Daniel Bertrand

Valeurs algébriques de fonctions méromorphes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 21, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A17_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 21, 6 p.

6 mai 1974

VALEURS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

par Daniel BERTRAND

1. Introduction.

SCHNEIDER et LANG ont montré que si deux fonctions méromorphes d'ordre fini, vérifiant certaines équations différentielles, sont algébriquement indépendantes, l'ensemble $\mathcal{S}_K$ des nombres complexes, où elles prennent simultanément des valeurs dans un corps de nombres K de degré δ sur $\underset{\sim}{Q}$, est fini. Mais ils donnent une majoration du cardinal de $\mathcal{S}_K$ dépendant de δ (cf. [2], chap. II, théorème 13, et [1], chap. III, théorème 1), et la détermination de l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres complexes, où ces fonctions prennent simultanément des valeurs algébriques, reste un problème ouvert.

Nous nous proposons ici de caractériser $\mathcal{S}$ par une propriété de sommabilité.

THÉORÈME. - *Soient* K_0 *un corps de nombres,* $\underset{\sim}{f} = (f_1, \ldots, f_\ell)$ *des fonctions méromorphes sur* $\underset{\sim}{C}$. *On suppose que :*

(i) *la dérivation* d/dz *opère sur l'anneau* $K_0[\underset{\sim}{f}]$,

(ii) f_1 *et* f_2 *sont algébriquement indépendantes, et d'ordre fini inférieur ou égal à* ρ_1 *et* ρ_2 *respectivement.*

Soit $\mathcal{S}_d$ *l'ensemble des nombres complexes* ζ *non pôles de* $\underset{\sim}{f}$ *tels que* $K_0(\underset{\sim}{f}(\zeta))$ *soit un corps de nombres de degré* d *sur* $\underset{\sim}{Q}$. *Posons* $\nu_d = \operatorname{card} \mathcal{S}_d$. *Alors :*

$$\sum_{d\in\underset{\sim}{N}} \frac{\nu_d}{(\rho_1 + \rho_2)d} \leq 1 .$$

On déduit aisément de ce théorème les résultats de SCHNEIDER et LANG, sous la forme :

$$\operatorname{card} \mathcal{S}_{K_0} \leq (\rho_1 + \rho_2)[K_0 : \underset{\sim}{Q}] .$$

De façon plus précise, on peut énoncer le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - *Soient* $\underset{\sim}{f}$ *des fonctions méromorphes vérifiant les hypothèses* (i) *et* (ii) *du théorème. Si elles prennent leurs valeurs dans* K_0 *en* $m \geq (\rho_1+\rho_2)[K_0 : \underset{\sim}{Q}]$ *points, alors :*

- *il n'existe pas d'autre point où elles prennent simultanément des valeurs algébriques.*

- $(\rho_1 + \rho_2)[K_0 : \underset{\sim}{Q}]$ *est un entier, et* $m = (\rho_1 + \rho_2)[K_0 : \underset{\sim}{Q}]$.

Il ne sera donc plus toujours nécessaire de faire appel à des "théorèmes d'addition algébriques" sur les fonctions $f_1, \ldots, f_\ell$ pour démontrer des résultats de transcendance. Indiquons en deux exemples.

1° Théorème de Hermite-Lindemann : les fonctions $f_1(z) = z$, $f_2(z) = e^z$ vérifient les hypothèses du théorème avec $K_0 = \mathbb{Q}$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$. On a : $0 \in \mathbb{S}$, soit $\nu_1 \geq 1 = (\rho_1 + \rho_2)[K_0 : \mathbb{Q}]$.

Donc si α est un nombre algébrique non nul, e^α est transcendant.

2° Fonctions de Bessel : soient $f_1(z) = J_0(z)$, $f_2(z) = J_0'(z)$, et $f_3(z) = z$, où J_0 désigne la fonction de Bessel d'ordre 0 . On a : $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$, et f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes (voir par exemple SIEGEL [3], chap. II, §10). La dérivation d/dz opère sur l'espace $\mathbb{Q}[f_1 , f_2](f_3)$, mais 0 est un point régulier de l'équation différentielle vérifiée par J_0 , et la connaissance de $J_0^{(k)}(0)$ permet de suivre la démonstration générale du théorème sans exclure 0 de l'ensemble $\mathbb{S}$. On a $0 \in \mathbb{S}_1$, d'où :

$$\nu_1 \geq 1 = (\rho_1 + \rho_2)[K_0 : \mathbb{Q}] .$$

Donc si α est un nombre algébrique non nul, l'un au moins des deux nombres $J_0(\alpha)$, $J_0'(\alpha)$ est transcendant (Par la méthode des fonctions E , SIEGEL a montré qu'ils sont en fait algébriquement indépendants).

