PAUL GÉRARDIN

Sur les représentations du groupe linéaire général sur un corps p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1972-1973), exp. nº 12, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 12, 24 p.

15 janvier 1973

SUR LES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE LINÉAIRE GÉNÉRAL SUR UN CORPS $\mathfrak{p}$-ADIQUE

par Paul GÉRARDIN

Soient k un corps local $\mathfrak{p}$-adique, et $G(k)$ le groupe $GL_h(k)$. Notons K l'extension non ramifiée de degré h de k . Pour chaque caractère très régulier du groupe multiplicatif K^* de K , on construit une représentation admissible irréductible supercuspidale du groupe $GL_h(k)$, dont la classe ne dépend que de l'orbite du caractère très régulier par le groupe de Galois de K sur k . Ce résultat est conforme aux conjectures énoncées par LANGLANDS, qui donne un paramétrage des représentations irréductibles admissibles du groupe $GL_h(k)$ par les représentations de degré h de son groupe de Weil-Šafarevič $W(k)$.

La méthode utilisée revient pour l'essentiel à celle de T. SHINTANI [10], qui traite également le cas des extensions modérément ramifiées, en caractéristique 0 . Elle repose sur les techniques exposées au cours de l'exposé précédent, sur les groupes d'Heisenberg et diamant sur les corps finis [2]. Rédigé ici dans le cadre de GL_h , ce travail a son cadre naturel dans les groupes réductifs déployés, où les résultats sont analogues [3].

Sommaire

1. Structure du groupe GL_h sur un corps $\mathfrak{p}$-adique.

1.1. Soit k un corps local $\mathfrak{p}$-adique, dont l'anneau des entiers sera noté $\mathcal{O}$, le corps des restes $\overline{k} = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ ayant q éléments.

La base canonique (e_i) de k^h permet de définir, pour tout anneau commutatif unitaire M , le groupe $G(M) = GL_h(M)$ des matrices d'ordre h à coefficients dans M , et déterminant dans le groupe M^* des unités de M , ainsi que l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}(M) = \mathrm{End}(M^h)$.

Pour tout idéal p^n de $\mathcal{O}$, on définit $G(p^n)$ et $\mathfrak{G}(p^n)$ comme noyau de la réduction modulo p^n sur les entiers :

$$(1) \qquad 1 \to G(p^n) \to G(\mathcal{O}) \to G(\mathcal{O}/p^n) \to 1$$

$$(2) \qquad 0 \to \mathfrak{G}(p^n) \to \mathfrak{G}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{G}(\mathcal{O}/p^n) \to 0$$

On définit de même, si $n \geqslant m > 0$, $G(p^m/p^n)$ et $\mathfrak{G}(p^m/p^n)$. On a les isomorphismes canoniques

$$(3) \qquad G(p^m)/G(p^n) \simeq G(p^m/p^n) , \qquad \mathfrak{G}(p^m)/\mathfrak{G}(p^n) \simeq \mathfrak{G}(p^m/p^n) ,$$

et aussi, si $n \geqslant 1$, les bijections naturelles d'ensembles :

$$(4) \qquad G(p^n) = I + \mathfrak{G}(p^n) , \qquad G(p^m/p^n) = I + \mathfrak{G}(p^m/p^n) \quad \text{si} \quad n \geqslant m \geqslant 1 .$$

LEMME 1. - <u>Structure de</u> $G(\mathcal{O})$: <u>Les quotients successifs de la suite</u> $G(p^n)$ <u>des sous-groupes invariants de</u> $G(\mathcal{O})$ <u>sont</u>

$$(5) \qquad G(\mathcal{O}/p) = G(\overline{k}) ;$$

$$(6) \qquad G(p^n/p^{n+1}) \simeq \mathfrak{G}(p^n/p^{n+1}) \quad \underline{\text{pour}} \quad n > 1 .$$

<u>Le groupe des commutateurs</u> $(G(p^n) , G(p^m))$ <u>est le groupe</u> $G(p^{n+m})$.

<u>Preuve</u>. - Immédiate, l'isomorphisme (6) est donné par la bijection (4). C'est aussi un cas particulier du lemme plus général suivant.

LEMME 2. - <u>Si</u> $2m \geqslant n \geqslant m \geqslant 1$, <u>le groupe</u> $G(p^m/p^n)$ <u>est commutatif et isomorphe au groupe</u> $\mathfrak{G}(p^m/p^n)$ <u>par</u> (4).

Quant aux commutateurs, le résultat peut s'énoncer sous la forme suivante.

LEMME 3. - <u>Si</u> $3m \geqslant n > 2m \geqslant 1$, <u>le diagramme</u> (7) <u>est commutatif</u> :

$$(7) \qquad \begin{array}{ccc} G(p^m/p^n) \times G(p^m/p^n) & \xrightarrow{(\ ,\ )} & G(p^{2m}/p^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{G}(p^m/p^{2m}) \times \mathfrak{G}(p^m/p^{2m}) & \xrightarrow{[\ ,\ ]} & \mathfrak{G}(p^{2m}/p^n) \end{array}$$

<u>La flèche supérieure est le commutateur</u>, <u>celle du bas</u>, <u>le crochet de Lie composé avec la réduction</u> <u>mod</u> p^n , <u>les flèches verticales sont</u>, <u>à gauche la réduction</u> <u>mod</u> p^{2m} <u>composée avec l'isomorphisme du lemme</u> 2, <u>à droite c'est l'isomorphisme du lemme</u> 2.

<u>Remarque</u>. - Le groupe $G(p^m/p^{m+1})$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps résiduel $\overline{k}$, de dimension h^2 , par l'isomorphisme (6).

1.2. Soient A le sous-groupe de G formé des matrices diagonales, et $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de Lie, commutative, formée des matrices diagonales. Comme au paragraphe précédent, on définit $A(M)$ et $\mathfrak{A}(M)$ pour tout anneau commutatif unitaire

M , puis $A(\mathfrak{p}^n)$ et $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}^n)$, $A(\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$ et $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$, si $n \geqslant m > 0$. Les résultats précédents sont encore valables en remplaçant G par A , et $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{A}$, notamment le lemme 2 (le lemme 3 n'ayant plus d'intérêt, A et $\mathfrak{A}$ sont commutatifs).

1.3. Soit τ un caractère non trivial du groupe additif du corps k . On désigne par Tr la forme linéaire trace sur $\mathfrak{G}$. L'application

(8) $$x , y \in \mathfrak{G}(k) \dashrightarrow \tau(\mathrm{Tr}\ xy)$$

met $\mathfrak{G}(k)$ en dualité avec lui-même. Si d est l'ordre de τ (c'est-à-dire le plus grand entier tel que τ soit trivial sur $\mathfrak{p}^{-d}$) l'orthogonal du sous-groupe $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ dans cette dualité est le sous-groupe $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{-d})$ des matrices à coefficients appartenant à $\mathfrak{p}^{-d}$:

(9) $$\tau(\mathrm{Tr}\ xy) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{G}(\mathcal{O}) \Longleftrightarrow y \in \mathfrak{G}(\mathfrak{p}^{-d}) \ .$$

LEMME 4. - <u>Fixons un caractère</u> τ <u>d'ordre</u> 0 <u>de</u> k . <u>Soit</u> $2m \geqslant n \geqslant m \geqslant 1$. <u>Le groupe des caractères du groupe commutatif</u> $G(\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$ <u>s'identifie au groupe</u> $\mathfrak{G}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'})$ <u>où</u> $m' + m = n$, <u>par l'application</u>

(10) $$x \in G(\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n) \ , \quad y \in \mathfrak{G}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'}) \longmapsto \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}(x - 1)\ y)$$

<u>où</u> π <u>est un élément premier de</u> $\mathcal{O}$, <u>fixé</u>.

<u>Preuve</u>. - Ceci résulte immédiatement de (9) et du lemme 2.

<u>Remarque</u>. - Avec les mêmes notations, le sous-groupe $G(\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$ est commutatif invariant dans $G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$; celui-ci opère donc sur le groupe des caractères de $G(\mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$, c'est-à-dire sur $\mathfrak{G}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'})$; cette action est :

(11) $$x \in G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) \ , \quad y \in \mathfrak{G}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'}) \longmapsto xyx^{-1} \in \mathfrak{G}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'}) \ ,$$

où le produit xyx^{-1} se fait avec x réduit modulo $\mathfrak{p}^{m'}$; le sous-groupe $G(\mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ de $G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$, qui n'est commutatif que si $m' = m$ et $n = 2m$, opère trivialement ; il s'agit donc en fait d'une action de $G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'})$.

1.4. Le normalisateur N de A dans G est le sous-groupe des matrices monomiales. Le groupe quotient est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_h$:

(12) $$1 \to A \to N \to \mathfrak{S}_h \to 1$$

On a un prolongement naturel de $\mathfrak{S}_h$ dans G en associant à une permutation sa matrice dans la base (e_i) .

1.5. A chaque décomposition $m = (m_1 , \ldots , m_r)$ de h en entiers $m_i \geqslant 1$, on associe le sous-groupe parabolique standard P_m de G formé des éléments triangulaires supérieurs par blocs dus à la décomposition m de h :

(13) $$\begin{pmatrix} \square & \square & & * \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux sont d'ordre $m_1, \dots, m_r$; et on définit de même la sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{P}_m$ de $\mathfrak{G}$. A la décomposition m, on associe également le sous-groupe horicyclique standard U_m de G formé des matrices (13) dont les blocs diagonaux sont les matrices unité d'ordre $m_1, \dots, m_r$; c'est un sous-groupe invariant de P_m, et le quotient est le groupe $GL_m = GL_{m_1} \times \dots \times GL_{m_r}$:

$$(14) \qquad 1 \to U_m \to P_m \to GL_m \to 1$$

On définit de même la sous-algèbre horicyclique standard $\mathfrak{U}_m$, associée à la décomposition m, en prenant les matrices (13) dont les blocs diagonaux sont nuls. Remarquons que si M est un anneau commutatif unitaire, on a

$$(15) \qquad \mathrm{Tr}\, xy = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{P}_m(M) \Leftrightarrow y \in \mathfrak{U}_m(M) .$$

On appellera sous-groupes (resp. sous-algèbres) paraboliques (resp. horicycliques) de G (resp. de $\mathfrak{G}$), les conjugués par G des sous-groupes (resp. sous-algèbres) paraboliques et horicycliques standards. Un sous-groupe parabolique est dit propre s'il est différent de G, un sous-groupe horicyclique est dit propre s'il est différent de I ; on a la notion analogue pour les sous-algèbres.

