|x| < \rho$, si elle est le quotient de deux fonctions régulières bornées pour $|x| < \rho$.

Soit f une fonction à caractéristique bornée pour $|x| < 1$, et régulière à l'origine ; alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ;$$

nous désignerons par A_n son déterminant de Kronecker d'ordre n ,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_n \\ & & \\ u_n & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} \ .$$

D. CANTOR a montré que, si Ω est muni d'une valeur absolue archimédienne, alors

$|\Delta_n|^{1/n} = o(1)$; nous allons voir que, si la valeur absolue est ultramétrique, alors $|\Delta_n|^{1/n} = o(1)$. Ce résultat se prouve de manière analogue à celui de CANTOR.

On en déduit facilement que, si f est à caractéristique bornée pour $|x|_v < \rho$, alors

$$\rho^n |\Delta_n|^{2/n} = o(1) , \qquad \text{si } v \text{ est archimédienne} ,$$

$$\rho^n |\Delta_n|_v^{2/n} = o(1) , \qquad \text{si } v \text{ est ultramétrique} .$$

Soit maintenant V un ensemble fini de valeurs absolues de K contenant V_∞ , nous poserons

$$K^V = \{x \in K \mid |x|_v \leq 1 \text{ pour } v \notin V\} ;$$

alors K^V est un sous-anneau de K contenant A ; nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in K^V$, une fonction à caractéristique bornée pour $|x|_0 < \rho_v$, $v \in V$, où $\prod_{v \in V} \rho_v \geq 1$. Alors f est une fraction rationnelle.

Preuve. - D'après ce qui précède, à partir d'un certain rang,

$$\rho_v^n |\Delta_n|_v^{2/n} < \varepsilon , \qquad \text{pour } v \in V_\infty ,$$

$$\rho_v^n |\Delta_n|_v^{2/n} \leq M_v , \qquad \text{pour } v \in V - V_\infty ,$$

$$|\Delta_n|_v \leq 1 , \qquad \text{pour } v \notin V ,$$

d'où

$$\prod_v |\Delta_n|_v \leq (M\varepsilon^s)^{n/2} \prod_{v \in V} \rho_v^{-n^2} ;$$

donc, si $\prod_{v \in V} \rho_v \geq 1$, on peut choisir ε assez petit pour que $\lim_{n \to \infty} \prod_v |\Delta_n|_v = 0$, donc, à partir d'un certain rang, $\Delta_n = 0$, f est donc une fraction rationnelle.

Par ailleurs, K^V , qui est une intersection d'anneaux de valuation, est un anneau de Fatou [1], donc, si $f(x) = \sum a_n x^n$, $a_n \in K^V$ est une fraction rationnelle, ses pôles sont les inverses d'entiers algébriques sur K^V .

3. Familles compactes de fractions rationnelles.

Nous allons considérer des familles de fractions rationnelles analogues à celles qui ont été associées à l'ensemble S ([6], [11]).

DÉFINITION 1. - Soit $\mathfrak{F}(K , V , r , h , \delta)$ la famille des fractions rationnelles non constantes ayant les propriétés suivantes :

(1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de l'origine, et $a_n \in K^V$, $x \in \Omega$;

(2) f a au plus h_v pôles où $0 \leqslant h_v$ dans le disque $|x|_v < r_v$, $v \in V$, et ces pôles sont dans la couronne $0 < \delta_v < |x|_v < r_v$;

(3) Pour $|x|_v = r_v$, $|f(x)|_v \leqslant 1$ si $v \in V_\infty$, et pour $r'_v < |x|_v < r_v$, $|f(x)|_0 \leqslant 1$ si $v \in V - V_\infty$;

(4) $\prod_{v\in V} r_v \geqslant 1$.

Cette définition est légèrement différente de celle de SENGE [12].

Nous allons poser

$$h = \{h_v\}_{v\in V} , \qquad r = \{r_v\}_{v\in V} , \qquad \delta = \{\delta_v\}_{v\in V} .$$

Nous allons alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - La famille $\mathfrak{F}(K , V , r , h , \delta)$ est compacte.

