Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Yves Meyer

# Adèles et séries trigonométriques spéciales

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 13, nº 1 (1971-1972), exp. nº 11, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 11, 16 p.



24 janvier 1972

# ADÈLES ET SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES SPÉCIALES

par Yves MEYER

Soit $\Lambda$ un ensemble de nombres réels. On étudie les intervalles $I$ de nombres réels tels que $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $\sup_I |f|$ soient deux normes équivalentes sur l'espace des sommes trigonométriques $f$ dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$.

La période $T_\Lambda$ attachée à $\Lambda$ est le infimum des longueurs de ces intervalles.

Nous donnons ci-dessous une méthode assez générale pour calculer $T_\Lambda$.

## 1. Définition et propriétés de la période.

Soit $\Lambda$ un ensemble de nombres réels. Nous cherchons s'il existe un intervalle compact $I$ de nombres réels et une constante $C > 0$, ne dépendant que de $I$, tels que

$$\sup_{\mathbb{R}} |P(x)| \leqslant C \sup_I |P(x)| , \tag{1.1}$$

pour toute somme trigonométrique finie $P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i\lambda x$, à coefficients complexes, dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$. L'ensemble des $P$ ci-dessus est invariant par translation, et si $I$ vérifie (1.1), tout intervalle déduit de $I$ par translation vérifie aussi (1.1). Nous nous intéresserons donc à la longueur de $I$, et nous sommes conduits à la définition suivante.

DÉFINITION 1. - Soit $\Lambda$ un ensemble de nombres réels. La période $T_\Lambda$ attachée à $\Lambda$ est le infimum des longueurs des intervalles $I$ pour lesquels (1.1) est vérifiée.

Si, pour aucun intervalle $I$ de longueur finie, (1.1) n'est vérifiée, nous poserons $T_\Lambda = +\infty$.

Soit $\Lambda$ un ensemble de nombres réels, et soit $I$ un intervalle de nombres réels dont la longueur est supérieure à $T_\Lambda$. Soit enfin $C_\Lambda$ l'espace de toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$, presque périodiques au sens de Bohr et dont le spectre est contenu dans $\Lambda$. Alors, si $f$ est de classe $C^1$ (resp. $C^k$, $k \geqslant 1$) sur $I$, $f$ est de classe $C^1$ (resp. $C^k$, $k \geqslant 1$) sur toute la droite réelle ; on a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^p \, dx \leqslant C_I^p \int_I |f(x)|^p \, dx \quad \text{pour tout} \quad p \geqslant 1 ,$$

et enfin si l'on se restreint à des intervalles $J$ dont la longueur, notée $|J|$, dépasse celle de $I$, on a

$$\frac{1}{|J|}\int_J |f(x)|^p \, dx \leqslant C_I^p \int_I |f(x)|^p \, dx .$$

[$C_I$ ne dépend ni de $J$, ni de $p \geqslant 1$, ni de $f$ ; voir [4], théorème 6, p. 51

pour une démonstration. ]

## 2. Un exemple de calcul de la période.

Soit, pour tout nombre réel $\theta > 2$ , $\Lambda_\theta$ la suite des points $0$ , $1$, $\theta$, $\theta+1$ , $\theta^2$ , $\theta^2 + \theta$ , $\theta^2 + \theta + 1$ , ... ; en d'autres termes, $\Lambda_\theta$ est l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta^k$ , $\varepsilon_k = 0$ ou $1$ .

Il est clair que la densité de $\Lambda_\theta$ est $0$ : le nombre de points de $\Lambda_\theta$ dans un intervalle $[x - T , x + T]$ est $o(T)$ , $T \dashrightarrow +\infty$ , uniformément par rapport au nombre réel $x$ .

Rappelons qu'un nombre de Pisot réel est un nombre réel $\theta > 1$ possédant les deux propriétés suivantes : $\theta$ est un entier algébrique sur $\mathbb{Z}$ , de degré $n \geqslant 1$ (si $n = 1$ , $\theta$ est un entier naturel $\geqslant 2$ ) ; les $n - 1$ conjugués de $\theta$ différents de $\theta$ sont des nombres réels ou complexes de valeur absolue strictement inférieure à $1$ .

THÉORÈME 1. - Soient $\theta > 2$ un nombre réel, $\Lambda_\theta$ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou $1$ , et soit $T_\theta$ la période attachée à $\Lambda_\theta$ . Alors

(2.1) $T_\theta = +\infty$ si $\theta$ n'est pas un nombre de Pisot.

(2.2) $T_\theta = 0$ si $\theta$ est un nombre de Pisot.

Le théorème 1 (prouvé au § 4) montre que les propriétés arithmétiques de $\Lambda$ jouent un rôle considérable dans le calcul de la période. Si $\theta$ n'est pas un nombre de Pisot, on forme pour tout entier $j \geqslant 1$ ,

$$P_j(t) = 2^{-j} \sum \exp 2\pi i(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta + \dots + \varepsilon_{j-1} \theta^{j-1})t ,$$

où la somme est étendue à toutes les suites $(\varepsilon_0 , \dots , \varepsilon_{j-1})$ de $0$ et de $1$ . En utilisant le théorème de Pisot ([5], p. 93), on voit facilement que, sur toute partie compacte $K$ de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $0$ , $P_j$ tend uniformément vers $0$ . Cependant $P_j(0) = 1$ . Ainsi la période attachée à $\Lambda_\theta$ est $+\infty$ .

Pour prouver le théorème 1 lorsque $\theta$ est un nombre de Pisot, nous allons introduire une famille d'ensembles $\Lambda$ de nombres réels, les "modèles réguliers" pour lesquels la période égale la densité. Puisque cette dernière propriété ne saurait être vraie en général (voir le théorème 1), la définition des modèles doit être très précise.

## 3. Les modèles réguliers de nombres réels et le calcul des périodes qui leur sont attachées.

Soient $\mathbb{R}$ la droite réelle, $G$ un groupe abélien localement compact métrisable et séparable (il existe une partie dénombrable dense dans $G$ ), et $\mathbb{R} \times G$ le groupe produit. Soit $i : \mathbb{R} \times G \dashrightarrow \mathbb{R}$ et $j : \mathbb{R} \times G \dashrightarrow G$ les projections canoniques.

Nous faisons l'hypothèse suivante. Le groupe produit $\mathbb{R} \times G$ contient un sous-groupe discret $D$ ayant les trois propriétés que voici

(3.1) $(\mathbb{R} \times G)/D$ est compact,

(3.2) $i : D \dashrightarrow \mathbb{R}$ est une application injective d'image dense,

(3.3) $j : D \dashrightarrow G$ est une application injective d'image dense.

Soit $U \subset G$ une partie compacte de $G$ intégrable au sens de Riemann : la frontière de $U$ est de mesure nulle pour la mesure de Haar de $G$.

DÉFINITION 2. - Le modèle régulier $\Lambda$, défini par $G$, $D$ et $U$, est l'ensemble de tous les $i(d)$, $d \in D$, tels que $j(d) \in U$.

Nous allons voir dans un instant que la période attachée à un modèle régulier est égale à sa densité. Donnons d'abord des exemples de modèles réguliers.