Les décompositions de h en deux donnent les sous-groupes paraboliques propres maximaux (pour l'inclusion) et les sous-groupes horicycliques propres minimaux, de même pour les sous-algèbres paraboliques et horicycliques.

1.6. LEMME 5. - Décomposition de Cartan : On a l'égalité :

$$(16) \qquad G(k) = G(\mathcal{O})\, A(k)\, G(\mathcal{O})$$

Plus précisément, soient $\underset{\sim}{Z}^h(+)$ les $(m_1, \dots m_h) \in \underset{\sim}{Z}^h$ tels que $m_1 \geq \dots \geq m_h$ et π un élément premier de $\mathcal{O}$. L'application

$$(17) \qquad (m_1, \dots, m_h) \in \underset{\sim}{Z}^h(+) \longmapsto G(\mathcal{O})\, \mathrm{diag}(\pi^{m_1}, \dots, \pi^{m_h})\, G(\mathcal{O})$$

est une bijection sur l'ensemble des doubles classes de $G(k)$ sous $G(\mathcal{O})$.

Preuve. - C'est le théorème des diviseurs élémentaires.

1.7. Le centre C de G est formé des matrices scalaires inversibles : c'est le groupe multiplicatif. Désignons par $A(+)$ l'image de $\underset{\sim}{Z}^h(+)$ dans $A(k)$ par

$$(18) \qquad (m_1, \dots, m_h) \in \underset{\sim}{Z}^h(+) \longmapsto \mathrm{diag}(\pi^{m_1}, \dots, \pi^{m_h}) .$$

Les éléments de $A(+)$ appartenant au centre $C(k)$ viennent des $(m, \dots, m)$.

LEMME 6. - Si $a \in A(+)$ n'appartient pas au centre, il y a un horicycle standard propre U de G tel que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$(19) \qquad aU(\mathfrak{p}^n)a^{-1} \subset U(\mathfrak{p}^{n+1}) , \quad \text{où} \quad U(\mathfrak{p}^m) = U(k) \cap G(\mathfrak{p}^m) \quad \text{si} \quad m \geq 0 .$$

Preuve. - Si a provient de $(m_1, \dots, m_h) \in \underset{\sim}{Z}^h(+)$ par (18), et n'est pas dans le centre, il y a un indice i tel que $m_i > m_{i+1}$; soit alors U_i le sous-groupe horicyclique standard minimal défini par la partition $(i, h-i)$. La conjugaison par a transforme la matrice (x_{rs}) en la matrice $(p^{m_r - m_s} x_{rs})$. Pour les éléments de $U_i(k)$, on ne peut avoir $x_{rs} \neq 0$, si $r \neq s$, que si $r \leqslant i < s$, et alors $m_r - m_s \geqslant m_i - m_{i+1} > 1$; on a donc, pour ces couples (r, s),

$$x_{rs} \in p^n \Rightarrow \pi^{m_r - m_s} x_{rs} \in p^{n+1} ,$$

d'où l'inclusion (19).

1.8. La valuation de k le munit d'une structure de corps localement compact ; elle définit sur $G(k)$ une topologie de groupe localement compact, qui en fait un espace totalement discontinu en ce sens que tout point admet un système fondamental de voisinages ouverts et compacts. En effet, les sous-groupes $G(p^n)$ forment un système fondamental de voisinages de l'élément neutre, et ce sont des sous-groupes ouverts et compacts ; par translations, on voit que $G(k)$ est un espace totalement discontinu.

Le groupe $G(k)$ est unimodulaire : une mesure de Haar dx sur $G(k)$ est invariante des deux côtés. On normalise cette mesure par la condition :

(20) $$\int_{G(\mathcal{O})} dx = 1 .$$

On définit également la mesure de Haar $d\dot{x}$ sur le groupe quotient $G(k)/C(k)$, comme la mesure quotient des mesures de Haar dx sur $G(k)$ par dz sur $C(k)$, isomorphe à $GL_1(k)$.

2. Sous-groupes de Cartan non ramifiés de $G(k)$.

2.1. Soit K l'extension non ramifiée de degré h de k. Soit s la substitution de $\mathfrak{S}_h$ qui envoie e_i sur e_{i+1} (où $e_{h+1} = e_1$). Si q est l'ordre du corps résiduel $\bar{k}$ de k, le groupe multiplicatif du corps résiduel $\bar{K}$ de K est cyclique d'ordre $q^h - 1$. Comme $q^h - 1 \geqslant h$, il y a donc un élément $a \in \mathcal{O}_K^*$, le groupe des unités de K, dont l'image dans $\bar{K}$ a tous ses conjugués distincts par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{K}/\bar{k})$. Soit F la substitution de Frobenius, générateur du groupe de Galois de K sur k, isomorphe au groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}/\bar{k})$ ([8], p. 28). La matrice g dont la i-ième colonne est $(a^{F^i}, a^{F^{i+1}}, \dots, a^{F^{i-1}})$, i. e. vérifie $g^F = gs$ (où g^F désigne la matrice dont les éléments sont les transformés par F des éléments de g) ; la matrice g réduite modulo p_K est une matrice de Vandermonde, de déterminant $\neq 0$ par l'hypothèse faite sur a. On dispose donc d'un élément $g \in G(\mathcal{O}_K)$ qui vérifie $g^{-1} g^F = s$. En conséquence, pour un $x \in G(K)$, on a l'équivalence suivante

(1) $$gxg^{-1} \in G(k) \Leftrightarrow sx^F s^{-1} = x , \quad \text{où } g \in G(\mathcal{O}_K) \text{ vérifie } g^{-1} g^F = s .$$

LEMME 1. - <u>Transformation de Cayley</u> : <u>Soit</u> s <u>la permutation circulaire de</u> $\mathfrak{S}_h$ <u>donnée par</u> $e_i \mapsto e_{i+1}$. <u>Il y a un</u> $g \in G(\mathcal{O}_K)$, <u>où</u> K <u>est l'extension non rami-</u>

fiée de degré h de k, tel que

(2) $$g^{-1}\,g^F = s\ .$$

Soit $G(s, k)$ le sous-groupe de $G(K)$ formé des éléments x qui vérifient

(3) $$x = sx^F s^{-1}$$

L'automorphisme intérieur de $G(K)$, défini par g, envoie $G(s, k)$ sur $G(k)$, et, pour tout $n \geqslant 0$, $G(s, p^n) = G(p_K^n) \cap G(s, k)$ sur $G(p^n)$; si $A(s, k) = A(K) \cap G(s, k)$, alors $gA(s, k)\,g^{-1}$ est un sous-groupe de $G(k)$ isomorphe au groupe multiplicatif de K ; ce sous-groupe est commutatif maximal et formé d'éléments diagonalisables sur K.

Preuve. - La discussion qui précède montre les deux premières assertions. Comme g est entier, on a

$$gxg^{-1} \in G(\mathcal{O}_K) \Leftrightarrow x \in G(\mathcal{O}_K)\ ,$$

d'où la conjugaison de $G(s, p^n)$ avec $G(p^n)$ par g. Ensuite, le sous-groupe $A(s, k)$ est formé des éléments

(4) $$\operatorname{diag}(t, t^F, \ldots, t^{F^{h-1}})\ ,\ tt^F \ldots t^{F^{h-1}} \neq 0\ ,$$

et l'application qui associe $t \in K^*$ à la matrice (4) est un isomorphisme sur K^*. Il est clair que $gA(s, k)\,g^{-1}$ est un sous-groupe commutatif de $G(k)$, formé d'éléments diagonalisables sur K ; il est maximal car il contient un élément régulier (valeurs propres distinctes deux à deux) : il suffit de prendre $t = a$ de 2.1.

2.2. Définition. - On appelle sous-groupe de Cartan du groupe $G(k)$, tout sous-groupe commutatif maximal de $G(k)$ formé d'éléments diagonalisables sur la clôture algébrique de k. "Un sous-groupe de Cartan se déploie dans une extension de k" signifie que ses éléments ont leurs valeurs propres dans cette extension.

Il est clair qu'un sous-groupe de Cartan se déploie dans une extension galoisienne de degré fini de k. Le lemme 1 montre qu'on a construit un sous-groupe de Cartan non ramifié, i. e. qui se déploie dans une extension non ramifiée de k.

2.3. Soient $m_1 \geqslant m_2, \ldots, \geqslant m_q \geqslant 1$ des entiers de somme égale à h. Pour chaque i, on désigne par s_i la permutation circulaire de $\{e_{m_{i-1}+1}, \ldots, e_{m_i}\}$ définie par

$$e_j \longmapsto e_{j+1}\ , \qquad e_{m_i} \longmapsto e_{m_{i-1}+1} \quad (m_0 = 0)\ .$$

Soit $s = (s_1, \ldots, s_r)$ la substitution de $\mathfrak{S}_h$ définie par ces r cycles. Appelons K l'extension non ramifiée de k de degré l'ordre de s (égal au p. p. c. m. des m_i). La formule (3) définit $G(s, k)$, et on pose

$$A(s, k) = A(K) \cap G(s, k)\ .$$

Il y a des $g_i \in GL_{m_i}(\mathcal{O}_K)$ tels que $g_i^{-1}\,g_i^F = s_i$ (lemme 1), d'où un

$$g = \mathrm{diag}(g_1 \, , \, \ldots \, , \, g_r) \in G(\mathcal{O}_K)$$

tel que $g^{-1} \, g^F = s$. Cet élément envoie $G(s \, , \, k)$ sur $G(k)$, et $A(s \, , \, k)$ sur un sous-groupe de Cartan de $G(k)$ qui se déploie dans K : il y a en effet un élément régulier dans $A(s \, , \, k)$, puisqu'il contient une infinité d'éléments.

Si $g_1 \in G(K)$ vérifie aussi $g_1^{-1} \, g_1^F = s$, alors $gg_1^{-1} = (gg_1^{-1})^F \in G(k)$, et les deux sous-groupes de Cartan $gA(s \, , \, k) \, g^{-1}$ et $g_1 \, A(s \, , \, k) \, g_1^{-1}$ sont conjugués par cet élément de $G(k)$, et réciproquement. Si l'on observe que les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_h$ sont paramétrées par les partitions de h , on a donc prouvé le résultat suivant, qui sera complété au paragraphe suivant.

LEMME 2. - <u>A chaque partition de</u> h <u>est associée une classe de conjugaison dans</u> $G(k)$ <u>de sous-groupes de Cartan non ramifiés</u> ; <u>ces sous-groupes de Cartan sont isomorphes aux produits des groupes multiplicatifs des extensions non ramifiées de degrés correspondant à la partition associée</u>.