Preuve. - Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de fonctions de $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(K , V , r , h , \delta)$; nous supposons que toutes les fonctions f_λ ont exactement k_v pôles $(0 \leqslant k_v \leqslant h_v)$ dans la couronne

$$0 < \delta_v \leqslant |x|_v < r_v , \qquad v \in V \quad \text{de } \Omega_V \ ;$$

nous désignerons ces pôles par $\alpha_{1,\lambda} , \dots , \alpha_{k_v,\lambda}$.

(a) $v \in V_\infty$. Posons

$$\varphi_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_{i,\lambda} - x)r}{r^2 - \bar{\alpha}_{i,\lambda}\, x} \ ;$$

si $k_v = 0$, nous poserons simplement $\varphi_\lambda(x) = 1$. Alors φ_λ est holomorphe pour $\{x \in \Omega_\infty \mid |x|_v < r_v\}$, et $|x|_v = r_v \implies |\varphi_\lambda(x)|_v = 1$. Il en résulte que

$$|\varphi_\lambda(x)\ f_\lambda(x)|_v \leqslant 1 , \qquad \text{pour } \{x \in \Omega_\infty \mid |x|_v = r_v\} \ ;$$

ces fonctions forment donc une famille compacte $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\underset{\sim}{N}}$, de laquelle on peut extraire une suite uniformément convergente dans tout compact de $\{x \in \Omega_\infty \mid |x|_v < r_v\}$;

nous désignerons par F la limite de cette suite.

Par ailleurs, quitte à extraire de la suite donnée une suite partielle, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty} \alpha_{i,\lambda} = \alpha_i \ , \qquad \text{avec} \quad 0 < \delta_v \leqslant |\alpha_i|_v \leqslant r_v \quad \text{pour} \quad v \in V_\infty \ .$$

Il en résulte que la suite $\{\varphi_\lambda\}$ converge uniformément vers φ définie par

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_i - x)r}{r^2 - \overline{\alpha}_i \, x} \ ,$$

et $|x|_v = r_v \implies |\varphi(x)|_v = 1$. Soit $f(x) = \lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda(x)$, alors $f(x) = \dfrac{F(x)}{\varphi(x)}$, et f admet au plus h_v pôles dans la couronne $\delta_v \leqslant |x|_v < r_v$.

Considérons maintenant les développements de Taylor de f_λ et f au voisinage de l'origine :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda,n} \, x^n \ , \qquad a_{\lambda,n} \in K^V \ ,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \ ;$$

étant donnée la convergence uniforme de la suite f_λ vers f dans tout compact de $|x|_v < \delta_v$, on a

$$a_n = \lim_{\lambda\to\infty} a_{\lambda,n} \ .$$

Soit $\eta_v < \delta_v$, alors

$$\max_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)| = \max_{|x|_v=\eta_v} \left|\frac{F_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(x)}\right|_v \ .$$

Or F_λ est holomorphe pour $|x|_v \leqslant r_v$, et $|F_\lambda(x)|_v \leqslant 1$ pour $|x|_v = r_v$. Par ailleurs, la suite $\{\alpha_{i,\lambda}\}$ converge vers α_i , $|\alpha_i|_v \leqslant r_v$, donc

$$|\varphi_\lambda(x)|_v \geqslant \left|\frac{r_v(\delta_v - \eta_v)}{r_v^2 + \eta_v \, r_v}\right|^{k_v} \ , \qquad \text{pour} \quad |x|_v = \eta_v \ .$$

On peut donc trouver une constante M_v telle que

$$\max_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leqslant M_v \ ;$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy,

$$|a_{\lambda,n}|_v \leqslant \frac{M_v}{\eta_v^n} , \qquad \text{pour} \quad v \in V_\infty \ .$$

(b) $v \in V - V_\infty$. Posons

$$\varphi_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{x}{\alpha_{i,\lambda}}\right) , \qquad \text{si} \quad k_v \neq 0 \ ,$$

$$\varphi_\lambda(x) = 1 , \qquad \text{si} \quad k_v = 0 \ ;$$

les $|\alpha_{i,\lambda}|_v$ sont bornées, et $\varphi_\lambda(x) \in K_v[x]$, et K_v étant à valuation discrète, on peut supposer, quitte à extraire une suite partielle, qu'à partir d'un certain rang tous les φ_λ ont même polygone de Newton, ils forment donc une famille compacte.