Soit $P$ l'ensemble des nombres premiers $p \geqslant 2$, et soit $\Lambda$ l'ensemble des entiers rationnels $\pm 1$ et $\pm p$, $p \in P$. Alors $\Lambda$ est un modèle régulier. Soient, en effet $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels, $A$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, $i : \mathbb{Q} \dashrightarrow \mathbb{R}$ l'injection canonique, et $A'$ l'anneau des adèles incomplet obtenu, en "oubliant", dans la construction de $A$, la place $i$ sur $\mathbb{Q}$. Alors $A = \mathbb{R} \times A'$, et $\mathbb{Q}$ devient un sous-groupe de $A$ possédant les propriétés (3.1), (3.2), (3.3).

Soient $P$ l'ensemble des nombres premiers $p \geqslant 2$, $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, et $|\ |_p$ la valeur absolue p-adique. Soit enfin $U$ la partie compacte de $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ définie comme suit : $y = (y_p)_{p \in P}$ appartient à $U$ si, pour tout $p \in P$, $|y_p|_p = 1$ sauf, peut-être, pour une valeur exceptionnelle de $p$ pour laquelle $p^{-1} \leqslant |y_p|_p \leqslant 1$. L'ensemble $U$ est de mesure nulle, car $\prod_{p \in P}(1 - p^{-1}) = 0$ et le modèle $\Lambda$, défini par $A'$, $\mathbb{Q}$ et $U$, est l'ensemble des entiers rationnels $\pm 1$ et $\pm p$, $p \in P$.

De la même façon, on vérifie que l'ensemble $\Lambda$ des entiers rationnels de la forme $\pm n^2$, $n \geqslant 1$, est un modèle régulier.

THÉORÈME 2. - Tout modèle régulier $\Lambda$ de nombres réels a une densité uniforme $d \geqslant 0$ : Tout intervalle $[t , t + T]$ de nombres réels contient $dT + o(T)$ points de $\Lambda$ ; le $o(T)$ est uniforme en $t$ pour $T \dashrightarrow +\infty$.

La période attachée à $\Lambda$ est égale à la densité $d$ de $\Lambda$. Plus précisément,

(3.4) Si la longueur d'un intervalle $I$ de nombres réels est supérieure à $d$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute somme trigonométrique $P$, dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$, on ait $\sup_{\mathbb{R}} |P| \leqslant C \sup_I |P|$.

(3.5) Au contraire, si $d > 0$ (c'est-à-dire si $U$ a une mesure positive) et si la longueur de l'intervalle $I$ est inférieure à $d$, toute fonction continue $g : I \dashrightarrow \mathbb{C}$ est la restriction à $I$ d'une fonction presque périodique $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{C}$ dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$.

La preuve du théorème 2 sera donnée aux § 6, 7, 8, 9. Nous montrerons, au § 4, comment déduire le théorème 1 du théorème 2. Faisons, tout d'abord, quelques remarques. La propriété (3.5) entraine que la période attachée à un modèle régulier est égale à sa densité. En effet, si $d > 0$, soit $J$ un intervalle compact de nombres réels dont la longueur est inférieure à $d$ ; soit $I$ un intervalle compact de nombres réels dont l'intérieur contient $J$ et dont la longueur est encore inférieure à $d$. Soit enfin $g : I \to [0, 1]$ une fonction continue non identiquement nulle, mais nulle sur $J$. Alors $g$ est la restriction d'une fonction presque périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont le spectre est contenu dans $\Lambda$ et qui, sur $J$, vaut $0$ : $f$ n'est pas déterminée par sa restriction à $J$.

Le calcul de $d$, densité de $\Lambda$, est facilité par l'observation suivante : lorsque $G$ et $D$ sont fixés et $U$ variable, $d = \gamma(G, D) \operatorname{mes} U$ ; la constante $\gamma(G, D) > 0$ ne dépend que de $G$ et $D$ et de la normalisation de la mesure de Haar de $G$. Par exemple si $\mathbb{R} \times G$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et si $D = \mathbb{Q}$, $\gamma(G, D) = 1$ ([4], § 4). On a alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - *La période attachée à l'ensemble des nombres premiers est nulle.*

COROLLAIRE 2. - *La période attachée à l'ensemble des carrés parfaits est nulle.*

Sans utiliser le théorème 2, on peut démontrer, de façon élémentaire, les corollaires 1 et 2. Il n'en est pas de même pour le corollaire 3 suivant.

COROLLAIRE 3. - *Soit $K$ un corps réel de nombres algébriques de degré $n$ sur $\mathbb{Q}$. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les $n$ isomorphismes de $K$ dans $\mathbb{C}$ ordonnés de telle sorte que $\sigma_1$ soit l'injection canonique de $K$ dans $\mathbb{R}$. Soient enfin $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers algébriques de $K$, et $\Lambda$ l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{O}$ tels que*

$$|\sigma_2(\lambda)| \leq 1 , \dots , |\sigma_n(\lambda)| \leq 1 .$$

*En d'autres termes, l'ensemble $\Lambda$ est composé de $-1$, de $1$ et de tous les nombres de Pisot ou de Salem de $K$ dont le degré sur $\mathbb{Q}$ est $n$. Soit $r$ le nombre des plongements réels de $K$ ; posons $n = r + 2s$. Soit enfin $D$ le discriminant absolu de $K$. Alors la densité de $\Lambda$ et la période attachée à $\Lambda$ sont égales et valent $2^{r-1}(2\pi)^s/\sqrt{|D|}$, et les conclusions du théorème 2 sont vérifiées.*

## 4. Le théorème 1 est un corollaire du théorème 2.

Soit $\theta > 2$ un nombre de Pisot, soit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ le corps de $\theta$, et soit $i : K \to \mathbb{R}$ l'injection canonique d'image dense de $K$ dans $\mathbb{R}$. Soient $A$ l'anneau des adèles de $K$, et $G$ l'anneau des adèles incomplet obtenu en oubliant, dans la construction de $A$, la place $i$ sur $K$. Alors $A = \mathbb{R} \times G$, et $K$ devient canoniquement un sous-groupe discret de $A$ ; $A/K$ est un groupe compact. Enfin les deux projections $i : A \to \mathbb{R}$ et $j : A \to G$, restreintes à $K$, sont injectives et d'images denses ([7], ch. IV).

Soit $P$ l'ensemble des places $p$ sur $K$, et soit $P'$ l'ensemble $P$ privé de $i$. Pour tout $p \in P$, soit $K_p$ le complété de $K$ pour la valeur absolue correspondante, notée $|\ |_p$, et soit $\mathcal{O}_p$ l'anneau compact maximal de $K_p$ défini par $|x|_p \leq 1$. Si $\theta \in K$ est un nombre de Pisot, on a $|\theta|_p \leq 1$ pour tout $p \in P'$ et, de plus, $|\theta|_p < 1$ pour les $n-1$ places infinies de $P'$ (une place infinie correspond à $K_p = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$). La formule du produit donne $\theta \prod_{p \in P'} |\theta|_p = 1$. D'autre part, pour tout $p \in P'$, on a soit $|\theta|_p = 1$, soit $|\theta|_p \leq 1/2$. L'ensemble $F$ des $p \in P'$ tels que $|\theta|_p < 1$ est donc fini. Pour tout $p \in F$, soit $p(\theta)$ l'image de $\theta$ dans $K_p$ ; on a $|p(\theta)| < 1$.