2.4. Inversement, si T est un sous-groupe de Cartan non ramifié de $G(k)$, la sous-algèbre qu'il engendre dans $\mathfrak{G}(k)$ est semi-simple commutative maximale, donc somme directe de corps, et T est la trace sur $G(k)$ du produit de leurs groupes multiplicatifs : ces corps sont donc tous des extensions non ramifiées de k , et le choix de bases de ces corps sur k montre que T est de la forme du lemme 2.

PROPOSITION 1. - <u>Classification des sous-groupes de Cartan non ramifiés</u> : <u>Les classes de conjugaison des sous-groupes de Cartan non ramifiés de</u> $G(k)$ <u>sont en bijection avec les classes de conjugaison du groupe symétrique</u> $\mathfrak{S}_h$.

2.5. Soit T un sous-groupe de Cartan non ramifié. On appelle rang déployé de T , le rang du $\underset{\sim}{Z}$ module libre quotient de T par son sous-groupe compact maximal. Comme un sous-groupe de Cartan contient toujours le centre $C(k)$ de $G(k)$, son rang déployé est $\geqslant 1$; s'il est égal à 1 , on dit que T est minisotrope. Les résultats ci-dessus montrent que si la partition associée à T comprend r entiers, alors r est aussi le rang déployé de T : en effet, on se ramène à chercher le sous-groupe compact maximal d'un produit de groupes multiplicatifs de corps: c'est le produit de leurs groupes d'unités. Remarquons que r est aussi égal au nombre de cycles en lesquels se décompose la substitution associée à T , c'est-à-dire encore à la multiplicité de la valeur propre 1 . Comme les permutations circulaires sont toutes conjuguées dans $\mathfrak{S}_h$, on a établi le résultat suivant.

LEMME 3. - <u>Rang déployé d'un sous-groupe de Cartan non ramifié</u> : <u>Le rang déployé d'un sous-groupe de Cartan non ramifié est le nombre de cycles en lesquels se décompose la permutation associée</u>. <u>Il y a une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan non ramifiés minisotropes</u> ; <u>un tel sous-groupe de Cartan est isomorphe au groupe multiplicatif de l'extension non ramifiée de degré</u> h <u>de</u> k .

3. Caractères très réguliers.

3.1. Désormais, on désigne par K l'extension non ramifiée de degré h de k, par $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers, et par $\overline{K} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$ le corps des restes. Soit α un caractère du groupe multiplicatif K^* ; son conducteur n est le plus petit entier tel que la restriction de α au sous-groupe ouvert compact $1 + \mathfrak{p}_K^n$ soit triviale. Si le conducteur est $\geqslant 2$, la restriction de α à $1 + \mathfrak{p}_K^{n-1}$ définit un caractère, noté aussi α, du groupe $(1 + \mathfrak{p}_K^{n-1})/(1 + \mathfrak{p}_K^n)$ isomorphe canoniquement au groupe $\mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n$, lui-même isomorphe au groupe additif de $\overline{K}$, dès qu'on a choisi un élément premier de $\mathcal{O}_K$. Si τ est un caractère d'ordre 0 de k (1.3.), et Tr la forme linéaire trace de K sur k, l'application

$$x \in \mathfrak{p}_K^{n-1}\ ,\quad y \in \mathcal{O}_K \longmapsto \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}\ xy)\ , \tag{1}$$

où π est un élément premier de $\mathcal{O}$, met $\mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n$ en dualité avec $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K = \overline{K}$. Si le caractère α de K a un conducteur $n \geqslant 2$, on définit donc un élément $\alpha^0 \in \overline{K}^*$ par la formule

$$\alpha(1 + z) = \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}\ z\alpha^0)\ ,\qquad z \in \mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n \tag{2}$$

on dit que α^0 est associé à α.

3.2. Définition. – On dit que le caractère α de K est très régulier, si

(i) son conducteur est $\geqslant 2$, i. e. α n'est pas trivial sur $1 + \mathfrak{p}_K$;

(ii) son élément associé est primitif.

Avec les notations de 3.1., la condition (ii) signifie que $\overline{K} = \overline{k}(\alpha^0)$; elle équivaut donc à la suivante :

(ii)' si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/\overline{k})$ est $\neq 1$, on a ${}^{\gamma}\alpha^0 \neq \alpha^0$.

On a désigné par un γ à gauche l'action contragrédiente sur les caractères de $\mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n$ de l'action de γ sur ce groupe. Elle implique que α est régulier, i. e.

$$\text{si}\quad \gamma \in \mathrm{Gal}(K/k) \neq 1\ ,\quad \text{on a}\quad {}^{\gamma}\alpha \neq \alpha\ , \tag{3}$$

avec la notation analogue.

3.3. Soit s la matrice de la permutation circulaire de 2.1., dont on reprend les notations. Par l'isomorphisme de K^* avec $A(s\ ,\ k)$, on peut donc parler des caractères très réguliers de $A(s\ ,\ k)$. On définit les groupes $A(s\ ,\ \mathcal{O})$, $A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$, $A(s\ ,\ \mathfrak{p}^n)$, ... , comme image des sous-groupes $\mathcal{O}_K^*$, $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^n)^*$, $1 + \mathfrak{p}_K^n$, ... , de K^* par (4) du n° 2. L'élément associé à un caractère α de $A(s\ ,\ k)$, dont le conducteur n est $\geqslant 2$, se lit donc comme un $\alpha^0 \in \mathfrak{A}(s\ ,\ \overline{k})$, la sous-algèbre de $\mathfrak{A}(\overline{K})$ faite des points fixés par $x \longmapsto sx^F s^{-1}$. Si τ est un caractère d'ordre 0 de k, (2) s'écrit

$$\alpha(1 + z) = \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}\ z\alpha^0)\ ,\qquad z \in A(s\ ,\ \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n)\ . \tag{4}$$

Pour un caractère α de $A(s\ ,\ k)$, être très régulier s'énonce donc sous la forme :

(i) le conducteur n de α est $\geqslant 2$, i. e. α n'est pas trivial sur $A(s\ ,\ \mathfrak{p})$,

(ii) le polynôme caractéristique de la matrice associée à α est irréductible.

3.4. A l'aide du lemme 1 du n° 2, on transporte la notion de caractère très régulier et d'élément associé sur les sous-groupes de Cartan non ramifiés de $G(k)$. Remarquons que $\mathfrak{U}(s\ ,\ \overline{k})$ est contenu dans $\mathfrak{G}(s\ ,\ \overline{k})$, définie par les éléments de $\mathfrak{G}(\overline{K})$ qui vérifient (3) du n° 2. L'élément associé à un caractère très régulier est donc un élément de $\mathfrak{G}(\overline{k})$ dont le polynôme caractéristique est irréductible.

LEMME 1. - *Soit* T *un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié de* $G(k)$. *Pour tout caractère très régulier* θ *de* T , *pour toute sous-algèbre parabolique propre* $\mathfrak{P}$ *de* $\mathfrak{G}(\overline{k})$ (1.5.), *on a*

(5) $$\theta^0 \notin \mathfrak{P}\ ,\ \text{où}\ \theta^0\ \text{est l'élément associé à}\ \theta\ .$$

Preuve. - La sous-algèbre $\mathfrak{P}$ est conjuguée, par un élément de $G(\overline{k})$, d'une sous-algèbre parabolique standard propre $\mathfrak{P}_m$, où $m = (m_1\ ,\ \dots\ ,\ m_r)$ avec $r \geqslant 2$ (1.5.). Or, pour tout $x \in \mathfrak{P}_m(\overline{k})$, le polynôme caractéristique de x est produit de r polynômes de degrés m_i respectivement, à coefficients dans $\overline{k}$, est n'est donc pas irréductible.

Donnons une formulation équivalente de ce lemme, qui sera utilisé sous cette forme.

LEMME 2. - *Soit* T *un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié de* $G(k)$. *Soit* θ *un caractère très régulier de* T , *de conducteur* n *et d'élément associé* θ^0 . *Alors, pour toute sous-algèbre horicyclique standard propre* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathfrak{G}(\overline{k})$ *et pour tout* $x \in G(\mathcal{O})$, *on a*

(6) $$\int_{x\mathfrak{U}(\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n)x^{-1}} \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}\ u\theta^0)\ du = 0\ ,$$

où τ *est un caractère d'ordre* 0 *de* k , π *un élément premier de* $\mathcal{O}$, *et l'intégrale signifie la somme des valeurs*.

Preuve. - Avec les notations de 1.5., appelons la sous-algèbre horicyclique $\mathfrak{U}_m$ le radical de la sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{P}_m$; remarquons que

(7) $$\mathrm{Tr}\ xy = 0\quad \text{pour tout}\quad x \in \mathfrak{P}_m \Leftrightarrow y \in \mathfrak{U}_m\ .$$

Par conjugaison, on a la notion de radical d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{P}$; (7) montre que le radical de $\mathfrak{P}$ est son orthogonal pour la forme bilinéaire Tr .

Le lemme 1 disant que $\theta^0 \notin \mathfrak{P}$, si $\mathfrak{P}$ est une sous-algèbre parabolique propre, il en résulte que le caractère du sous-groupe $x\mathfrak{U}(\mathfrak{p}^{n-1})\,x^{-1}$ où $\mathfrak{U}$ ~~est le sous-groupe horicyclique~~ standard conjugué du radical de $\mathfrak{P}$, défini par

$$u \longmapsto \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}\ u\theta^0)\ ,$$

n'est pas trivial, et comme ce caractère est en fait un caractère du groupe commutatif fini $x\mathfrak{U}(\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n)\,x^{-1}$, l'identité (6) signifie qu'il est différent de 1 .

Remarque. - On peut énoncer (6) sous la forme suivante : l'élément associé à un caractère très régulier d'un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié est une forme parabolique sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}(\overline{k})$.

4. Représentations admissibles et supercuspidales de $G(k)$.

4.1. Soit γ une représentation du groupe $G(k)$ dans un espace vectoriel complexe E . On dit que γ est algébrique si, pour tout vecteur de E , son stabilisateur dans $G(k)$ est un sous-groupe ouvert de $G(k)$. On dit que γ est admissible si elle est algébrique et si, pour tout sous-groupe ouvert de $G(k)$, le sous-espace de E formé des vecteurs qu'il fixe est de dimension finie.

4.2. Soit $\mathfrak{D}(G(k))$ l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes sur $G(k)$ qui sont localement constantes à support compact. Si γ est une représentation admissible de $G(k)$ dans un espace E , les opérateurs sur E donnés par

(1) $\qquad \gamma(f) = \int_{G(k)} f(x)\,\gamma(x)\,dx\ , \qquad f \in \mathfrak{D}(G(k))$ (somme finie en fait) ,

sont de rang fini. La trace $\Theta_\gamma(f) = \operatorname{Tr}\gamma(f)$ s'appelle le caractère de γ .

