Jacques Vélu

Fonctions L p-adiques associées aux formes modulaires paraboliques de $SL_2(Z)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 11, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 11, 5 p.

21 janvier 1974

FONCTIONS L p-ADIQUES ASSOCIÉES AUX FORMES MODULAIRES PARABOLIQUES DE $SL_2(\mathbb{Z})$

par Jacques VÉLU

Dans cet exposé, je vais résumer la seconde partie de l'article de MANIN [4], auquel a été consacré le séminaire Serre du Collège de France [2].

1. Introduction.

Soit $\varphi(z) = \sum_1^\infty a_n \exp 2\pi i n z$ une forme modulaire parabolique pour $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $w + 2$ (w est pair, ≥ 10). La transformée de Mellin de φ est la fonction entière, définie par

$$\Lambda_\varphi(s) = \int_0^\infty y^s\, \varphi(iy)\, \frac{dy}{y} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\, \Big(\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}\Big) \ .$$

Cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda_\varphi(w + 2 - s) = (-1)^{w/2}\, \Lambda_\varphi(s) \ .$$

Si l'on récrit l'intégrale sous la forme

$$\Lambda_\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}^\times_{\text{pos}}} \chi^{(s)}(y)\, \mu_\varphi(y)$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{R}^\times_{\text{pos}} & \text{est le groupe multiplicatif des réels positifs,} \\ \chi^{(s)} & \text{est le quasi-caractère défini par } \chi^{(s)}(y) = y^s \ , \\ \mu_\varphi(y) & \text{est la mesure } \varphi(iy)\, \dfrac{dy}{y} \ . \end{cases}$$

On peut interpréter $\Lambda_\varphi(s)$ comme une fonction analytique sur l'ensemble des quasi-caractères du groupe $\mathbb{R}^\times_{\text{pos}}$, et ce que l'on va faire c'est construire un analogue p-adique de cette fonction au moyen d'une intégrale p-adique.

2. Analogue de $\mathbb{R}^\times_{\text{pos}}$.

On pourrait prendre $\mathbb{Z}_p^\times$, mais

$$\mathbb{Z}_p^\times \simeq (\mathbb{Z}/q\,\mathbb{Z})^\times \times (1 + q\mathbb{Z}_p)^\times \quad \text{où} \quad q = \begin{cases} p & \text{si } p \neq 2 \\ 4 & \text{si } p = 2 \end{cases} .$$

Pour avoir plus de généralité, on fixe un entier Δ_0 premier à p , on pose $\Delta = \Delta_0\, q$, et on définit

$$\mathbb{Z}_\Delta = \varprojlim(\mathbb{Z}/\Delta p^n\, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\Delta_0\, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \ .$$

L'analogue de $\mathbb{R}^\times_{\text{pos}}$ est le groupe $\mathbb{Z}_\Delta^\times \simeq (\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^\times \times (1 + q\mathbb{Z}_p)^\times$.

Notons $U_p = (1 + q\mathbb{Z}_p)^\times$. Ce groupe est isomorphe, mais non canoniquement, à $\mathbb{Z}_p$. En effet, si $\gamma \in U_p$ est tel que $v(\gamma - 1) = v(q)$, ou encore $\gamma \equiv 1 \ (q)$, tout élément z de U_p s'écrit de façon unique $z = \gamma^a$ avec $a \in \mathbb{Z}_p$ (γ^a signifie $\exp(a \log \gamma)$).

3. Analogue de $\chi^{(s)}$.

Soit $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$; soient $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, et fixons un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$. Posons

$$X(\mathbb{Z}_\Delta^\times) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_\Delta^\times , \mathbb{C}_p^\times) .$$

Alors

$$X(\mathbb{Z}_\Delta^\times) \simeq X((\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^\times) \times X(U_p) ,$$

tout caractère χ s'écrit de façon unique sous la forme $\chi = \chi_0\, \chi_1$, où

$\chi_0 \in X((\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^\times)$ est sa composante modérée,

$\chi_1 \in X(U_p)$ est sa composante sauvage.

Le groupe $X(U_p)$ est isomorphe, mais non canoniquement, au groupe $T = (1 + \mathfrak{m})^\times$. En effet, l'application L_γ : $\chi(U_p) \to T$, définie par $\chi \longmapsto \chi(\gamma)$ (γ étant choisi tel que $v(\gamma - 1) = v(q)$) est un isomorphisme. Si $\chi_u = L_\gamma^{-1}(u)$, on a $\chi_u(\gamma^a) = u^a$ pour $\gamma^a \in U_p$.

Les caractères χ_u , qui sont d'ordre fini, sont ceux pour lesquels a est une racine p^n-ième de 1 . Ce sont les fonctions localement constantes sur U_p .

Tout caractère de Dirichlet, dont le conducteur est une puissance de p , peut s'identifier à un caractère d'ordre fini sur U_p au moyen du plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$.