Soit $\eta_v \in \Gamma_v$, $\eta_v < \delta_v$, et soit r''_v un nombre tel que $r'_v < r''_v < r_v$; alors, pour $x \in \hat{\Omega}_v$,

$$\max_{|x|_v = \eta_v} |f_\lambda(x)|_v = \max_{|x|_v=\eta_v} |\varphi_\lambda(x)\ f_\lambda(x)|_v$$

$$= \max_{|x|_v=\eta_v} |F_\lambda(x)|_v \ ;$$

si l'on pose $F_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x)\ f_\lambda(x)$, et, puisque F_λ est holomorphe pour $|x|_v < r_v$,

$$\max_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leqslant \max_{|x|_v=r''_v} |F_\lambda(x)|_v \leqslant \max_{|x|_v=r''_v} |\varphi_\lambda(x)|_v \ ,$$

donc

$$\max_{|x|_v=\eta_v} |f_\lambda(x)|_v \leqslant \left(\frac{r_v}{\delta_v}\right)^{k_v} ,$$

et, d'après les inégalités de Cauchy,

$$|a_{\lambda,n}|_v \leqslant \left(\frac{r_v}{\delta_v}\right)^{k_v} \frac{1}{\eta_v^n} \ .$$

(c) Pour $v \notin V$, on a $|a_{\lambda,n}|_v \leqslant 1$.

On déduit des résultats précédents que

$$H(a_{\lambda,n}) = \prod_v \max(1 \ , \ |a_{\lambda,n}|_v) \leqslant M_n \ .$$

M_n ne dépendant pas de λ , les $a_{\lambda,n}$ appartiennent à un ensemble de hauteur bornée, et forment donc une suite discrète, et, à partir d'un certain rang, $a_{\lambda,n} = a_n$ et

$$a_n = \lim_{\lambda\to\infty} a_{\lambda,n} \in K^V .$$

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Nous avons vu que $|f_\lambda(x)|_v$ est uniformément bornée pour $|x|_v \leq \eta_v$, de plus les séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda,n} x^n$ convergent faiblement vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donc, pour $|x|_v \leq \eta_v$, la suite $\{f_\lambda\}$ converge uniformément vers f ([7], p. 9, lemme 1.3).

De plus, de la suite des polynômes $\{\varphi_\lambda\}$, on peut extraire une suite partielle convergeant vers un polynôme φ . Et la suite des fonctions $\{F_\lambda\}$, qui est uniformément bornée dans $|x|_v \leq r_v$, converge faiblement vers F , donc converge uniformément, et F est holomorphe et bornée pour $|x|_v < r_v$.

Il résulte de ce qui précède que $f = \frac{F}{\varphi}$ est à caractéristique bornée pour $|x|_v < r_v$, donc est une fraction rationnelle dont les pôles éventuels sont les inverses d'entiers algébriques sur K^V . Et $f \in \mathfrak{F}(K , V , r , h , \delta)$.

Nous allons maintenant étudier des sous-familles compactes de $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(K , V , r , h , \delta)$, et à certaines d'entre elles nous pourrons associer des ensembles fermés de nombres algébriques.

DÉFINITION 2. - <u>Nous désignerons par</u> $\mathfrak{F}_1(K , V , r , h , \delta)$ <u>la sous-famille de</u> $\mathfrak{F}$ <u>ainsi définie</u> :

(1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \quad a_n \in K^V$;

(2) f <u>admet au plus</u> h_v <u>pôles dans</u> $|x|_v < r_v$ <u>qui sont situés dans la couronne</u> $0 < \delta_v \leq |x|_v < r_v$;

(3) $|f(x)|_v \leq 1$, <u>pour</u> $|x|_v = r_v$ <u>si</u> $v \in V_\infty$, <u>et pour</u> $r'_v < |x|_v < r_v$ <u>si</u> $v \in V - V_\infty$;

(4) $\prod_{r\in V} r_v \geq 1$;

(5) $|f(0)|_v \geq 1$, <u>pour tout</u> $v \in V$.

Il est clair que <u>cette famille est compacte</u>, puisque, si $|f_\lambda(0)|_v \geq 1$, alors $|f(0)|_v \geq 1$.