4.3. Soit γ une représentation admissible de $G(k)$ dans un espace E . On dit que γ est pré-unitaire si E possède une forme hermitienne définie positive telle que

(2) $$\langle \gamma(x)\,v\ ,\ \gamma(x)\,v'\rangle = \langle v\ ,\ v'\rangle\ , \qquad v\ ,\ v' \in E\ ,\ \ x \in G(k)\ .$$

On peut alors parler des coefficients de la représentation : ce sont les fonctions complexes sur $G(k)$ données par les applications $x \longmapsto \langle\gamma(x)\,v\ ,\ v'\rangle$. On dit qu'une représentation admissible pré-unitaire est de carré intégrable si ses coefficients sont de carré intégrable sur $G(k)/C(k)$, où C est le centre de G . Il suffit pour cela qu'il existe un coefficient $f \neq 0$ tel que

(3) $$\int_{G(k)/C(k)} |f(x)|^2\,d\dot{x} < \infty \quad \text{(cf. (1.8.) pour } d\dot{x}\text{)}$$

4.4. Une représentation admissible γ de $G(k)$ dans un espace E est dite irréductible si E n'a pas de sous-espace propre invariant par l'action de $G(k)$. Soit γ une représentation admissible irréductible pré-unitaire de $G(k)$ dans un espace E ; si γ est de carré intégrable, il existe un nombre $d(\gamma) > 0$, tel que

(4) $$\int_{G(k)/C(k)} |\operatorname{Tr} T\gamma(x)|^2\,dx = d(\gamma)^{-1}\operatorname{Tr} T^* T$$

pour tout opérateur T sur E tel que les applications

$$x \longmapsto \gamma(x)\,T \quad \text{et} \quad x \longmapsto T\gamma(x)$$

soient localement constantes. On appelle $d(\gamma)$ le degré formel de γ .

4.5. Une représentation admissible γ de $G(k)$ admet une représentation contragrédiente admissible [5]. On dit qu'une représentation admissible de $G(k)$ est supercuspidale, si les conditions suivantes équivalentes sont vérifiées [5] :

(i) les coefficients de γ sont à support compact modulo le centre ;

(ii) les "termes constants" de γ le long des sous-groupes paraboliques propres de $G(k)$ sont tous nuls ;

(iii) pour tout sous-groupe horicyclique propre U de $G(k)$, pour tout vecteur $v \in E$, il y a un sous-groupe ouvert compact U_v de U tel que

(5) $\int_{U_v} \gamma(u)\, v\, du = 0$, où du est une mesure de Haar sur U (somme finie ici).

5. Construction de la représentation du sous-groupe élémentaire.

5.1. On reprend les notations du n° 3. Soit α un caractère très régulier du sous-groupe $A(s, k)$ de $G(s, k)$. Soit $n \geq 2$ son conducteur ; on définit deux entiers par

(1) $\quad n = m + m'$, $m' = m$ ou $m + 1$, suivant que n est pair ou impair.

LEMME 1. - Avec ces notations, le sous-groupe $G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ de $G(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ est commutatif invariant ; on définit un caractère $\tilde{\alpha}$ du $G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ en posant:

(2) $\quad \tilde{\alpha}(t\ x_1 \cdots x_{h-1}) = \alpha(t)$ si $(t\ x_1 \cdots x_{h-1}) \in G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$.

On a noté $(t\ x_1 \cdots x_{h-1})$ l'élément générique de $G(s, .)$: c'est sa première ligne, les autres s'en déduisant par (3) du n° 2, i. e. une ligne se déduit de la précédente en la décalant d'un cran vers la droite (action de s) en même temps qu'agit la substitution de Frobenius F.

Preuve. - La première partie résulte du lemme 1 du n° 1, et la seconde est évidente.

5.2. LEMME 2. - Gardons les notations précédentes. Le centralisateur dans $G(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ du caractère $\tilde{\alpha}$ de $G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ est le sous-groupe

(3) $\quad Z(s, n) = A(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)\, G(s, \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$, où $n = 2m$ ou $2m + 1$ (1).

On appelle $Z(s, n)$ le sous-groupe élémentaire de niveau n.

Preuve. - Le lemme 1 du n° 2 montre que le lemme 4 du n° 1 s'écrit aussi avec $G(s, .)$. Autrement dit, le groupe des caractères de $G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ s'identifie au groupe $\mathfrak{G}(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$ par

(4) $\quad x \in G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$, $y \in \mathfrak{G}(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m) \longmapsto \tau(\pi^{-n}\, \mathrm{Tr}(x - 1)\, y)$

Soit donc $\alpha^{(m)} \in \mathfrak{G}(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$ l'élément correspondant au caractère $\tilde{\alpha}$ de $G(s, \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$. Sa projection dans $\mathfrak{G}(s, \mathcal{O}/\mathfrak{p}) = \mathfrak{G}(s, \bar{k})$ n'est autre que α^0

l'élément associé au caractère très régulier α ; il en résulte que la matrice diagonale $\alpha^{(m)} = \mathrm{diag}(a^{F^i})$, où $a \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m)^*$ vérifie la propriété de "très régularité" suivante :

$$(5) \qquad 0 \leqslant i \neq j < h \Rightarrow a^{F^i} - a^{F^j} \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m)^*$$

et donc que son centralisateur dans $G(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m)$ est formé de matrices diagonales ; donc son centralisateur dans $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$ est $A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$, d'où son centralisateur dans $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ est le sous-groupe (3), image réciproque dans $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ de $A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$ par la réduction modulo $\mathfrak{p}^m$.

5.3. Lorsque le conducteur n de α est pair, $n = 2m$, le sous-groupe élémentaire $Z(s , n)$ est produit semi-direct de $A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ par le sous-groupe commutatif invariant $M(s , \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$ formé des $(1\, x_1 \ldots x_{h-1}) \in G(s , \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$:

$$(6) \qquad 1 \to M(s , \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n) \to Z(s , n) \to A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) \to 1 \quad \text{si} \quad n = 2m .$$

On peut donc prolonger le caractère α de $A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ en une représentation ζ_α du sous-groupe élémentaire $Z(s , n)$ de degré 1 ; elle coïncide avec $\widetilde{\alpha}$ sur le sous-groupe $G(s , \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^n)$.

5.4. On suppose désormais le conducteur n de α impair : $n = 2m + 1$, $m' = m + 1$.

Le sous-groupe $M(s , \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ de $Z(s , n)$ formé des éléments $(1\, x_1 \ldots x_{h-1})$ où les $x_1 \in \mathfrak{p}_K^{m'}/\mathfrak{p}_K^n$ est invariant ; on forme le groupe quotient $D(s , n)$

$$(7) \qquad 1 \to M(s , \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n) \to Z(s , n) \to D(s , n) \to 1$$

qui est ainsi formé des matrices :

$$(8) \qquad (t x_1 \ldots x_{h-1}) , \quad t \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^n)^* , \quad x_i \in \mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'} , \text{ pour tout } i .$$

5.5. Pour chaque indice $i \geqslant 1$, tel que $2i < h$, on pose

$$(9) \quad s_i(w) = \begin{pmatrix} 1 + (uv)^{F^{-i}} & \ldots & u & \ldots \\ \vdots & & & \\ v & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \in D(s , n) , \quad w = (u , v) \in (\mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'}) \times (\mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'}) ,$$

où les seules diagonales non nulles sont celles de $(1 , i + 1)$, de $(i + 1 , 1)$ et la diagonale principale. On a alors

$$(10) \qquad s_i(w + w') = c_i(\langle w , w' \rangle)^{-1} s_i(w) s_i(w') ,$$

où $\langle w , w' \rangle = uv'$ si $w = (u , v)$, $w' = (u' , v')$, et où c_i est l'homomorphisme de $\mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n$ dans $A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ défini par

$$(11) \qquad c_i(z) = \mathrm{diag}(1 - z + z^{F^{-i}} , \ldots , 1 - z^{F^{-1}} + z^{F^{-i-1}})$$

Enfin, l'action de $A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ est donnée par

$$(12)\qquad t s_i(w)\ t^{-1} = s_i(tt^{-F^i}\ u\ ,\ t^{F^i}\ t^{-1}\ v)\quad \text{si}\quad w = (u\ ,\ v)\ .$$

Si $2i = h$, ce qui ne se produit que lorsque h est pair, soient L l'extension non ramifiée de degré $h/2$ de k , et les objets associés $\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{p}_L$, $\overline{L}$. On désigne par une barre la conjugaison de K sur L dont c'est l'extension quadratique non ramifiée. On définit une base $(a\ ,\ b)$ de $\overline{K}$ sur $\overline{L}$ en prenant

$$(13)\qquad \begin{array}{l} a + \overline{a} = 1\ ,\quad a = 2^{-1}\quad \text{si la caractéristique est impaire ;} \\ b + \overline{b} = 0\ ,\quad b \neq 0\quad \text{et}\quad b = 1\quad \text{en caractéristique } 2\ . \end{array}$$

On pose alors :

$$(14)\qquad s_{h/2}(w) = \begin{pmatrix} 1 + aw\overline{w} & \dots & w & \dots \\ \vdots & & & \\ \overline{w} & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \in D(s\ ,\ n)\ ,\quad w \in \mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'}\ ,$$

avec la diagonale de $(1\ ,\ (h/2) + 1)$

$$(15)\qquad c_{h/2}(z) = \operatorname{diag}(1 - z\ ,\ \dots\ ,\ 1 - z^{F^{-1}})\ ,\quad z \in \mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n\ .$$

Avec ces notations on a

$$(16)\quad s_{h/2}(w+w') = c_{h/2}(b\langle w,w'\rangle)^{-1}\ s_{h/2}(w)\ s_{h/2}(w')\ ,\ \text{où}\ \ \langle w,w'\rangle = (a\overline{w}w'-\overline{a}w\overline{w}')b^{-1}\ .$$

Enfin, l'action de $A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ est donnée par

$$(17)\quad t s_{h/2}(w)\ t^{-1} = s_{h/2}(t\overline{t}^{-1}\ w)\quad \text{si}\quad t = \operatorname{diag}(t\ ,\ t^F\ ,\dots,\ t^{F^{h-1}}) \in A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)\ .$$

Si i et j sont deux indices distincts $\leqslant h/2$, alors les images de s_i et s_j commutent, élément par élément : c'est immédiat sur (8).