On construit une partie compacte $U$ de $G$ comme suit : $y = (y_p)_{p \in P'}$ appartient à $U$ s'il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ de $0$ et de $1$ telle que, pour tout $p \in F$, $y_p = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k (p(\theta))^k$ tandis que, pour $p \notin F$, $|y|_p \leq 1$ ; $U$ est donc le produit $V \times \prod_{p \in P' \setminus F} \mathcal{O}_p$ d'un ensemble compact symétrique de $\prod_{p \in F} K_p$ et des anneaux compacts maximaux des autres complétés. La mesure de $U$ est égale à celle de $V$, et la formule du produit montre facilement que la mesure de $V$ est nulle (Pour tout $k \geq 1$, $V$ peut être recouvert par $2^k$ compacts de mesures $\leq C \prod_{p \in P'} |\theta|_p^k$. La formule du produit montre que la mesure de $V$ ne dépasse pas $C\theta^{-k} 2^k$, $\theta > 2$, et $V$ a donc une mesure nulle. Voir [2], p. 14).

Soit $M$ le modèle régulier défini par $K$, $G$ et $U$. La période attachée à $M$ est nulle, et l'on vérifie sans peine que $\Lambda$ est contenu dans $M$. Le théorème 1 est donc prouvé.

## 5. Enoncé du théorème 2 dans le cadre des groupes abéliens localement compacts.

Nous allons d'abord définir les modèles dans ce cadre général.

Tous les groupes abéliens localement compacts considérés ci-dessous seront métrisables et séparables (c'est-à-dire contenant une partie dénombrable dense). Cependant les énoncés et les preuves pourraient être écrits sans cette dernière restriction.

Soient $G_1$ et $G_2$ deux groupes abéliens localement compacts, $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ les deux groupes duaux, $G_1 \times G_2$ et $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ les groupes produits correspondants et enfin

$$p_1 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 , \quad p_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2 ,$$
$$q_1 : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_1 , \quad q_2 : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2 ,$$

les projections canoniques.

Nous allons, dans tout ce qui suit, faire l'hypothèse suivante :

<u>Il existe un sous-groupe discret $D$ de $G_1 \times G_2$ tel que le groupe quotient $(G_1 \times G_2)/D$ soit compact et que $p_1$ et $p_2$, restreintes à $D$, soient deux applications injectives et d'images denses dans $G_1$ et $G_2$ respectivement.</u>

Soit $\Delta \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2$ le groupe des $(y_1, y_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ tels que, pour tout $(x_1, x_2) \in D$, on ait $\chi_{y_1}(x_1) = \chi_{y_2}(x_2)$. Alors $\Delta$ jouit, vis à vis de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ des mêmes propriétés que $D$ vis à vis de $G_1$ et $G_2$.

Nous sommes mes maintenant en mesure de définir les modèles (de $\Gamma_1$).

DÉFINITION 3. - Soit $U$ une partie compacte de $\Gamma_2$. Le modèle $\Lambda(U)$ défini par $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Delta$ et $U$ est alors l'ensemble de tous les $y_1 \in \Gamma_1$ tels que, pour un certain $y_2 \in U$, $(y_1, y_2)$ appartienne à $\Delta$.

Pour tout modèle $\Lambda$ de $\Gamma_1$, nous désignerons par $\Lambda^+$ un modèle défini à l'aide des mêmes groupes $\Gamma_2$ et $\Delta$, mais avec une partie compacte $U^+$ de $\Gamma_2$ dont l'intérieur contient $U$. De même, $\Lambda^-$ sera défini à l'aide d'une partie compacte $U^-$ de $\Gamma_2$ contenue dans l'intérieur de $U$. Ainsi $\Lambda^- \subset \Lambda \subset \Lambda^+$.

Il est facile de voir qu'un modèle $\Lambda$ de $\Gamma_1$ est uniformément discret : il existe un voisinage $W$ de $0$ dans $\Gamma_1$ tel que, pour deux $\lambda$ différents dans $\Lambda$, les $\lambda + W$ correspondants soient disjoints.

Avant d'énoncer le théorème 2 dans le cadre des groupes abéliens localement compacts, quelques définitions supplémentaires sont nécessaires. Soient $G$ un groupe abélien localement compact, $\Gamma$ le groupe dual, $K$ une partie compacte de $G$ et $\Lambda$ une partie discrète de $\Gamma$ (tout point de $\Lambda$ est isolé dans $\Lambda$). Nous écrirons,

(5.1) $K < \Lambda$, si les normes $\sup_\Lambda |\varphi|$ et $\sup_\Gamma |\varphi|$ sont équivalentes sur l'espace des fonctions $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$, continues et bornées, dont le spectre est contenu dans $K$.

(5.2) $K \ll \Lambda$, si toute fonction continue $g : K \longrightarrow \mathbb{C}$ est la restriction à $K$ d'une fonction presque-périodique $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$.

(5.3) $K > \Lambda$, si tout fonction bornée $b : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ est la restriction à $K$ d'une fonction $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée, dont le spectre est contenu dans $K$.

(5.4) $K \gg \Lambda$, si les normes $\sup_K |P|$ et $\sup_G |P|$ sont équivalentes sur l'espace des sommes trigonométriques $P : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$.

Enfin, pour toute compacte $K$ de $G$, $K^+$ désignera n'importe quelle partie compacte de $G$ dont l'intérieur contient $K$, et $K^-$ désignera n'importe quelle partie compacte de $G$ contenue dans l'intérieur de $K$.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le théorème 3 (démontré à partir du § 7).

THÉORÈME 3. - Soient $K \subset G_1$ une partie compacte, et $\Lambda \subset \Gamma_1$ un modèle. Avec les notations ci-desus, $K < \Lambda$ entraine $K^- \ll \Lambda^+$ et, de même, $K > \Lambda$ entraine $K^+ \gg \Lambda^-$.

Le contenu intuitif du théorème 3 est le suivant : Si $\Lambda$ est un modèle et $K$ un compact, les deux propriétés "faibles" $K < \Lambda$ et $K > \Lambda$ sont, "à $\varepsilon$ près", respectivement équivalentes aux deux propriétés "fortes" $K \ll \Lambda$ et $K \gg \Lambda$. Dans les applications, la vérification des propriétés faibles est relativement aisée.