De plus, la condition (5) entraîne que, pour $v \in V_\infty$, f a au moins un pôle dans $|x|_v \leq r_v$, tandis que, pour pouvoir affirmer l'existence d'au moins un pôle dans $|x|_v < r_v$ et $v \in V - V_\infty$, il faudrait une condition supplémentaire.

DÉFINITION 3. - Soit V' un sous-ensemble quelconque de V ; nous désignerons par $\mathfrak{F}_{V'}(K , V , r , h , \delta)$ la sous-famille de $\mathfrak{F}$ vérifiant $|f(0)|_v \geqslant 1$ pour $v \in V'$.

On a également une famille compacte de fractions rationnelles, et on peut affirmer que, pour $v \in V' \cap V_\infty$, f admet au moins un pôle dans $|x|_v \leqslant r_v$ [5].

4. Ensembles fermés d'entiers algébriques.

Si $V = V_\infty$, alors, pour $f \in \mathfrak{F}$, $a_n \in A$, et les pôles de f sont les inverses d'entiers algébriques.

DÉFINITION 4. - Nous désignerons par $S_{V'}(K)$ l'ensemble suivant : $\theta \in S_{V'}(K)$ si, et seulement si :

(1) $\theta \in \Omega_\infty$, et est entier algébrique sur A ;

(2) $|\theta|_v > 1$, si $v \in V'$;

(3) Tous les conjugués de θ_v dans Ω_v (autre que lui-même pour $v \in V'$) sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

A cet ensemble, on peut associer la famille de fractions rationnelles $\mathfrak{F}(K , V , 1 , h , \delta)$. A une suite convergente de $\theta_\lambda \in S_{V'}(K)$, on peut faire correspondre une famille $f_\lambda \in \mathfrak{F}(K , V , 1 , h , \delta)$, et, de cette famille, on peut extraire une suite partielle convergeant vers une fonction $f \in \mathfrak{F}(K , V_\infty , 1 , h , \delta)$; nous allons étudier les propriétés de la fonction limite.

Soit $\theta \in S_{V'}(K)$, et soit P son polynôme minimal ; posons

$$P(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n , \quad P(x) \in A[x] ,$$

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + q_1 x + \dots + q_n x^n .$$

Il est facile de voir que, si P n'est pas réciproque,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathfrak{F}(K , V_\infty , 1 , h , \delta) ;$$

or, dans une suite convergente, il n'y a qu'un nombre fini de tels éléments que nous pouvons supprimer sans modifier la limite.

Alors $f(0) = q_n$ et $\prod_{v \in V_\infty} |f(0)|_v \geqslant 1$; on ne peut donc pas affirmer que $|f(0)|_v \geqslant 1$ pour tout $v \in V'$, on peut seulement affirmer que :

(1) $|f(0)|_v < 1$ pour $v \in V_\infty - V'$, car sinon f ne serait pas holomorphe dans $|x|_v \leqslant 1$;

(2) Pour au moins un $v_0 \in V'$, on a $|f(0)|_{v_0} > 1$.

Toutes ces considérations ne permettent pas de dire si l'ensemble $S_{V'}(K)$ est fermé ou non. Toutefois, nous pouvons en obtenir un sous-ensemble fermé avec la définition suivante :

DÉFINITION 5. - $S^*_{V'}(K)$ <u>est le sous-ensemble de</u> $S_{V'}(K)$, <u>tel que, pour</u> $\theta \in S^*_{V'}(K)$, <u>on puisse associer une fraction rationnelle</u> $f \in \mathfrak{F}_{V'}(K , V , 1 , h , \delta)$.

On voit alors facilement que <u>les ensembles</u> $S^*_V(K)$ <u>sont des ensembles fermés</u>.

<u>Remarques</u>. - Si $k = \text{Card } V'$, on voit que les éléments de $S_{V'}(K)$ considérés comme entiers algébriques sur $\underset{\sim}{Q}$ sont des P.-V. k-triples [3], et, si $k = 1$, alors on obtient des nombres P.-V. qui sont aussi entiers algébriques sur K .