5.6. Les formules (10) et (16) sont celles du groupe d'Heisenberg ([2], (23) et (30)), et les formules (12) et (17) celles de son extension déployée pour la première ([2], (25)), de son extension "diamant" pour la seconde ([2], (36)). Pour pouvoir utiliser les résultats de [2], mettons en évidence les caractères non triviaux des centres des groupes d'Heisenberg que définissent les matrices (9) et (14). Pour chaque indice i , tel que $2i < h$, le caractère de $\mathfrak{p}_K^{n-1}/\mathfrak{p}_K^n$, défini par $\alpha \circ c_i$, vérifie

$$(18)\qquad \alpha(c_i(z)) = \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}_{K/k}(z - z^{F^i})\ \alpha^0) = \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}_{K/k}\ z(\alpha^0 - (\alpha^0)^{F^i}))$$

et n'est pas trivial : en effet, l'élément $\alpha^0 - (\alpha^0)^{F^i} \in \overline{K}$ n'est pas nul, par l'hypothèse de très régularité sur α . Si maintenant $2i = h$, le caractère de $\mathfrak{p}_L^{n-1}/\mathfrak{p}_L^n$ que définit $\alpha \circ c_{h/2}$ vérifie

$$\begin{aligned}(18')\qquad \alpha(c_{h/2}(-zb)) &= \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}_{K/k}\ zb\alpha^0) \\ &= \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}_{L/k}\ \mathrm{Tr}_{K/L}\ zb\alpha^0) = \tau(\pi^{-n}\ \mathrm{Tr}_{L/k}\ z(\alpha^0 - \overline{\alpha}^0)\ b)\end{aligned}$$

et n'est pas trivial, pour la même raison.

5.7. Rappelons que $\mathfrak{G}(s\ ,\ \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^{m'})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}(\mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'})$ formé des éléments qui vérifient (3) du n° 2. On adopte la même convention d'écriture qu'en 5.1. pour noter les éléments de $\mathfrak{G}(s\ ,\ \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^{m'})$. Soit $\mathfrak{p}(n)$ le sous-espace vectoriel (sur $\overline{k}$) de $\mathfrak{G}(s\ ,\ \mathfrak{p}^m/\mathfrak{p}^{m'})$ formé des éléments suivants

(19) $\quad (^{0\ u_1\ \cdots\ au_{h/2}\ 0\ \cdots\ 0})\ ,\quad u_i \in \mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'}$ si $2i < h$, $u_{h/2} \in \mathfrak{p}_L^m/\mathfrak{p}_L^{m'}$

on n'écrit $au_{h/2}$ que si h est pair.

Si h est impair, c'est un espace vectoriel sur $\overline{K}$ de dimension $(h-1)/2$, et si h est pair, c'est un espace vectoriel sur $\overline{L}$ de dimension

$$2((h/2)-1)+1 = h-1\ ;$$

dans les deux cas, la dimension sur $\overline{k}$ est $N = h(h-1)/2$.

Appelons $p(u_1\ ,\ u_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_{h/2}) = \sum_{2i\leq h} p_i(u_i)$ l'élément générique (19) de $\mathfrak{p}(n)$, et $E(n) = \otimes_{2i\leq h} E_i(n)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions sur $\mathfrak{p}(n) = \oplus_{2i\leq h}\ \mathfrak{p}_i(n)$, avec les conventions évidentes. Il est clair que la dimension de $E(n)$ est égale à q^N , q étant le nombre d'éléments de $\overline{k}$.

A l'aide de l'homothétie π^m , on transporte les énoncés du n° 3 de [2] en énoncés relatifs à l'espace vectoriel $\mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'}$, avec le caractère central α_i (5.6.), l' "hyperbole" est maintenant $A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ et $A(s\ ,\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$ opère trivialement ; si $f_i \in E_i(n)$, espace des fonctions complexes sur l'image de $\mathfrak{p}_K^m/\mathfrak{p}_K^{m'}$ par le monomorphisme p_i ci-dessus, on pose

(20) $\quad R_{\alpha_i}(t)\ f_i(u) = f_i(t^{F^i}\ t^{-1}\ u)\ ,\quad t \in A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)\ ,\quad t = \mathrm{diag}(t\ ,\ t^F\ ,\ \ldots)$

De même, l'homothétie π^m transporte les énoncés du n° 4 de [2] en énoncés relatifs à $\mathfrak{p}_L^m/\mathfrak{p}_L^{m'}$, avec le caractère central non trivial $\alpha_{h/2}$, le "cercle" est $A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ et $A(s\ ,\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$ opère trivialement ; si $f_{h/2} \in E_{h/2}(n)$, espace des fonctions complexes sur l'image de $\mathfrak{p}_L^m/\mathfrak{p}_L^{m'}$ par le monomorphisme $p_{h/2}$ ci-dessus, on définit

(21) $\qquad R_{\alpha_{h/2}}(t)\ f_{h/2}$ par (39) et (40) de [2],

où n désigne l'image de $t/\overline{t}$ dans le corps résiduel $\overline{K}$, lorsque la caractéristique résiduelle est $\neq 2$;

(21') $\qquad$ sinon , $R_{\alpha_{h/2}}(t)\ f_{h/2}$ est défini par (56) de [2],

avec la même convention pour chaque élément $t \in A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$.

5.8. PROPOSITION 2. - <u>La représentation du sous-groupe élémentaire</u> : <u>Les notations sont celles des paragraphes précédents</u>. <u>Soit</u> α <u>un caractère très régulier du sous-groupe</u> $A(s\ ,\ k)$ <u>de</u> $G(s\ ,\ k)$. <u>Soit</u> $n \geqslant 2$ <u>son conducteur</u>. <u>Alors la représentation</u> ζ_α <u>de</u> $Z(s\ ,\ n)$ <u>ci-dessous est irréductible</u> :

(i) <u>si</u> n <u>est pair</u> , ζ_α <u>est la représentation de degré</u> 1 <u>définie par</u> 5.3. ;

(ii) <u>si</u> $n = 2m+1$ <u>est impair</u>, ζ_α <u>est donnée sur</u> $D(s\ ,\ n)$, <u>donc sur</u> $Z(s,n)$

via (7), par

$$\zeta_\alpha(\prod_{2i\leq h} s_i(w_i)) = \otimes_{2i\leq h} \eta_{\alpha_i}(w_i) \quad \text{sur les éléments (9) et (14)} ,$$

où η_{α_i} est donné par la proposition 2 de [2] si $2i < h$; par les propositions 4 ou 5 de [2] si $2i = h$, selon que la caractéristique résiduelle est $\neq 2$ ou $= 2$;

$$\xi_\alpha(t) = \varepsilon_{h/2}(t)\, \alpha(t) \otimes_{2i\leq h} R_{\alpha_i}(t) \quad \text{pour} \quad t \in A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) ,$$

où $R_{\alpha_i}(t)$ est donné par (21) et (21') , $\varepsilon_{h/2}(t) = 1$ si h est impair, et sinon, $\varepsilon_{h/2}(t)$ est donné par (46) de [2] pris en $n = (t/\bar{t} \bmod \mathfrak{p}_K)$ si la caractéristique résiduelle est $\neq 2$, et sinon par (vi) de 4.10. de [2] avec la même convention.

Preuve. - Les résultats de [2] montrent que ζ_α est une représentation de $D(s\ ,\ n)$ de dimension q^N , donc de $Z(s\ ,\ n)$. Elle est irréductible par le même raisonnement qu'en [2] : un opérateur qui commute à la représentation commute à tous les caractères de $\mathfrak{p}(n)$, c'est donc la multiplication par une fonction de $E(n)$, et la commutation aux translations montre qu'elle est constante.

5.9. On peut préciser la correspondance $\alpha \longmapsto \zeta_\alpha$ entre un caractère très régulier de $A(s\ ,\ k)$ de conducteur n et la représentation ζ_α de $Z(s\ ,\ n)$:

LEMME 3. - Soient α et α' deux caractères très réguliers de $A(s\ ,\ k)$ de même conducteur n ; les représentations ζ_α et $\zeta_{\alpha'}$ de $Z(s\ ,\ n)$ sont équivalentes si, et seulement si, $\alpha = \alpha'$.

Preuve. - C'est un corollaire immédiat du lemme suivant.

LEMME 4. - Caractère des représentations ζ_α sur les éléments de $A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$: Soit α un caractère très régulier de $A(s\ ,\ k)$ de conducteur n . La trace des opérateurs $\zeta_\alpha(t)$ pour $t \in A(s\ ,\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ est

(i) si n est pair, $\operatorname{Tr} \zeta_\alpha(t) = \alpha(t)$;

(ii) si n est impair, soit $N(t)$ le nombre d'indices i , $2i < h$, tels que $t/t^{F^i} \in 1 + \mathfrak{p}_K$, alors :

(22)
$$\operatorname{Tr} \zeta_\alpha(t) = (-1)^{n(h-1)}\, q^{hN(t)}\, \alpha(t) \ , \ \text{si} \quad t/\bar{t} \notin 1 + \mathfrak{p}_K \ ;$$
$$\operatorname{Tr} \zeta_\alpha(t) = q^{hN(t)+h/2}\, \alpha(t) \quad \text{si} \quad t/\bar{t} \in 1 + \mathfrak{p}_K \ .$$

Preuve. - 5.3. implique (i). Pour (ii), il suffit d'appliquer les propositions 3, 6 et 7 de [2].