## 6. Le théorème 2 est un corollaire du théorème 3.

Si $\Lambda$ est un ensemble uniformément discret de nombres réels, nous poserons

$$\underline{\text{Dens}}\ \Lambda = \lim_{T\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} T^{-1}\,\text{Card}\{\Lambda \cap [x\ ,\ x+T]\}$$

$$\overline{\text{Dens}}\ \Lambda = \lim_{T\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} T^{-1}\,\text{Card}\{\Lambda \cap [x\ ,\ x+T]\}\ .$$

Pour tout intervalle compact $K$ de nombres réels et tout ensemble uniformément discret $\Lambda$ de nombres réels de longueur $|K|$,

(6.1) $K < \Lambda$ équivaut à $|K| < \underline{\text{Dens}}\ \Lambda$ et $K > \Lambda$ à $|K| > \overline{\text{Dens}}\ \Lambda$ ([3], p. 38). Si $\Lambda$ est un modèle de nombres réels défini à l'aide d'une partie compacte $U$ de $\Gamma_2$ d'intérieur $U^o$, on a

(6.2) $\underline{\text{Dens}}\ \Lambda \geq \gamma \text{ mes } U^o$ et $\overline{\text{Dens}}\ \Lambda \leq \gamma \text{ mes } U$ ; la constante $\gamma > 0$ ne dépend que de $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Delta$ ([4] § 4).

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 2. Montrons par exemple (3.4).

Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, $U'$ une partie comacte de $\Gamma_2$, dont l'intérieur contient $U$, mais telle que $\text{mes } U' \leq \text{mes } U + \varepsilon$. Définissons le modèle $\Lambda'$ à l'aide de $U'$. Alors $\overline{\text{Dens}}\ \Lambda' \leq \gamma(\text{mes } U + \varepsilon) \leq \text{Dens}\ \Lambda + \gamma\varepsilon$ (par 6.2). Si $|I| > \text{Dens}\ \Lambda$, il existe un intervalle $J$ contenu dans l'intérieur de $I$, et un $\varepsilon > 0$ tels que $|J| > \overline{\text{Dens}}\ \Lambda'$. Donc $J > \Lambda'$ et, en appliquant le théorème 2, on obtient $I \gg \Lambda$. On raisonne de même pour montrer que $I \ll \Lambda$ dès que $|I| < \text{Dens}\ \Lambda$.

## 7. La preuve du théorème 3 : une proposition préliminaire et un espace de fonctions de tests.

Soient $G$ un groupe localement compact, $\Gamma$ le groupe dual, et $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble uniformément discret (il y a un voisinage $W$ de $0$ dans $\Gamma$ tel que les ensembles $\lambda + W$ soient deux à deux disjoints lorsque $\lambda$ décrit $\Lambda$).

On rappelle que si $K$ est une partie compacte de $G$, $K^+$ désigne n'importe quel compact de $G$ dont l'intérieur contient $K$ et de même $K^-$ désigne n'importe quelle partie compacte de $G$ contenue dans l'intérieur de $K$.

PROPOSITION 3. - Avec les notations ci-dessus, les implications suivantes ont lieu

(7.1) $K \ll \Lambda \Longrightarrow K^- < \Lambda$,

(7.2) $K \gg \Lambda \Longrightarrow K^+ > \Lambda$.

Il peut paraître étrange que la conclusion soit affaiblie par l'obligation d'utiliser $K^-$ et $K^+$. C'est, cependant, inévitable.

Par exemple, si $K = [0 , 1]$ et si $\Lambda$ est la réunion de $\underset{\sim}{Z}$ et de la fréquence $1/2$ , on a bien $K \ll \Lambda$ , mais on n'a pas $K < \Lambda$ (§ 6). De même, si $K = [0 , 1]$ et si $\Lambda = \underset{\sim}{Z}$ , on a $K \gg \Lambda$ sans avoir $K > \Lambda$ .

La preuve de la proposition 3, ainsi que les preuves suivantes, nécessitent la construction d'un espace $\mathcal{S}(G)$ de fonctions de tests sur le groupe $G$ .

Soit $\mathcal{S}_k(\underset{\sim}{R}^n)$ , $k \geqslant 0$ , l'espace de Banach des fonctions $f : \underset{\sim}{R}^n \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ qui sont continuement dérivables jusqu'à l'ordre $k$ et qui, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leqslant k$ , sont $o(1 + |x|)^{-k}$ à l'infini. La norme évidente dans $\mathcal{S}_k(\underset{\sim}{R}^n)$ est notée $\|f\|_k$ .

Soient $G$ un groupe abélien compact, $\Gamma$ le groupe dual, et $n \geqslant 0$ , $k \geqslant 0$ , deux entiers. Un élément du groupe produit $\underset{\sim}{R}^n \times G$ sera écrit $(t , x)$ où $t \in \underset{\sim}{R}^n$ et $x \in G$ ; $R^0$ est $\{0\}$ . Nous définirons $\mathcal{S}_k(\underset{\sim}{R}^n \times G)$ comme l'espace des fonctions continues $f : \underset{\sim}{R}^n \times G \longrightarrow C$ qui s'écrivent

$$f(t , x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(t)\, \chi_\gamma(x) \quad \text{avec} \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} \|a_\gamma\|_k = \|f\| < +\infty ;$$

nous venons de définir la norme de $f$ dans $\mathcal{S}_k(\underset{\sim}{R}^n \times G)$ .

Enfin, soit $H$ un groupe abélien localement compact, et soit $H_0$ un sous-groupe ouvert de $H$ de la forme $H_0 = \underset{\sim}{R}^n \times G$ , où $n \geqslant 0$ et où $G$ est compact. Soit $D$ le groupe discret $H/H_0$ . Pour toute fonction continue $f : H \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ et tout $h \in H$ , $f_h : H \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ est définie par $f_h(x) = f(x + h)$ .

Nous écrirons que $f \in \mathcal{S}_k(H)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites : pour tout $h \in H$ , $f_h$ , restreinte à $H_0$ , appartient à $\mathcal{S}_k(H_0)$ et $\sum_D \|f_h\|_{\mathcal{S}_k(H_0)} < \infty$ la dernière somme est définie en choisissant, pour tout $d \in D$ , un $h$ et un seul dans $d + H_0$ .

On appelle $\mathcal{S}(H)$ l'intersection des $\mathcal{S}_k(H)$ , $k \geqslant 1$ . Alors $\mathcal{S}(H)$ est une algèbre de fonctions de tests sur $H$ , stable par transformée de Fourier. Enfin si $\Lambda \subset H$ est une partie uniformément discrète de $H$ , on a, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}(H)$ , $\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha(\lambda)| < +\infty$ . La formule de Poisson ([7] chap. VII, § 2) est applicable aux fonctions de la classe $\mathcal{S}$ .

<u>Preuve de</u> (7.1). - Pour montrer la propriété $K^- < \Lambda$ , il suffit de trouver, pour toute partie compacte $K^-$ contenue dans l'intérieur de $K$ , une partie compacte $K'$ dont l'intérieur contient $K^-$ et une constante positive $C$ tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ , on puisse écrire, sur $K'$ , le caractère $\chi_\gamma(x)$ comme une somme trigonométrique

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda , \gamma)\, \chi_\lambda \quad \text{telle que} \quad \sum_{\lambda\in\Lambda} |a(\lambda , \gamma)| \leqslant C .$$

Alors, pour toute fonction continue et bornée $\varphi : \Gamma \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ dont le spectre est contenu dans $K^-$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$ , on aura

$$\varphi(\gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda , \gamma)\, \varphi(\lambda) ,$$

ce qui entraine $|\varphi(\gamma)| \leq C \sup_\Lambda |\varphi(\lambda)|$ .