Dans le cas où V' est réduit à un seul élément, nous obtiendrons les résultats suivants :

DÉFINITION 6. - <u>Soit</u> v_0 <u>une valeur absolue réelle de</u> K (<u>s'il en existe</u>) ; <u>nous désignons par</u> $S_{v_0}(K)$ <u>l'ensemble</u> $S_{V'}(K)$ <u>où</u> $V' = \{v_0\}$; <u>alors</u> $|f(0)|_{v_0} \geqslant 1$, <u>donc</u> $f \in \mathfrak{F}_{v_0}(K , V_\infty , 1 , h , \delta)$, <u>et</u> :

Les ensembles $S_{v_0}(K)$ sont des ensembles fermés d'entiers algébriques.

<u>Remarques</u>. - Un élément $\theta \in S_{v_0}(K)$, si on le considère comme entier algébrique sur $\underset{\sim}{Q}$, appartient à l'ensemble S des nombres P.-V. ; toutefois, les conditions imposées pour que $f \in \mathfrak{F}_{v_0}$ montrent que cette fraction ne peut pas être celle qui lui était associée dans le domaine réel, ce qui entraîne que le polynôme irréductible dans $\underset{\sim}{Z}[x]$ associé à θ n'est pas irréductible dans $A[x]$; <u>les ensembles</u> $S_{v_0}(K)$ <u>sont donc des sous-ensembles fermés de</u> S <u>distincts de</u> S .

De plus, si $f(x) = \sum a_n x^n$ est associée à $\theta \in S_{v_0}(K)$, alors, pour $v \neq v_0$, $|a_n|_v < 1$, il en résulte que $|a_n|_{v_0} > 1$, donc $a_n \in S \cap A$. <u>Donc les coefficients du développement de Taylor de</u> $f \in \mathfrak{F}_{v_0}(K , V_\infty , 1 , h , \delta)$ <u>appartiennent à l'ensemble</u> S .

Nous pouvons également construire des ensembles fermés analogues aux ensembles $S \cup \overline{S}_2$ de KELLY [9], en prenant pour v_0 une valeur absolue complexe. On obtient alors un sous-ensemble fermé de $S \cup \overline{S}_2$, et les coefficients a_n sont des éléments de cet ensemble.

5. Caractérisation des ensembles $S_{V'}(K)$.

Soit V' un sous-ensemble de V_∞ ; nous allons donner des éléments de $S_{V'}(K)$ une caractérisation analogue à celle donnée par C. PISOT [10] pour l'ensemble S .

THÉORÈME 3. - Pour qu'un élément $\theta \in \Omega_\infty$, tel que $|\theta|_v > 1$ pour $v \in V'$, appartienne à $S_{V'}(K)$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in \Omega_\infty$ et une suite u_n d'éléments de A tels que

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n \quad ,$$

où

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|_v^2 < \infty \ , \qquad \text{pour} \quad v \in V' \ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|_v^2 < \infty \ , \qquad \text{pour} \quad v \in V_\infty - V' \ .$$

Preuve. - Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$; alors f est à caractéristique bornée pour $|x|_v \leqslant 1$, $v \in V_\infty$. C'est donc une fraction rationnelle dont le seul pôle dans $|x|_v \leqslant 1$, $v \in V'$, est $\frac{1}{\theta}$, et qui est holomorphe pour $|x|_v \leqslant 1$ si $v \in V_\infty - V'$. Donc, d'après le lemme de Fatou, $\theta \in S_{V'}(K)$ et $\lambda \in K(\theta)$.

Il est immédiat que, si $\theta \in S_V(K)$, et si $\lambda \in A[\theta]$, alors la suite $\{\lambda\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété précédente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (Benali). - Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1970, p. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 104 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] CANTOR (David G.). - On sets of algebraic integers whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.

[4] CANTOR (David G.). - Power series with integral coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 362-366.

[5] CHAMFY (Christiane). - Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor, Chap. 4, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 8, 1958, p. 237-245.

[6] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité, Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.

[7] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 5-85).

[8] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Ensembles fermés d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 82, 1965, p. 1-35 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[9] KELLY (John B.). - A closed set of algebraic integers, Amer. J. of Math., t. 72, 1950, p. 565-572.

[10] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[11] SALEM (R.). - A remarkable class of algebraic integers, proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[12] SENGE (H. G.). - Closed sets of algebraic numbers, Duke math. J., t. 34, 1967, p. 307-323.

(Texte reçu le 1er mars 1971)

Marthe GRANDET-HUGOT
7 rue Joyeuse
14 - CAEN