5.10. Remarque. - Si $t \bmod \mathfrak{p}_K$ est régulier, on dit que t est très régulier, alors :

(23)
$$\operatorname{Tr} \zeta_\alpha(t) = (-1)^{n(h-1)}\, \alpha(t) \ .$$

6. Passage au sous-groupe des points entiers.

6.1. On définit un espace vectoriel complexe $E(\alpha)$, où α est un caractère très régulier de $A(s , k)$, de conducteur n, en prenant les applications de $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ dans l'espace $E(n)$ de la représentation ζ_α de $Z(s , n)$ (5.7. et 5.8.) qui vérifient

$$(1) \qquad f(xz) = \zeta_\alpha(z)^{-1} f(x) , \qquad z \in Z(s , n) , \quad x \in G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) .$$

LEMME 1. - La représentation du groupe $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ induite par la représentation ζ_α du sous-groupe $Z(s , n)$ est irréductible, et réalisée dans l'espace $E(\alpha)$ par

$$(2) \qquad \varkappa_\alpha(y) f(x) = f(y^{-1} x) , \quad x , y \in G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) , \quad f \in E(\alpha) .$$

Son degré est

$$(3) \qquad \deg(\varkappa_\alpha) = q^{N(n-1)} \prod_{1\leqslant i<h} (q^i - 1) , \text{ où } N = h(h - 1)/2$$

La trace des opérateurs $\varkappa_\alpha(t)$ pour $t \in A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$, t très régulier (remarque 5.9.) est

$$(4) \qquad \operatorname{Tr} \varkappa_\alpha(t) = (-1)^{n(h-1)} \sum_{0\leqslant i<h} \alpha(t^{F^i})$$

Preuve. - La représentation ζ_α de $Z(s , n)$ est triviale sur $M(s , \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^m)$, et égale à l'homothétie α sur $A(s , \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$: c'est clair pour n pair, et si n est impair, on la construit ainsi. Elle coïncide donc avec $\tilde{\alpha}$ sur le sous-groupe $G(s , \mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^m)$. Or, $Z(s , n)$ est le centralisateur de $\tilde{\alpha}$ dans $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ (5.2.). Le théorème du petit sous-groupe de Mackey ([9], II.9., théorème 16) donne l'irréductibilité. Le degré se calcule comme produit du degré de ξ_α par l'indice de $Z(s , n)$ dans $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$; ce dernier est aussi l'indice de $A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'})$ dans $G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^{m'})$, qui, par dévissage, est le produit de l'indice de $A(s , \overline{k})$ dans $G(s , \overline{k})$ par le produit des ordres des $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})(s , \mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1})$, pour $i = 1$ à $m' - 1$ (on a appliqué le lemme 1 du n° 1 pour passer à l'algèbre de Lie). Or ces derniers sont des espaces vectoriels de dimension $2N$ sur $\overline{k}$, donc apportent une contribution égale à $q^{2N(m'-1)}$, et l'indice de $A(s , \overline{k})$ dans $G(s , \overline{k})$ est le quotient des ordres respectifs, $q^N \prod_{1\leqslant i\leqslant h} (q^i - 1)$ par $q^h - 1$, d'où

$$[G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) : Z(s , n)] = q^{N(2m'-1)} \prod_{1\leqslant i<h} (q^i - 1)$$

Il reste à multiplier par le degré de ζ_α pour obtenir le résultat.

Enfin, la trace se calcule par application de la formule du caractère induit ([9] II.7.2.)

$$(5) \qquad \operatorname{Tr} \varkappa_\alpha(t) = \int_{G(s,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)/Z(s,n)} \operatorname{Tr} \zeta_\alpha(x^{-1} tx)\, dx ,$$

où l'on a prolongé ζ_α hors de $Z(s , n)$ par 0, et la moyenne est la somme.

Prenons donc $t \in A(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ un élément très régulier ; les $x \in G(s , \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ tels que $x^{-1} tx \in Z(s , n)$ sont les éléments tels que $(x^{-1} tx \bmod \mathfrak{p}^m) \in A(s,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$,

i. e. $x \bmod \mathfrak{p}^m$ normalise $A(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$: $x \in N(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m)$ (1.4.). Mais

$$N(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m) = \mathfrak{S}_h . A(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m) \;,$$

a donc pour trace sur $G(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$, $\mathfrak{S}_h(s)\, A(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$, où $\mathfrak{S}_h(s)$ désigne les éléments de $\mathfrak{S}_h$ qui vérifient $w = sw^F s^{-1}$, comme $w^F = w$, c'est le centralisateur de s dans le groupe symétrique, i. e. le sous-groupe engendré par s (remarquons que l'action de $\mathfrak{S}_h(s)$ sur $A(s\,,\,k) \simeq K^*$ est celle du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$, ce qui permet d'identifier ces deux groupes). Ainsi, les x qui envoient t dans $Z(s\,,\,n)$ sont les éléments de $\mathfrak{S}_h(s)\, Z(s\,,\,n)$. La formule (5) se réduit donc à

$$\mathrm{Tr}\, \varkappa_\alpha(t) = \sum\nolimits_{\mathfrak{S}_h(s)} \mathrm{Tr}\, \zeta_\alpha({}^w t)$$

et la remarque de 5.9. donne la conclusion (4).

6.2. On désigne encore par $\varkappa_\alpha$ la représentation du sous-groupe $G(s\,,\,\mathcal{O})$ des points entiers de $G(s\,,\,k)$ composée de $\varkappa_\alpha$ avec la projection

$$G(s\,,\,\mathcal{O}) \to G(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n) \;.$$

LEMME 2. - Soient α et β deux caractères très réguliers de $A(s\,,\,k)$. Les représentations associées $\varkappa_\alpha$ et $\varkappa_\beta$ de $G(s\,,\,\mathcal{O})$ sont équivalentes si, et seulement si, α et β sont conjugués par le groupe de Galois de K sur k .

Preuve. - Si les représentations $\varkappa_\alpha$ et $\varkappa_\beta$ sont équivalentes, elles ont mêmes degré (3), d'où les caractères α et β ont même conducteur n . Or, les représentations $\varkappa_\alpha$ et $\varkappa_\beta$ de $G(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ sont équivalentes si, et seulement si, il y a un $k \in G(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ qui envoie le caractère $\tilde{\alpha}$ de $G(s\,,\,\mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^m)$ sur le caractère $\tilde{\beta}$, et pour lequel les représentations $\mathrm{Int}(k).\zeta_\alpha$ et ζ_β de $Z(s\,,\,n)$ sont équivalentes ([9], II.9.). Or, la première condition s'écrit $k\alpha^{(m)} k^{-1} = \beta^{(m)}$ avec les notations de 5.2. ; et ceci implique que $\alpha^{(m)}$, comme élément de $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^m)^*$ est conjugué de $\beta^{(m)}$, d'où, par la "très régularité", $(k \bmod \mathfrak{p}^m)$ normalise $A(s\,,\,\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)$, i. e. $k \in \mathfrak{S}_h(s)\, Z(s\,,\,n)$, comme dans la preuve du lemme 1. Ecrivons $k = wz$, $w \in \mathfrak{S}_h(s)$, $z \in Z(s\,,\,n)$; alors les représentations $\mathrm{Int}(wz)\, \zeta_\alpha$ et ζ_β seront équivalentes, si, et seulement si, $\mathrm{Int}(w)\, \zeta_\alpha$ et ζ_β le sont, i. e. par le lemme 3 du n° 5, si, et seulement si, w envoie β sur α .

Ce même lemme donne immédiatement la réciproque.

6.3. A l'aide d'un élément $g \in G(\mathcal{O}_K)$ qui vérifie $g^{-1} g^F = s$ (lemme 1 du n° 2), on transporte la situation sur $G(\mathcal{O})$, dans $G(k)$. Les résultats précédents s'énoncent dans ces groupes. Disons d'abord qu'un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié de $G(k)$ est adapté à $G(\mathcal{O})$ s'il est contenu dans $C(k)\, G(\mathcal{O})$. Les résultats du n° 2 montrent qu'un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié a toujours un conjugué adapté à $G(\mathcal{O})$. Remarquons encore que le caractère très régulie α de $A(s\,,\,k)$ permet de prolonger la représentation $\varkappa_\alpha$ de $G(s\,,\,\mathcal{O})$ à

$C(k)\ G(s\ ,\ \mathcal{O})$, notée également $\varkappa_\alpha$.

PROPOSITION 3. - La représentation du groupe des points entiers : Soit un caractère très régulier du sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié T adapté à $G(\mathcal{O})$; il existe une représentation irréductible $\varkappa_\theta$ de $C(k)\ G(\mathcal{O})$ dont le degré est donné par (3) , et la trace sur les éléments très réguliers de T est donnée par la formule (6), si n est le conducteur de θ :

(6) $$\mathrm{Tr}\ \varkappa_\theta(t) = (-1)^{n(h-1)} \sum_{W(T)} \theta({}^w t) ,$$

où $W(T)$ est le quotient du normalisateur de T par T . De plus, les représentations $\varkappa_\theta$ et $\varkappa_{\theta'}$ sont équivalentes, si, et seulement si, les caractères θ et θ' sont conjugués par le groupe $W(T)$, qui est cyclique d'ordre h .

Preuve. - Si l'on repasse à $G(s\ ,\ k)$, on a la proposition dès qu'on a vérifié que $\mathfrak{S}_h(s)$ était bien le quotient du normalisateur de $A(s\ ,\ k)$ par $A(s\ ,\ k)$, ce qu'on a vu au cours des démonstrations précédentes.

6.4. Remarque. - La condition de très régularité s'exprime sur les valeurs propres : on écarte le centre en faisant opérer T sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}(k)$, et comme T est minisotrope adapté à $G(\mathcal{O})$, il laisse stable $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$, et les coefficients du polynôme caractéristique de l'opérateur Ad t sur $\mathfrak{G}(k)$ donné par $x \longmapsto txt^{-1}$ sont entiers ; si on définit le polynôme D sur G par

(7) $$\det((T + 1) - \mathrm{Ad} x) = T^{h^2} + \dots + D(x)\ T^{h-1} ,\quad x \in G$$

alors les points très réguliers de T sont caractérisés par

(8) $$D(t) \in \mathcal{O}^* .$$

6.5. LEMME 3. - Soit T un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié de $G(k)$ adapté à $G(\mathcal{O})$. Soit $\varkappa_\theta$ la représentation de $G(\mathcal{O})\ C(k)$ associée à un caractère très régulier de T . Alors, la représentation $\varkappa_\theta$ est cuspidale en ce sens que

(9) $$\int_{xU(\mathcal{O})x^{-1}} \varkappa_\theta(u)\ du = 0 ,$$

où du est une mesure de Haar sur $U(\mathcal{O})$, pour tout sous-groupe horicyclique standard propre U de G et pour tout $x \in G(\mathcal{O})$.

Preuve. - Soit n le conducteur de θ . La représentation $\varkappa_\theta$ de $G(\mathcal{O})$ provient d'une représentation, notée aussi $\varkappa_\theta$, de $G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$. Il suffit donc de montrer que les sommes finies

(10) $$\int_{xU(\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n)x^{+1}} \varkappa_\theta(u)\ du ,$$

où U et x sont comme dans l'énoncé, sont toutes nulles. Reprenons les notations m et m' de 5.1. Comme la représentation $\varkappa_\theta$ de $G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ est irréductible, sa restriction au sous-groupe commutatif invariant $G(\mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^n)$ est donnée par les conjugués par $G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ d'un caractère de $G(\mathfrak{p}^{m'}/\mathfrak{p}^m)$ qui intervient dans $\varkappa_\theta$; or, par construction de $\varkappa_\theta$, le caractère $\widetilde{\theta}$ intervient ; en descendant jusqu'à $G(\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n)$, on voit que la restriction de $\varkappa_\theta$ à ce sous-groupe commutatif invariant est donnée par les conjugués de l'élément $\theta^0 \in \mathfrak{C}(\overline{k})$ associé à θ. On en déduit par le lemme 2 du n° 3 que les sommes (10) sont toutes nulles. On achève en remarquant que ces sommes sont des facteurs pour les intégrales (9).