Appelons $V$ un voisinage compact symétrique de $0$ dans $G$ assez petit pour que $K^- + V$ soit contenu dans $K$ . Soit $\alpha \in \mathbb{S}(G)$ une fonction de test, nulle hors de $V$ , et d'intégrale égale à $1$ . Posons $K' = K^- + V$ . Pour tout $\gamma \in \Gamma$ , soit $g_\gamma$ la restriction du caractère $\chi_\gamma$ à $K'$ , et soit enfin $f_\gamma$ l'extension presque périodique à fréquences dans $\Lambda$ de $g_\gamma$ ; $f_\gamma = g_\gamma$ sur $K'$ et $\|f_\gamma\|_\infty \leq C'$ . Soit $\alpha_\gamma = \alpha\chi_\gamma$ ; alors $\hat{\alpha}_\gamma(\gamma) = 1$ .

Puisque $\Lambda$ est uniformément discret et que $\hat{\alpha} \in \mathbb{S}(\Gamma)$ est à décroissance rapide,

$$\sup_\Gamma \sum_{\gamma+\Lambda} |\hat{\alpha}| = \sup_\Gamma \sum_\Lambda |\hat{\alpha}_\gamma(\lambda)| = C'' < +\infty .$$

Posons $P_\gamma = f_\gamma * \alpha_\gamma$ . Si $x \in K^-$ , $P_\gamma(x) = \hat{\alpha}_\gamma(\gamma)\, \chi_\gamma(x) = \chi_\gamma(x)$ . La série de Fourier de $P_\gamma$ est $\sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{\alpha}_\gamma(\lambda)\, f_\gamma(\lambda)\, \chi_\lambda(x)$ et l'on a

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\hat{\alpha}_\gamma(\lambda)|\, |\hat{f}_\gamma(\lambda)| \leq C''\|f_\gamma\|_\infty \leq C''C' .$$

D'où $K^- < \Lambda$ .

<u>Preuve de</u> (7.2). - Quelques définitions supplémentaires sont nécessaires. Par transformation de Fourier, l'algèbre de groupe $L^1(G)$ devient isométriquement une algèbre de fonctions continues sur le groupe dual $\Gamma$ , nulles à l'infini et, dans cette algèbre $A(\Gamma)$ , le produit est le produit usuel. Pour toute partie fermée $E$ de $\Gamma$ , soit $I(E)$ l'idéal de tous les éléments de $A(\Gamma)$ nuls sur $E$ , et soit $A(E) = A(\Gamma)/I(E)$ l'algèbre quotient munie de la norme quotient ; les éléments de $A(E)$ peuvent être considérés comme des fonctions $g : E \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ qui sont des restrictions d'éléments de $A(\Gamma)$ .

Soit $K$ une partie compacte de $G$ . L'espace dual $N(K)$ de $A(K)$ est l'annulateur de $I(K)$ . Un élément $S$ de $N(K)$ est donc une distribution $S$ portée par $K$ . La norme de $S$ dans $N(K)$ est $\sup_G |\hat{S}|$ .

On désignera, dans tout ce qui suit, par $P$ une somme trigonométrique finie dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$ :

$$P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, \chi_\lambda(x) .$$

On posera alors $\|P\|_A = \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|$ . La propriété $K > \Lambda$ résulte de l'existence d'une constante positive $C$ telle que, pour tout $P$ ci-dessus, on ait

(7.3) $$\|P\|_A \leq C\|P\|_{A(K)} .$$

En effet, toute fonction bornée $b : \Lambda \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ appartient au dual de $\ell^1(\Lambda)$ et, grâce à (7.3) et au théorème de Hahn-Banach, définit une forme linéaire continue sur $A(K)$ . Il y a donc une distribution $S$ , portée par $K$ , telle que

$$\sup_\Gamma |\hat{S}| \leq C \sup_\Lambda |b| , \quad \text{et que } \hat{S}(-\lambda) = b(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda .$$

Définissons $\varphi : \Gamma \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ par $\varphi(\gamma) = \hat{S}(-\gamma)$ ; le spectre de $\varphi$ est contenu dans $K$ , $\varphi = b$ sur $\Lambda$ et $\sup_\Gamma |\varphi| \leq C \sup_\Lambda |b|$ .

Nous allons donc prouver (7.3) avec $K^+$ au lieu de $K$ .

La vérification de (7.3) repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 1. - Si $\Lambda$ est uniformément discret dans $\Gamma$ , il y a une partie compacte $L$ de $G$ et un constante positive $C$ telle que $\|P\|_A \leq C\|P\|_{A(L)}$ pour toute somme trigonométeique $P$ dont les fréquences appartiennent à $\Lambda$ .

La preuve du lemme 1 est immédiate. Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\Gamma$ tel que les différents $\lambda + V$ , $\lambda \in \Lambda$ , soient deux à deux disjoints, et soit $a \in L^1(\Gamma)$ une fonction à valeurs $\geq 0$ , d'intégrale égale à 1 et nulle hors de $V$ .

Pour toute mesure $\mu$ finie portée par $\Lambda$ , on a donc $\|\mu\| = \|\mu * a\|_1$ ($\|\mu\|$ est la masse totale de $\mu$ ). Soit $\alpha \in A(G)$ la fonction dont la transformée de Fourier est $a$ . La transformation de Fourier donne $\|P\|_A = \|\alpha P\|_{A(G)}$ . Il y a un compact $L$ assez grand pour que, sur son complémentaire (noté ${}^cL$ ) , on ait $\|a\|_{A({}^cL)} \leq 1/2$ tandis que $\|\alpha\|_{A(G)} = 1$ ; on peut donc écrire $\alpha = \beta + \gamma$ , où $\|\beta\|_{A(G)} \leq 2/3$ et $\gamma = 0$ sur ${}^cL$ . D'où

$$\|P\|_A = \|\alpha P\|_{A(G)} \leq \|\beta P\|_{A(G)} + \|\gamma P\|_{A(G)} \leq \frac{2}{3}\|P\|_A + \frac{5}{3}\|P\|_{A(L)} \quad \text{et} \quad \|P\|_A \leq 5\|P\|_{A(L)} \, .$$

LEMME 2. - Pour toute partie compacte $L$ de $G$ et tout voisinage $V$ de 0 dans $G$ , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{A(L)} \leq C \sup\|f * \varphi\|_\infty \; ; \tag{7.4}$$

$f$ est un élément arbitraire de $A(G)$ et le sup est étendu à tous les éléments $\varphi$ de $L^1(G)$ dont le support est contenu dans $V$ et tels que $\|\hat{\varphi}\|_\infty \leq 1$ .

On rappelle que $\| \; \|_\infty$ désigne la norme uniforme.