2. Esquisse de la démonstration.

Posons $\mathbb{S} = \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_d$, et soient $\zeta_1 , \dots , \zeta_m$ m éléments de $\mathbb{S}$. Nous notons d_i le degré du corps $K_0(\underset{\sim}{f}(\zeta_i))$ sur $\mathbb{Q}$. Nous allons montrer l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{(\rho_1 + \rho_2)d_i} \leq 1 ,$$

ce qui entraînera que la famille $\{1/((\rho_1 + \rho_2)[K_0(\underset{\sim}{f}(\zeta)) : \mathbb{Q}])\}_{\zeta\in\mathbb{S}}$ est sommable, de somme inférieure ou égale à 1 . C'est l'inégalité du théorème.

Soit S un entier arbitrairement grand. Les notations o et O se rapportent à la variable S tendant vers $+\infty$.

1° On peut construire une fonction méromorphe F s'exprimant comme un polynôme en f_1 et f_2 à coefficients entiers sommés à certaines majorations, et qui vérifie :

$$F^{(k)}(\zeta_i) = 0 \qquad \forall\ k = 0 , \dots , S - 1 ; \ i = 1 , \dots , m .$$

2° f_1 et f_2 étant algébriquement indépendants, la fonction F ne peut être identiquement nulle. On peut donc définir, pour tout $i = 1 , \dots , m$, le plus petit ordre de dérivation, soit σ_i , tel que

$$F^{(\sigma_i)}(\zeta_i) \neq 0 .$$

3° En appliquant la formule de Jensen à la fonction F au point ζ_i , on montre les inégalités,

(1) $\quad \sigma_1 + \dots + \sigma_m \leq (\rho_1 + \rho_2)(d_i + o(1)\ \sigma_i \qquad \forall\ i = 1 , \dots , m .$

On en tire

$$(\sigma_1 + \dots + \sigma_m) \sum_{i=1}^m [(\rho_1 + \rho_2)(d_i + o(1))]^{-1} \leq \sigma_1 + \dots + \sigma_m .$$

Soit

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\rho_1 + \rho_2)(d_i + o(1))} \leq 1 \ ,$$

d'où l'inégalité désirée en faisant tendre S vers $+\infty$.

3. Construction de F .

Nous allons suivre la démarche utilisée par LANG ([1], chap. III) et par WALDSCHMIDT ([4], chap. III). Rappelons quelques notations : si γ est un nombre algébrique de degré δ , on appelle dénominateur de γ (noté dén γ) le plus petit entier positif D tel que $D\gamma$ soit un entier algébrique. On pose

$$\|\gamma\| = \max_{\varphi} |\varphi(\gamma)| \ ;$$

où φ décrit l'ensemble des plongements de $\mathbb{Q}(\gamma)$ dans $\mathbb{C}$, et on définit la taille $s(\gamma)$ de γ par

$$s(\gamma) = \max(\log(\text{dén } \gamma) \ , \ \|\gamma\|) \ .$$

La norme de l'entier algébrique $(\text{dén } \gamma).\gamma$ étant supérieure ou égale à 1 , on a

$$- \delta \log(\text{dén } \gamma) - (\delta - 1) \ s(\gamma) \leq \log |\gamma| \ . \tag{2}$$

Nous noterons enfin K le compositum des corps $K_0(\underset{\sim}{f}(\zeta_i))_{i=1,\dots,m}$, Δ son degré, et $T = \max_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,\ell} s(f_j(\zeta_i))$.

Le résultat suivant regroupe toutes les majorations arithmétiques dont nous aurons besoin.

LEMME 1. - <u>Soient</u> τ <u>un réel supérieur à</u> 1 , P <u>un polynôme non nul à deux variables, de degré</u> R_i <u>en</u> X_i , <u>et à coefficients entiers de valeur absolue majorée par</u> τ . <u>Alors la fonction méromorphe</u> F , <u>définie par</u> $F = P(f_1 , f_2)$ <u>vérifie, pour tout entier</u> $k \geq 0$, <u>et tout</u> $i = 1 , \dots , m$,

(i) $F^{(k)}(\zeta_i) \in K_0(\underset{\sim}{f}(\zeta_i))$,

(ii) <u>il existe une constante</u> C <u>dépendant uniquement des équations différentielles vérifiées par</u> $\underset{\sim}{f}$ <u>telle que</u>

$$C^k[\text{dén } f_1(\zeta_i)]^{Ck+R_1} \times [\text{dén } f_2(\zeta_i)]^{Ck+R_2}$$

<u>est un dénominateur de</u> $F^{(k)}(\zeta_i)$, <u>et</u>

$$s(F^{(k)}(\zeta_i)) \leq \log \tau + k \log C(k+R_1+R_2) + T(2Ck+R_1+R_2) + \log(1+R_1)(1+R_2) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Elle se fait par récurrence à partir du cas $k = 0$ (cf. WALDSCHMIDT [4], lemme 3.32).