7. Passage au groupe $G(k)$.

7.1. Soient θ un caractère très régulier de T, sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié adapté à $G(\mathcal{O})$, et $\varkappa_\theta$ la représentation irréductible associée du groupe $C(k)\,G(\mathcal{O})$, réalisée dans l'espace $E(\theta)$. Soit alors $V(\theta)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : G(k) \to E(\theta)$ qui sont localement constantes, à support compact modulo le centre, et qui vérifient

(1) $$f(xk) = \varkappa_\theta(k)^{-1}\, f(x) \quad \text{pour} \quad x \in G(k)\ ,\quad k \in C(k)\,G(\mathcal{O})$$

On définit également un caractère θ^{-1} de T par la formule

(2) $$\theta^{-1}(t) = \theta(t)^{-1}\ .$$

THÉORÈME 1. - <u>Représentations de $G(k)$ associées aux caractères très réguliers</u> : <u>Soit T un sous-groupe de Cartan minisotrope non ramifié adapté à $G(\mathcal{O})$, du groupe $G(k)$. Soit γ_θ la représentation de $G(k)$ dans l'espace $V(\theta)$ définie par un caractère très régulier θ de T et les opérateurs</u> :

(3) $$\gamma_\theta(y)\, f(x) = f(y^{-1}\, x)\ ,\quad x\ , y \in G(k)\ ,\quad f \in V(\theta)$$

<u>Alors γ_θ est admissible, irréductible, supercuspidale. La représentation $\gamma_{\theta^{-1}}$ est isomorphe à la contragrédiente de γ_θ. La représentation γ_θ est unitaire si, et seulement si, θ l'est, et, dans ce cas, son degré formel est donné par (3) du n° 6. Enfin, deux telles représentations γ_θ et $\gamma_{\theta'}$ construites avec des caractères très réguliers θ et θ' de T sont équivalentes, si, et seulement si, ces caractères sont conjugués par le groupe $W(T)$</u>.

<u>Preuve</u>. - Il est clair que γ_θ est une représentation algébrique de $G(k)$ (4.1.). Montrons que le sous-espace de $V(\theta)$ des points fixés par un sous-groupe ouvert donné de $G(k)$ est de dimension finie ; il suffit de le vérifier pour les $G(\mathfrak{p}^r)$ qui forment un système fondamental de sous-groupes ouverts voisinages de 1. Désignons par $A(c)$, pour tout entier $c \geqslant 1$, le sous-ensemble de $A(+)$ (1.7.) formé des $(m_1, \dots, m_h) \in A(+)$ tels que $\max(m_{i+1} - m_i) < c$. Si $a \notin A(c)$, on montre, comme au lemme 6 du n° 1, qu'il y a un sous-groupe horicyclique standard propre U tel que $aU(\mathfrak{p}^m)\,a^{-1} \subset U(\mathfrak{p}^{m+c})$ si $m \geqslant 0$; si donc $c > r - n$, on a $aU(\mathfrak{p}^{n-1})\,a \subset U(\mathfrak{p}^r)$. Soit alors $f \in V(\theta)$ fixée par $G(\mathfrak{p}^r)$, qui est un sous-groupe invariant de $G(\mathcal{O})$; pour tout $u \in U(\mathfrak{p}^{n-1})$, on a donc, si $x \in G(\mathcal{O})$,

$$f(xau) = \varkappa_\theta(u)^{-1}\, f(xa) = f(xaua^{-1}\, x^{-1}\, xa) = f(xa)$$

puisque $aua^{-1} \in U(\mathfrak{p}^r) \subset G(\mathfrak{p}^r)$ que la conjugaison par x conserve ; or l'égalité $f(xa) = \varkappa_\theta(u)^{-1} f(xa)$ pour tout $u \in U(\mathfrak{p}^{n-1})$ entraîne $f(xa) = 0$: il suffit de faire la somme sur les $u \in U(\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n)$, sachant que ces sommes (10) sont nulles. En conséquence, une fonction de $V(\theta)$ fixée par $G(\mathfrak{p}^r)$ est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur $G(\mathfrak{p}^r)\backslash G(\mathcal{O})\ A(c)$, modulo les éléments centraux, (à cause de (1)), qui est un ensemble fini, et γ_θ est admissible.

Ensuite, montrons que γ_θ est irréductible par le procédé de Godement [4] en prouvant que l'algèbre des fonctions $\varkappa_\theta$-sphériques sur $G(k)$ par rapport au sous-groupe $C(k)\ G(\mathcal{O})$ est réduite aux scalaires. En raison de la décomposition de Cartan (1.6.), une telle fonction est déterminée par ses valeurs sur $A(+)$; sur les points de $A(+)$ qui appartiennent au centre, elle est scalaire puisque $\varkappa_\theta$ est irréductible ; si $a \in A(+)$ n'est pas dans le centre, il y a un horicycle standard propre U tel que $aU(\mathfrak{p}^{n-1})\, a^{-1} \subset U(\mathfrak{p}^n)$, d'où, si Φ est sphérique de type $\varkappa_\theta$, $\Phi(au) = \Phi(a)\ \varkappa_\theta(u)$, si n est le conducteur de θ, et on procède comme ci-dessus pour en déduire que $\Phi(a) = 0$.

Si la représentation γ_θ est unitaire, sa restriction au centre doit être à valeurs dans les nombres complexes de module 1, i. e. θ doit être unitaire sur $C(k)$; comme $T/C(k)$ est compact (minisotropie), θ est alors un caractère unitaire de T ; dans ce cas, si on choisit une structure hilbertienne sur $E(\theta)$ invariante par les opérateurs $\varkappa_\theta(k)$, $k \in C(k)\ G(\mathcal{O})$ (structure unique à un scalaire > 0 près, puisque $\varkappa_\theta$ est irréductible), on définit un produit scalaire sur $V(\theta)$ par la formule

$$(4) \qquad \langle f\ ,\ g\rangle = \int_{G(k)/C(k)} \langle f(x)\ ,\ g(x)\rangle\, d\dot{x}\ , \quad f\ ,\ g \in V(\theta)$$

et les opérateurs $\gamma_\theta(y)$ sont unitaires, la mesure étant invariante par translations.

Pour la contragrédiente, on commence par remarquer que, par construction, la représentation $\varkappa_\theta$ de $G(\mathcal{O})$ a pour conjuguée la représentation $\varkappa_{\theta^{-1}}$, associée au caractère θ^{-1}, qui vaut $\overline{\theta}$ sur les points de T appartenant à $G(\mathcal{O})$: ceci vient du n° 5 et de la propriété correspondante pour la représentation du sous-groupe élémentaire. En conséquence, l'espace $E(\theta^{-1})$ s'identifie au dual de $E(\theta)$ et $\varkappa_{\theta^{-1}}$ à la congrédiente de $\varkappa_\theta$, si l'on pose $(f\ ,\ g) = \langle f\ ,\ \overline{g}\rangle$ pour $f \in E(\theta)$, $g \in E(\theta^{-1})$. On identifie donc $V(\theta^{-1})$ à l'espace dual de $V(\theta)$ en posant $(f\ ,\ g) = \langle f\ ,\ \overline{g}\rangle$, pour $f \in V(\theta)$ et $g \in V(\theta^{-1})$, et on a bien

$$(\gamma_\theta(x)\ f\ ,\ \gamma_{\theta^{-1}}(x)\ g) = (f\ ,\ g) \quad \text{si} \quad f \in V(\theta)\ ,\quad g \in V(\theta^{-1})\ .$$

Montrons que les coefficients de γ_θ sont à support compact modulo le centre, ce qui prouvera que γ_θ est supercuspidale (4.5.). Prenons $f \in V(\theta)$ et $g \in V(\theta^{-1})$, et formons le coefficient

$$(\gamma_\theta(x)\ f\ ,\ g) = \int_{G(k)/C(k)} (f(x^{-1}\ y)\ ,\ g(y))\, d\dot{y}$$

Si le support de f est $S_f\ C(k)$, celui de g, $S_g\ C(k)$, avec S_f et S_g

compacts, pour que cette intégrale ne soit pas nulle, il est nécessaire que $x \in S_g S_f^{-1} C(k)$, ce qui montre que le coefficient est à support compact modulo $C(k)$.

Le degré formel d'une représentation de carré intégrable induite par une représentation irréductible de $C(k)\,G(\mathcal{O})$ est le degré de celle-ci ; en effet, avec les notations précédentes, on envoie l'espace $E(\theta)$ dans l'espace $V(\theta)$ en associant à chaque $v \in E(\theta)$ la fonction $f_v \in V(\theta)$ donnée par 0 hors de $G(\mathcal{O})\,C(k)$ et sur les $k \in C(k)\,G(\mathcal{O})$, on pose $f_v(k) = \kappa_\theta(k)^{-1}.v$; les relations d'orthogonalité de Schur pour la représentation κ_θ impliquent que le degré formel de γ_θ est le degré de κ_θ .

Enfin, si les caractères θ et θ' sont conjugués par $W(T)$, les représentations κ_θ et $\kappa_{\theta'}$ de $C(k)\,G(\mathcal{O})$ sont équivalentes (proposition 3), donc γ_θ et $\gamma_{\theta'}$ aussi. Inversement, supposons que γ_θ et $\gamma_{\theta'}$ soient équivalentes ; la coïncidence sur le centre implique que θ et θ' coïncident sur le centre ; on peut donc supposer les deux représentations unitaires. Elles doivent avoir même degré formel, et par la formule qui le donne, les conducteurs des caractères θ et θ' sont donc égaux. Soit n ce conducteur. Comme κ_θ intervient dans la restriction de γ_θ à $C(k)\,G(\mathcal{O})$ avec la multiplicité 1 (autre forme pour le fait que la représentation induite par κ_θ est irréductible), la représentation $\kappa_{\theta'}$ intervient dans cette restriction. Il y a donc un $a \in A(+)$ et une fonction Φ sur $G(k)$ de type κ_θ à gauche et $\kappa_{\theta'}$ à droite, sous $C(k)\,G(\mathcal{O})$, tels que $\Phi(a) \neq 0$; si a est dans le centre, c'est terminé, l'opérateur $\Phi(a) \neq 0$ entrelaçant κ_θ et $\kappa_{\theta'}$ et la proposition 3 concluant. Si a n'est pas dans le centre, il y a un sous-groupe horicyclique standard U que a décale : $aU(p^{n-1})\,a^{-1} \subset U(p^n)$, d'où

$$\Phi(au) = \Phi(a)\,\kappa_{\theta'}(u) = \kappa_\theta(aua^{-1})\,\Phi(a) = \Phi(a) ,$$

puisque κ_θ est triviale sur $G(p^n)$. En faisant la somme sur ces

$$u \in U(p^{n-1})/U(p^n) ,$$

tenant compte de la nullité de (10) de 6.5., on a donc $\Phi(a) = 0$, contradiction, donc a est dans le centre.