Soit, en effet, $x_1 + V , \dots , x_n + V$ un recouvrement de $L$ par des translatés de $V$ , et soit $\varphi_1 , \dots , \varphi_n$ une partition de l'identité, formée de fonction de $A(G)$ et subordonnée à ce recouvrement : le support de chaque $\varphi_j$ , $1 \leq j \leq n$ , est une partie compacte $L_j$ de l'intérieur de $x_j + V$ . On a

$$\|f\|_{A(L)} = \|\Sigma_1^n f\varphi_j\|_{A(L)} \leq \Sigma_1^n \|f\varphi_j\|_{A(L)} \leq C_1 \Sigma_1^n \|f\|_{A(L_j)} \, .$$

On peut trouver une suite $\psi_j$ , $1 \leq j \leq n$ , d'éléments de $L^1(G)$ telle que chaque $\psi_j$ soit portée par le $x_j + V$ correspondant, que $\|\hat{\psi}_j\|_\infty \leq 1$ et que

$$\|f\|_{A(C_j)} \leq 2\left|\int_G f \, \psi_j \, dx\right| .$$

Mais $\psi_j(x) = \theta_j(x - x_j)$ , où $\theta_j \in L^1(G)$ , $\theta_j$ est portée par $V$ et $\|\hat{\theta}_j\|_\infty \leq 1$ . Ainsi $\|f\|_{A(C_j)} \leq 2\|f * \varphi\|_\infty$ pour une certaine fonction $\varphi$ décrite par le lemme 2. Finalement $\|f\|_{A(L)} \leq 2C_1 \, n \sup\|f * \varphi\|_\infty$ .

Revenons alors à la preuve de (7.3). Définissons $L$ par le lemme 1, et soit $V$ un voisinage compact et symétrique de 0 , assez petit pour que $K + V$ soit contenu dans $K^+$ . Alors, par les lemmes 1 et 2 et (7.4), on a

$$\|P\|_\Lambda \leq C \sup\|P * \varphi\|_{L^\infty(G)} \leq C_2 \sup\|P * \varphi\|_{L^\infty(K)} \leq C_2 \|P\|_{A(K^+)} ,$$

(le sup est étendu aux fonctions $\varphi$ de $L^1(G)$ , nulles hors de $V$ , telles que $\|\hat{\varphi}\|_\infty \leq 1$ ).

## 8. Réduction du théorème 3 à un principe de dualité.

Nous reprenons les notations du § 5. L'ensemble $\Lambda$ est défini à l'aide du compact $U$ de $\Gamma_2$ . De façon analogue, la partie compacte $K$ de $G_1$ permet de définir un ensemble discret $M$ de $G_2$ : $M$ est l'ensemble de tous les $m = x_2 \in G_2$ tels que, pour un certain $x_1 \in K \subset G_1$ , $(x_1 , x_2) \in D$ .

PROPOSITION 4. - Pour toute partie compacte $K$ de $G_1$ et tout modèle $\Lambda$ de $\Gamma_1$, $K < \Lambda$ entraine $U \gg M$ , tandis que $K > \Lambda$ entraine $U^- \ll M$ .

Rappelons que $U^-$ désigne un compact arbitraire contenu dans l'intérieur de $U$ .

Les propositions 3 et 4 donnent aussitôt le théorème 2. En effet, on a, d'une part, les implications

$$K < \Lambda \Longrightarrow U \gg M \Longrightarrow U^+ > M \Longrightarrow K^- \ll \Lambda^+$$

(Cette dernière implication vient de ce que les rôles joués par le couples $(K , \Lambda)$ et le couple $(U , M)$ sont symétriques). D'autre part, soit $U'$ un compact dont l'intérieur contient $U^-$ , mais qui est lui-même contenu dans l'intérieur de $U$ . Alors

$$K > \Lambda \Longrightarrow U' \ll M \Longrightarrow U^- < M \Longrightarrow K \gg \Lambda^- .$$

## 9. Démonstration du principe de dualité.

La première partie est presque évidente. Soit $P : \Gamma_2 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ une somme trigonométrique finie, dont les fréquences appartiennent à la partie discrète $M$ de $G_2$ : $P(y_2) = \sum_{m \in M} a_m \chi_m(y_2)$ . Nous allons lui associer une somme trigonométrique finie $Q : \Gamma_1 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ , dont les fréquences appartiennent à $K$ : $Q$ est définie par

$$Q(y_1) = \sum a_m \chi_{x_1}(y_1) , \tag{9.1}$$

où la somme est étendue à tous les couples $(x_1 , m) \in D$ , $x_1 \in K$ , $m \in M$ .

Des relations très simples relient $P$ et $Q$ : si $(y_1 , y_2) \in \Delta$ et $(x_1 , m) \in D$, on a $\chi_{x_1}(y_1) = \chi_m(y_2)$ , ce qui entraîne

$$Q(y_1) = P(y_2) \quad \text{si} \quad (y_1 , y_2) \in \Delta . \tag{9.2}$$

Puisque $q_1(\Delta)$ et $q_2(\Delta)$ sont denses dans $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ , on a

$$\sup_{\Gamma_1} |Q| = \sup_{\Gamma_2} |P| . \tag{9.3}$$

Pour obtenir la première partie de la proposition 4, il suffit d'écrire :

$$\sup_{\Gamma_2} |P| = \sup_{\Gamma_1} |Q| \leq C \sup_{\Lambda} |Q| \leq C \sup_{U} |P| .$$

La preuve de la seconde partie de la proposition 4 est plus délicate. Nous allons, en fait, montrer le résultat suivant, qui, par approximations successives, terminera notre preuve.

PROPOSITION 5. - Si $K > \Lambda$ et si $U^-$ est un compact contenu dans l'intérieur de $U$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction continue $g$ : $U^- \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver une somme trigonométrique finie $P : \Gamma_2 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ ayant les propriétés suivantes

(9.4) $\sup_{U^-} |g - P| < \varepsilon C \sup_{U^-} |g|$ ,

(9.5) $\sup_{\Gamma_2} |P| \leq C \sup_{U^-} |g|$ ,

(9.6) Les fréquences de $P$ appartiennent à $M$ .

La construction de $P$ (ou plutôt de la somme trigonométrique $Q$ qui lui est associée par (9.1) semble très simple : $g$ permet de définir une fonction $\tilde{g}$ : $\Lambda^- \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ par $\tilde{g}(y_1) = g(y_2)$ si $(y_1, y_2) \in \Lambda$. On prolonge $\tilde{g}$ en $\varphi : \Gamma_1 \to \underset{\sim}{C}$ telle que $\sup_{\Gamma_1} |\varphi| \leq C \sup_{\Lambda^-} |\tilde{g}|$ , et dont le spectre est contenu dans $K$. Ceci est possible car $K > \Lambda$.

Si, par chance, $\varphi$ est une somme trigonométrique $Q$, dont les fréquences appartiennent à $p_1(D)$ , c'est gagné. Comme ceci n'a aucune raison d'avoir lieu, tout le problème revient à approcher $\varphi$ par de telles sommes trigonométriques. Cette approximation se fait en convolant $\varphi$ par certaines mesures discrètes $\sigma_j$ que nous allons maintenant définir en présentant d'abord la fonction $s$ à l'aide de laquelle les $\sigma_j$ sont construites.

(a) Les fonctions $s$ , $s'$ et $s''$. - Soit $V$ un voisinage symétrique de $0$, compact, et tel que $U^- + V$ soit contenu dans $U$. On peut prolonger la fonction continue donnée $g : U^- \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ en une fonction continue de $U$ dans $\underset{\sim}{C}$, encore notée $g$ et telle que $\sup_U |g| = \sup_{U^-} |g|$ .