Le principe des tiroirs de Dirichlet permet alors de construire la fonction F . Plus précisément, on peut énoncer le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>Il existe un polynôme non nul</u>

$$P(X_1 \ , X_2) = \sum_{\lambda_1=0,\dots,R_1-1,\lambda_2=0,\dots,R_2-1} p_{\lambda_1,\lambda_2} X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2}$$

avec $R_j = [S^{1-(\rho_j/(\rho_1+\rho_2))} (\log S)^{\frac{1}{2}}]$ dont les coefficients sont des entiers de valeurs absolues majorées par $\tau_S = \exp(\mathcal{O}(S))$, et tel que la fonction $F = P(f_1, f_2)$ vérifie

$$F^{(k)}(\zeta_i) = 0 \quad \forall\, k = 0, \ldots, S-1 \; ; \quad i = 1, \ldots, m \, .$$

Démonstration. - Il s'agit de résoudre dans $\underset{\sim}{Z}$ un système linéaire de mS équations à $R_1 R_2$ inconnues, dont les coefficients $d^k/dz^k \; f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2}(\zeta_i)$ sont des nombres algébriques dans K , de taille majorée, d'après le lemme 1, par :

$$S \log C(S + R_1 + R_2) + T(2CS + R_1 + R_2) + \log R_1 R_2 \, .$$

Nous avons $R_1 R_2 = S \log S > mS$ pour S suffisament grand. On peut donc appliquer un lemme classique de Siegel (voir par exemple SCHNEIDER [2], appendice, lemme 30), d'où une solution $(P_{\lambda_1,\lambda_2})$ dans $\underset{\sim}{Z}$ vérifiant :

$$\sup_{\lambda_1,\lambda_2} |p_{\lambda_1,\lambda_2}| \leqslant (2S \log S . (CS)^{2S} \exp 4CTS)^{\Delta mS/(S \log S - \Delta mS)}$$

soit : $\sup_{\lambda_1,\lambda_2} |p_{\lambda_1,\lambda_2}| \leqslant \tau_S$, avec

$$\log \tau_S = (3 \log CS + 4CT) S \times \frac{\Delta m}{\log S - \Delta m} = \mathcal{O}(S) \, .$$

4. Démonstration des inégalités (1).

La somme $\sigma_1 + \ldots + \sigma_m$ qui apparaît dans les inégalités (1) peut être majorée grâce au lemme suivant.

LEMME 3. - Soient f une fonction entière, Λ et x deux réels supérieurs à 1 , $n(f , r)$ le nombre de zéros comptés avec leur ordre de multiplicité dans le disque $|z| \leqslant r$. Soit k le premier ordre de dérivation tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Alors :

$$n(f , r) \leqslant \frac{1}{\log \Lambda} \left(\log |f|_{\Lambda r} - \log \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} - k \log r\right) .$$

Démonstration. - Posons $C_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$. Soient $(z_i)_{i=1,\ldots,h}$ les zéros non nuls de f , numérotés en tenant compte de leur multiplicité dans le disque $|z| \leqslant \Lambda r$, et classés de façon que $|z_i| \leqslant |z_{i+1}|$.

D'après la formule de Jensen, on a :

$$\sum_{i=1}^{h} \log \frac{\Lambda r}{|z_i|} \leqslant \log |f|_{\Lambda r} - \log |C_k| - k \log (\Lambda r) \, .$$

La fonction $x \longrightarrow n(f , x)$ étant croissante et supérieure ou égale à k , on a :

$$[n(f , r) - k] \log \Lambda \leqslant \int_r^{\Lambda r} (n(f , x) - k) \frac{dx}{x} \leqslant \int_0^{\Lambda r} (n(f , x) - k) \frac{dx}{x} \, .$$

Or

$$\int_0^{\Lambda r} (n(f , x) - k) \frac{dx}{x} = \sum_{i=0}^{h} \log \frac{\Lambda r}{|z_i|} \, .$$

D'où

$$n(f , r) \log \Lambda \leqslant \log |f|_{\Lambda r} - \log |C_k| - k \log r \, .$$

(Remarquons que, dans cette inégalité, l'expression $n(f\ ,\ r)$ tient compte du zéro à l'origine.)