7.2. Au cours de la démonstration ci-dessus, on a prouvé le résultat suivant

LEMME 1. - Soit γ une représentation de $G(k)$ fournie par un caractère très régulier θ comme au théorème 1. Il existe un entier $n \geq 2$, dit conducteur de γ , tel que, pour toute représentation irréductible κ de $C(k)\,G(\mathcal{O})$ qui intervient dans la restriction de γ à $C(k)\,G(\mathcal{O})$, on aie :

(i) κ n'est pas triviale sur $G(p^{n-1})$, i. e. son conducteur est $\geq n$;

(ii) si κ est triviale sur $G(p^n)$, alors κ est équivalente à la représentation κ_θ .

<u>Preuve</u>. - Elle est contenue dans le dernier paragraphe de la démonstration du théorème : on regarde les fonctions sur $G(k)$ de type $\varkappa_\theta$ à gauche et $\varkappa$ à droite, etc.

7.3. PROPOSITION 4. - <u>Caractère des représentations</u> : <u>Soient</u> θ <u>un caractère très régulier de conducteur</u> n <u>de</u> T , <u>et</u> γ_θ <u>la représentation de</u> $G(k)$ <u>associée. Si</u> $t \in T$ <u>est un élément très régulier, la trace de l'opérateur</u> $\gamma_\theta(t)$ <u>est</u>

$$(-1)^{n(h-1)} \sum_{W(T)} \theta({}^w t) .$$

<u>Preuve</u>. - Pour chaque $a \in A(+)$, le sous-espace de $V(\theta)$ formé des fonctions à support dans $K_a = C(k)\ G(\mathcal{O}) \cap a^{-1}\ C(k)\ G(\mathcal{O})\ a$ est invariant par la restriction de γ_θ au sous-groupe $K_1 = C(k)\ G(\mathcal{O})$. La représentation de K_1 ainsi définie est équivalente à la représentation qu'induit la représentation $\varkappa_\theta \circ \mathrm{Int}_a$ de K_a ([9], II.7.4., proposition 15). On a donc, si le second membre converge,

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{Tr}\ \gamma_\theta(t) = \sum_a \sum_{K_1/K_a} \mathrm{Tr}\ \varkappa_\theta \circ \mathrm{Int}_a(x^{-1}\ tx)$$

la somme étant prise sur les $a \in A(+)$ modulo $A(1) = C(k) \cap A(+)$, qui sont les éléments centraux, et la fonction $\mathrm{Tr}\ \varkappa_\theta \circ \mathrm{Int}_a$ étant nulle hors de K_a . Remarquons qu'il suffit de prouver la proposition pour $t \in G(\mathcal{O})$ puisque sur les éléments centraux γ_θ est l'homothétie que définit θ restreint au centre. Supposons que $a \notin A(1)$; le lemme 6 du n° 1 fournit un sous-groupe parabolique standard propre P tel que $P(\bar{k})$ contienne la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de $K_a/C(k)$; l'appartenance de x^{-1} à K_a implique donc que, modulo $\mathfrak{p}$, t appartient au sous-groupe parabolique propre $xP(\bar{k})\ x^{-1}$, ce que l'hypothèse de très régularité exclut. Dans la somme (5), tous les termes correspondants aux $a \notin A(1)$ sont ainsi nuls, il ne reste que celui dû à $a = 1$:

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_\theta(t) = \mathrm{Tr}\ \varkappa_\theta(t) ,$$

et le résultat provient de la proposition 3.

7.4. <u>Remarque</u>. - La formule de la trace obtenue à la proposition 4 peut se préciser ainsi : si $t \in T$ vérifie $D(t) \notin \mathfrak{p}^{2n}$, alors on a

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_\theta(t) = \sum_{W(T)} \theta({}^w t)/|D(t)|^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } h \text{ est pair.}$$

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_\theta(t) = (-1)^n\ (-1)^{\mathrm{val}\ D(t)/2} \sum_{W(T)} \theta({}^w t)/|D(t)|^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } h \text{ est impair .}$$

8. Sur la conjecture de Langlands.

8.1. Soit K l'extension non ramifiée de degré h du corps local $\mathfrak{p}$-adique k . On définit une extension non triviale de K^* par le groupe de Galois de K sur k

$$\text{(1)} \qquad 1 \to K^* \to W(K/k) \to \mathrm{Gal}(K/k) \to 1$$

en faisant opérer naturellement le groupe de Galois, et en imposant comme seule autre relation la suivante, vérifiée par un relèvement φ de la substitution de Frobenius :

(2) $$\varphi^h = \pi \text{ , élément premier de } k \text{ , fixé .}$$

On munit $W(K/k)$ de la topologie que lui fournit K^* , et qui en fait un groupe localement compact totalement discontinu.

8.2. PROPOSITION 5. - Soit α un caractère régulier de K^* , i. e. tel que

$$\gamma \in \mathrm{Gal}(K/k) \text{ , } {}^{\gamma}\alpha = \alpha \Rightarrow \gamma = 1 \text{ .}$$

La représentation w_α de $W(K/k)$, induite par α , est de degré h , irréductible ; on a

(3) $$\mathrm{Tr}\, w_\alpha(t) = \Sigma_{0\leq i<h}\, \alpha(t^{F^i}) = \Sigma_{W(K/k)/K^*}\, {}^{\gamma}\alpha(t) \text{ , } \quad t \in K^*$$

Enfin, deux telles représentations w_α et w_β sont équivalentes si, et seulement si, α et β sont conjugués par $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Preuve. - Le degré est l'indice de K^* dans $W(K/k)$: c'est l'ordre h du groupe de Galois (1) ; l'espace de la représentation induite s'identifie aux fonctions complexes sur $\mathrm{Gal}(K/k)$; un opérateur qui commute à la représentation, commutant aux opérateurs $w_\alpha(t)$ pour $t \in K^*$, est la multiplication par une fonction sur $\mathrm{Gal}(K/k)$ (car α est régulier), et la commutation aux opérateurs $w_\alpha(\varphi^i)$ entraîne que cette fonction est constante : les représentations w_α sont donc irréductibles. La formule (3) est évidente. Si les caractères α et β sont conjugués par le groupe de Galois, il est clair que les représentations w_α et w_β sont équivalentes. Inversement, cette équivalence implique l'égalité des traces, donc, si n est $\geqslant$ au conducteur de α et de β , on a l'identité (3) avec $t \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^n)^*$, d'où, par l'orthogonalité des caractères,

$$\int_{(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K^n)^*} \alpha^{F^i}(t)\, \overline{\beta(t)}\, dt = 1 \quad \text{(masse totale = 1 pour normaliser la moyenne)}$$

qui implique $\beta = \alpha^{F^i}$ pour un i , i. e. les caractères α et β sont conjugués.

8.3. La théorie du corps de classe local fournit, pour chaque extension galoisienne finie L de k , un élément distingué du groupe $H^2(\mathrm{Gal}(L/k) , L^*)$, appelé la classe fondamentale ([8], p. 204) ; lorsque l'extension est non ramifiée, c'est la classe de l'extension construite au n° 8.1. Cette classe fondamentale permet de construire des groupes $W(L/k)$, dépendant fonctoriellement de L et k , et admettant une limite projective $W(k)$, le groupe de Weil-Šafarevič ([1] ch. XV) de k . La proposition 5 donne donc des représentations irréductibles de degré h de $W(k)$. LANGLANDS a conjecturé ([7], question 6) que les classes d'équivalences des représentations semi-simples de degré h de $W(k)$ paramétraient les classes des représentations admissibles irréductibles de $GL_h(k)$. Le théorème 1 et la proposition 5 obéissent à cette conjecture.

THÉORÈME 2. - Soient k un corps local $\mathfrak{p}$-adique, et K son extension non ramifiée de degré h. On définit deux injections des orbites du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/k)$ dans l'ensemble des caractères très réguliers de K^* :

(i) l'une dans l'ensemble des classes de représentations semi-simples de degré h du groupe de Weil-Šafarevič de k (proposition 5) ;

(ii) l'autre, dans l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles du groupe $GL_h(k)$.

Et on dispose donc d'une bijection naturelle entre les images ; plus précisément, dans (i) l'image est formée de représentations irréductibles, dans (ii) de représentations supercuspidales.

8.4. On construit d'autres représentations admissibles irréductibles à l'aide des caractères des sous-groupes de Cartan non ramifiés non minisotropes, une fois que l'on connaît la méthode pour construire des représentations supercuspidales [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (E.) and TATE (J.). - Class field theory. - New York, Amsterdam, W. J., Benjamin, 1968.

[2] GÉRARDIN (P.). - Groupes d'Heisenberg et groupes diamant sur les corps finis. Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU : groupe d'Etude de Théorie des Nombres, 14e année, 1972/73, n° G9.

[3] GÉRARDIN (P.). - Représentations des groupes de Chevalley $\mathfrak{p}$-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972 Série A, p. 1159-1162.

[4] GODEMENT (R.). - A theory of spherical functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 496-556.

[5] HARISH-CHANDRA. - Harmonic analysis on reductive $\mathfrak{p}$-adic groups, Summer Institute of the Amer. math. Soc. [1972. Williams College] (à paraître).

[6] JACQUET (H.). - Représentations des groupes linéaires $\mathfrak{p}$-adiques, Centro Internazionale Matematico Estivo : Theory of group representations and harmonic analysis [Montecatini. 1970], p. 119-220. - Roma, Cremonex, 1971.

[7] LANGLANDS (R.). - Problems in the theory of automorphic forms, Lectures in modern analysis and applications, III, p. 18-61. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in mathematics, 170).

[8] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 8).

[9] SERRE (J.-P.). - Représentations linéaires des groupes finis. - Paris, Hermann, 1967 (Collection méthodes).

[10] SHINTANI (T.). - On certain square integrable irreducible unitary representations of some $\mathfrak{p}$-adic linear groups, J. Math. Soc. of Jap., t. 20, 1968, p. 522-565.

(Texte reçu le 22 janvier 1973)

Paul GÉRARDIN
7 rue Barrault
75013 PARIS