Soit $\varepsilon$ un nombre positif arbitraire. On peut trouver une fonction $s \in \mathcal{S}(\Gamma_2)$ , positive et jouissant des quatre propriétés suivantes.

(9.7) $\|s\|_1 = \int_{\Gamma_2} |s(y_2)| dy_2 = 1$ ,

(9.8) La transformée de Fourier $r$ de $s$ a un support compact,

(9.9) $s$ peut s'écrire comme une somme $s' + s''$ de deux fonctions positives de $\mathcal{S}(\Gamma_2)$ , où $s'$ est portée par $V$ et $\|s''\|_1 \leq \varepsilon/3$ ,

(9.10) $\sup_{U^-} |g - g * s'| \leq (\varepsilon/3) \|g\|_\infty$ .

(b) Les mesures $\sigma$ , $\sigma'$ et $\sigma''$. La mesure $\rho$. - A l'aide de la fonction $s \in \mathcal{S}(\Gamma_2)$ , on peut définir une mesure atomique (non bornée) $\sigma$ , portée par $q_1(\Delta) \subset \Gamma_1$ , de la façon suivante : la masse de $\sigma$ , en chaque point $q_1(\delta)$

de $q_1(\Delta)$ , $\delta \in \Delta$ , est égale à $s(q_2(\delta))$ . On définit de même $\sigma'$ à l'aide de $s'$ , et $\sigma''$ à l'aide de $s''$ .

Enfin, on désigne par $\rho$ la mesure atomique (non bornée) portée par $p_1(D)$ et dont la masse en chaque $p_1(d)$ , $d \in D$ , vaut $r(p_2(d))$ .

Alors, le support de $\rho$ est localement fini et la transformée de Fourier (au sens des distributions) de $\sigma$ est $\rho$ . En effet, pour chaque fonction test $a \in \mathcal{S}(\Gamma_2)$ , on a

$$\langle \sigma , \hat{a} \rangle = \sum_\Delta \hat{a}(y_2)s(y_1) = \sum_D a(x_2)\hat{s}(x_1) ,$$

grâce à la formule de Poisson, ce qui vaut $\langle \rho , a \rangle$ .

(c) <u>Les mesures</u> $\sigma_j$ , $\sigma'_j$ , $\sigma''_j$ , $\tau_j$ , $\tau'_j$ <u>et</u> $\tau''_j$ . - Soient $(\omega_j)_{j\geq 1}$ une suite fondamentale de voisinages compacts de $0$ dans $G_1$ , $\alpha_j$ une fonction définie positive de $\mathcal{S}(G_1)$ , portée par $\omega_j$ et telle que $\alpha_j(0) = 1$ . La fonction $\alpha_j$ est la transformée de Fourier d'une fonction $a_j \in \mathcal{S}(\Gamma_1)$ . On pose $\sigma_j = a_j\,\sigma$ , $\sigma'_j = a_j\,\sigma'$ et $\sigma''_j = a_j\,\sigma''$ . Alors $\sigma_j$ , $\sigma'_j$ et $\sigma''_j$ sont maintenant des mesures atomiques et bornées portées par $q_1(\Delta) \subset \Gamma_1$ .

Calculons, par exemple, la norme de $\sigma_j$ . On a

$$\|\sigma_j\| = \sum_\Delta a_j(y_1)s(y_2) = \sum_D \alpha_j(-x_1)r(x_2) .$$

Puisque le support de $r$ est compact, dès que $j$ est assez grand, le seul terme non nul dans cette dernière somme est $\alpha(0)r(0) = 1$ . On a donc $\|\sigma_j\| = 1$ pour $j \geq j_0$ .

Soit $\tau_j$ la mesure atomique et bornée, portée par $q_2(\Delta) \subset \Gamma_2$ et définie par $\tau_j\{q_2(\delta)\} = \sigma_j\{q_1(\delta)\}$ pour tout $\delta \in \Delta$ . De même $\tau'_j$ et $\tau''_j$ sont définies à partir de $\sigma'_j$ et $\sigma''_j$ . On a

$$\lim_{j\to\infty} \|\tau''_j\| = \|s''\|_1 \leq \varepsilon/3 ,$$

et $\tau'_j$ tend vaguement vers $s'(y_2)dy_2$ comme on le voit aisément en utilisant encore la formule de Poisson pour calculer soit $\|\tau''_j\|$ soit le produit scalaire de $\tau'_j$ et d'une fonction test.

(d) <u>Propriété d'approximation de la convolution par</u> $\sigma_j$ . - Appelons $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $\Lambda$ l'ensemble des $y_1 \in \Gamma_1$ tels que $(y_1 , y_2) \in \Delta$ pour un certain $y_2 \in U$ , et associons à $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\tilde{g} : \Lambda \to \mathbb{C}$ **définie** par $\tilde{g}(y_1) = g(y_2)$ si $(y_1 , y_2) \in \Delta$ , $y_2 \in U$ .

Soit $\varphi : \Gamma_1 \to \mathbb{C}$ n'importe quelle fonction continue et bornée dont la restriction à $\Lambda$ soit $\tilde{g}$ .

Avec ces notations les produits de convolution $\varphi * \sigma_j$ approchent $\varphi$ de la façon suivante.

LEMME 1. - <u>Dès que</u> $j$ <u>est assez grand</u>, $\sup_{\bar{\Lambda}} |\varphi - \varphi * \sigma_j| \leq \varepsilon\|\varphi\|_\infty$ .

Preuve du lemme 1. - Dès que $j$ est assez grand, on a $\sup_{U^-} |g - g * \tau'_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|g\|_\infty$, car $g$ est continue sur $U$ tandis que $\tau'_j$ est portée par $V$ et tend vaguement vers $s'(y_2)dy_2$ qui vérifie (9.10). Mais $\tau'_j$ est une mesure atomique portée par $q_2(\Delta)$, et si $y_1 \in U^-$ et $(y_1, y_2) \in \Delta$, on a

$$(g - g * \tau'_j)(y_1) = (\tilde{g} - \tilde{g} * \sigma'_j)(y_2) = (\varphi - \varphi * \sigma'_j)(y_2) .$$

D'où $\sup_{\Lambda^-} |\varphi - \varphi * \sigma'_j| \leq (\varepsilon/2)\|\varphi\|_\infty$. Mais $\|\sigma''_j\| \leq \varepsilon/2$ dès que $j$ est assez grand, ce qui achève la preuve du lemme 1.

(e) Propriétés de régularisation de la convolution par $\sigma_j$.