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration. Soit i un entier, désormais fixé, compris entre 1 et m. Pour $j = 1\ ,\ 2$, il existe, d'après les hypothèses du théorème, une fonction entière θ_j d'ordre inférieur ou égal à ρ_j, non nulle en ζ_i, et telle que $\theta_j f_j$ soit entière. La fonction $G = \theta_1^{R_1}\ \theta_2^{R_2}\ F$ (où F est définie par le lemme 2) est alors entière. Si σ_i désigne le plus petit ordre de dérivation de F en ζ_i, il est clair que c'est aussi celui de G en ζ_i, et

$$G^{(\sigma_i)}(\zeta_i) = \theta_1^{R_1}(\zeta_i)\ \theta_2^{R_2}(\zeta_i)\ F^{(\sigma_i)}(\zeta_i)\ .$$

Soit $r_i = 1 + \max_{k=1,\dots,m} |\zeta_i - \zeta_k|$. On a :

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_m \leqslant n(F(z - \zeta_i)\ ,\ r_i) \leqslant n(G(z - \zeta_i)\ ,\ r_i)\ .$$

Mais d'après le lemme 3 appliqué à la fonction $G(z - \zeta_i)$:

$$n(G(z-\zeta_i), r_i) \leqslant \frac{1}{\log \Lambda}\left(\log|\theta_1^{R_1}\ \theta_2^{R_2}\ F(z-\zeta_i)|_{\Lambda r_i} - \log\frac{|\theta_1^{R_1}\ \theta_2^{R_2}\ F^{(\sigma_i)}(\zeta_i)|}{\sigma_i!} - \sigma_i \log r_i\right)\ .$$

Il reste à majorer le terme de droite de cette inégalité.

1° $(\theta_j f_j)_{j=1,2}$ étant entière d'ordre inférieur ou égal à ρ_j, il existe deux constantes A et Λ_0 telles que, pour tout $\Lambda > \Lambda_0$,

$$\log|\theta_1^{R_1}\ \theta_2^{R_2}\ F(z - \zeta_i)|_{\Lambda r_i} \leqslant \log \tau_S + A(R_1(\Lambda r_i)^{\rho_1} + R_2(\Lambda r_i)^{\rho_2})\ .$$

Choisissons : $\Lambda = \sigma_i^{1/(\rho_1+\rho_2)}$. Λ tend vers $+\infty$ avec S, puisque, par construction, S est inférieur ou égal à σ_i. On peut donc écrire, en reprenant les valeurs de τ_S et des R_j données au lemme 2 :

$$\log|\theta_1^{R_1}\ \theta_2^{R_2}\ F(z - \zeta_i)|_{\Lambda r_i} = \mathcal{O}(S) + \mathcal{O}(\sigma_i(\log \sigma_i)^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(\sigma_i(\log \sigma_i)^{\frac{1}{2}})\ .$$

2° $\log(\sigma_i!) \leqslant \sigma_i \log \sigma_i$; $-\sigma_i \log r_i$ est négatif, et :

$$\log|\theta_1^{R_1}\ \theta_2^{R_2}(\zeta_i)| = \mathcal{O}(S) = \mathcal{O}(\sigma_i)\ .$$

3° $F^{(\sigma_i)}(\zeta_i)$ étant un nombre algébrique de degré d_i, l'inégalité (2) permet d'écrire :

$$-\log|F^{(\sigma_i)}(\zeta_i)| \leqslant (d_i - 1)\ s(F^{(\sigma_i)}(\zeta_i)) + d_i \log(\text{dén } F^{(\sigma_i)}(\zeta_i))$$

soit, d'après le lemme 1 :

$$-\log|F^{(\sigma_i)}(\zeta_i)| = ((d_i - 1) + o(1))\ \sigma_i \log \sigma_i + d_i\ \mathcal{O}(\sigma_i)\ .$$

En regroupant ces différents résultats, on obtient :

$$n(G(z - \zeta_i)\ ,\ r_i) \leqslant \frac{\rho_1 + \rho_2}{\log \sigma_i}\,[(d_i - 1) + 1 + o(1)]\ \sigma_i \log \sigma_i\ .$$

D'où

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_m \leqslant (\rho_1 + \rho_2)(d_i + o(1))\ \sigma_i\ .$$

Le raisonnement s'applique pour tout $i = 1\ ,\ \dots\ ,\ m$, et on obtient les inégalités (1) recherchées, ce qui permet de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[2] SCHNEIDER (Theodor). - Einführung in die transzerdenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

[3] SIEGEL (Carl Ludwig). - Transcendental numbers. - Princeton, Princeton University Press, 1949 (Annals of Mathematics Study, 16).

[4] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants (à paraître).

(Texte reçu le 13 mai 1974)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05