LEMME 2. - Soit $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ une fonction continue et bornée dont le spectre est contenu dans une partie compacte $K$ de $G_1$, telle que $\varphi$ restreinte à $\Lambda$ vaut $\tilde{g}$ et telle que $\|\varphi\|_\infty \leq C\|g\|_\infty$. Soit $Q_j = \varphi * \sigma_j$. Alors une sous-suite des $Q_j$ converge uniformément sur tout compact vers une somme trigonométrique finie $Q : \Gamma_1 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ dont les fréquences appartiennent à $K \cap p_1(D)$ et telle que

$$\sup_{\Lambda^-} |\varphi - Q| \leq \varepsilon C\|g\| \quad \text{et} \quad \|Q\|_\infty \leq C\|g\|_\infty .$$

Le lemme 2 achève de prouver la proposition 5. Pour prouver le lemme 2, remarquons que les $Q_j$ sont uniformément bornées sur $\Gamma_1$ et que leurs spectres sont contenus dans le compact fixe $K$. Donc les $Q_j$ sont uniformément équicontinues, et une sous-suite des $Q_j$ converge uniformément sur tout compact de $\Gamma_1$ vers une fonction bornée continue $Q$ dont le spectre est une partie de $K$. Le lemme 1 donne à la limite, $\sup_{\Lambda^-} |\varphi - Q| \leq \varepsilon C\|g\|_\infty$. De même, on a

$$\|Q\|_\infty \leq \underline{\lim}\|Q_j\|_\infty \leq C\|g\|_\infty .$$

Il reste à montrer que $Q$ est une somme trigonométrique dont les fréquences appartiennent à $K \cap p_1(D)$.

La mesure $\sigma_j$ a pour transformée de Fourier $\alpha_j * \rho$. Soit $\beta : G_1 \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ une fonction test, nulle au voisinage de l'intersection finie $E$ de $K$ et du support de $\rho$.

Alors $(\alpha_j * \rho)\beta$ est nulle sur un voisinage de $K$ si $j$ est assez grand.

Soit $\hat{\varphi}$ la distribution (portée par $K$) qui est la transformée de Fourier de $\varphi$. On a $\int_{G_1} (\alpha_j * \rho)\beta\hat{\varphi}\, dx_1 = 0$ si $j$ est assez grand. Cela entraîne $\int_{\Gamma_1} (\sigma_j * \varphi)\hat{\beta}\, dy_1 = 0$ et par simple passage à la limite $\int_{\Gamma_1} Q\hat{\beta}\, dy_1 = 0$. Le spectre de la fonction continue et bornée $Q$ est contenu dans l'ensemble fini $E$ : $Q$ est donc une somme trigonométrique.

10. Complément : l'ensemble des entiers quadratfrei.

Appelons $\Lambda$ l'ensemble des entiers rationnels sans diviseurs carrés : si $p_1 < p_2 < \dots$ est la suite croissante des nombres premiers, un élément $n$ de $\Lambda$ peut être écrit $n = \pm p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots$, où $\varepsilon_j = 0$ ou $1$ et $\varepsilon_j = 0$ pour $j$ assez grand. Nous allons voir que $\Lambda$ est un modèle sans être un modèle régulier ; le théorème 2 prend alors la forme suivante .

THÉORÈME 4. - <u>La période de l'ensemble</u> $\Lambda$ <u>des entiers rationnels quadratfrei est</u> $6/\pi^2$. <u>En revanche, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une fonction continue</u> $g : [0, \varepsilon] \longrightarrow C$ <u>qui ne peut être prolongée en une fonction continue</u> $f : R \longrightarrow C$ <u>dont les fréquences soient quadratfrei.</u>

Appelons $T$ la période de $\Lambda$, et montrons que $T \geq 6/\pi^2$. Pour tout ensemble $\Lambda$ de nombres réels, on a $T \geq \overline{\text{Dens}}\,\Lambda$ comme le montrent (6.1) et la proposition 3. Dans notre cas, $\overline{\text{Dens}}\,\Lambda \geq 6/\pi^2$ ([1] p. 269, th. 333).

Montrons donc que $T \leq 6/\pi^2$. Pour cela, nous devons vérifier que $\Lambda$ est un modèle. Comme au § 3, $A = A' \times \underset{\sim}{R}$ est l'anneau des adèles de $Q$ et, pour tout nombre premier $p \in P$, $U_p$ est le complémentaire de $p^2 \underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{Z}_p$. Soit $U = \prod_{p\in P} U_p$ ; $U$ est une partie compacte de $A'$, dont l'intérieur est vide et dont la mesure est $\prod_{p\in P}(1 - p^{-2}) = 6/\pi^2$. Soient enfin $U_n$ le produit

$$U_{p_1} \times \ldots \times U_{p_n} \times \prod_{p>p_n} \underset{\sim}{Z}_p \quad (n \geq 1)$$

et $\Lambda_n$ le modèle régulier défini par $U_n$. Alors $\Lambda \subset \Lambda_n$, $n > 1$, et la période de $\Lambda_n$ est égale à la densité de $\Lambda_n$ qui tend vers $6/\pi^2$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Ainsi $T \leq 6/\pi^2$.

Pour tout ensemble $\Lambda$ de nombres réels, soit $\tau \geq 0$ le supremum des longueurs des intervalles $I$ tels que, restreintes à $I$, les fonctions presque périodiques à spectre dans $\Lambda$ deviennent n'importe quelle fonction continue sur $I$.

Alors (6.1) et la proposition 3 donnent $\tau \leq \underline{\text{Dens}}\,\Lambda$. Le théorème 4 résultera de la propriété suivante.

LEMME. - <u>On peut trouver des intervalles</u> $[a_k, b_k]$ <u>d'entiers, arbitrairement longs et ne contenant aucun entier quadratfrei. La même propriété vaut si "quadratfrei" est remplacé par "n'est divisible par aucun cube", etc.</u>

En d'autres termes, $\underline{\text{Dens}}\,\Lambda = 0$. Voici une démonstration très simple de cette propriété. Si la conclusion du lemme était en défaut, il existerait un ensemble fini $F$ d'entiers tel que $\Lambda + F = \underset{\sim}{Z}$. Soit $F'$ (resp. $\Lambda'$, $\underset{\sim}{Z}'$) l'ensemble des $y \in A'$ tels que $(x, y) \in Q$ pour $x \in F$ (resp. $\Lambda$, $\underset{\sim}{Z}$) : On aurait alors

$$\Lambda' + F' = \underset{\sim}{Z}' . \tag{10.1}$$

Mais la fermeture de $\Lambda'$ dans $A'$ est contenue dans le compact $U$ ; $F'$ étant fini, celle de $\Lambda' + F'$ est contenue dans le compact $U + F'$.

Donc, (10.1) entraîne $\prod_{p\in P} \underset{\sim}{Z}_p \subset U + F'$, ce qui est impossible : une réunion finie de compacts sans intérieur est sans intérieur.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 4th edition. - Oxford, the Clarendon Press, 1960.

[2] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[3] LANDAU (H. J.). - Necessary density conditions ..., Acta Math., uppsala, t. 117 1967, p. 37-52.

[4] MEYER (Y.). - Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 117).

[5] MEYER (Y.). - Nombres algébriques et analyse harmonique, Annales Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 3, 1970, p. 75-110.

[6] RUDIN (W.). - Fourier Analysis on groups. - New York, J. Wiley and Sons, 1962 (Interscience Tracts in Mathematics, 12).

[7] WEIL (A.). - Basic number theory. - Berlin Springer-Verlag, 1967 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 144).


(Texte reçu le 14 février 1972)

Yves MEYER
Université Paris-Sud [Paris-XI]
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 ORSAY