L'isomorphisme entre $X(U_p)$ et T fournit une structure d'espace analytique sur $X(U_p)$ avec, pour seule carte $X(U_p)$, tout entier. Pourtant, on peut aussi bien donner à $X(U_p)$ cette structure d'espace analytique avec des cartes plus petites en procédant comme dans le cas réel. En effet, si $s \in \mathcal{O}$ (anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$), l'application $\chi^{(s)}$: $U_p \to \mathbb{C}_p^\times$, définie par $\chi^{(s)}(z) = z^s$, est un caractère, et avec nos notations, $\chi^{(s)} = \chi_{\gamma^s}$. Ce paramétrage applique $\mathcal{O}$ sur un voisinage de l'élément neutre de $X(U_p)$ qui ne contient pas de caractère d'ordre fini.

4. Analogue des mesures.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{Z}_\Delta^\times$ localement constantes. Par définition, une distribution est une forme $\mathbb{C}_p$-linéaire sur $\mathcal{S}$. Cet espace vectoriel admet pour base les caractères d'ordre fini, et pour générateurs les fonctions caractéristiques des compacts $K_{a,n}$, où $a \in \mathbb{Z}_\Delta^\times$, $n \geq 0$, et

$$K_{a,n} = \{z \in \mathbb{Z}_\Delta^\times ;\ \ z \equiv a\ (\Delta p^n)\} .$$

Par conséquent, on peut aussi bien considérer une distribution comme une fonction sur les caractères d'ordre fini, sur le sous-groupe de torsion de T , ou comme une fonction additive sur les compacts, i. e. telle que

$$(K_1 \cap K_2 = \emptyset) \Longrightarrow (\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)) .$$

Exemple de distribution : La "distribution de Haar" est définie par $\mu(K_{a,n}) = \frac{1}{p^n}$. On remarque qu'ici $1/p^n \in \underset{\sim}{C}_p$ et non à $\underset{\sim}{C}$ comme dans le cas classique. Par conséquent, si $n \to \infty$, i. e. si le compact $K_{a,n}$ tend vers le point a , on a $\mu(K_{a,n}) \to \infty$ et non vers 0 . Il en résulte que la méthode consistant à étendre μ aux fonctions continues en les approchant par des fonctions localement constantes (fonctions en escalier) va connaître quelques difficultés.

Définition. - La distribution μ est à croissance lente si

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{a\in \underset{\sim}{Z}_\Delta^\times} \frac{|\mu(K_{a,n})|}{p^n}) = 0 .$$

En quelque sorte, une distribution à croissance lente est une distribution qui croît moins vite que la distribution de Haar .

5. Analogue de l'intégrale.

Soit $f : \underset{\sim}{Z}_\Delta^\times \to \underset{\sim}{C}_p$, et soit $\mathcal{R}_n$ un système de représentants dans $\underset{\sim}{Z}_\Delta^\times$ de $(\underset{\sim}{Z}_\Delta/\Delta p^n \underset{\sim}{Z}_\Delta)^\times$; μ étant une distribution, définissons les sommes de Riemann par

$$S(f , \mathcal{R}_n) = \sum_{b\in\mathcal{R}_n} f(b)\, \mu(K_{b,n}) .$$

Nous avons alors le théorème suivant.

THÉORÈME. - Si μ est à croissance lente et si f est une fonction lipschitzienne, i. e. s'il existe $c(f)$ telle que

$$(b \equiv b' \mod \Delta p^n) \Longrightarrow (|f(b) - f(b')| < \frac{c(f)}{p^n}) ,$$

l'ensemble des $S(f , \mathcal{R}_n)$ possède un point d'accumulation unique dans $\underset{\sim}{C}_p$. On le note $\int_{\underset{\sim}{Z}_\Delta^\times} f\mu$.

Remarquons que toute $\chi \in X(\underset{\sim}{Z}_\Delta^\times)$ est lipschitzienne, par conséquent, si nous fixons χ_0 et faisons varier χ_1 , la mesure μ permet de définir une fonction sur T par

$$G^{(\gamma)}_{\mu,\chi_0}(u) = \int_{\underset{\sim}{Z}_\Delta^\times} \chi_0\, \chi_u\, \mu .$$

THÉORÈME. - La fonction ainsi définie est analytique sur T [1].

6. Construction des distributions.

On adopte le point de vue distribution = fonction additive sur les $K_{a,n}$.

Le théorème suivant permet de construire de telles fonctions.

---

[1] On sait depuis que cet exposé a été fait que la fonction analytique appartient à l'ensemble des fonctions $o(\log)$ [1], et que, réciproquement, toute fonction $o(\log)$ est construite ainsi à partir d'une distribution à croissance lente.

THÉORÈME (NASSIBOULIN). - Soit $R : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \dashrightarrow \mathbb{C}_p$ telle que

$$\sum_{i=0}^{p-1} R\left(\frac{x+i}{p}\right) = A_0\, R(x) + A_1\, R(px) + \ldots + A_n\, R(p^n x)\ , \quad \forall\ x\ ,$$

et soit λ une racine de l'équation

$$X^{n+1} = A_0\, X^n + pA_1\, X^{n-1} + \ldots + p^n\, A_n\ .$$

Si l'on pose

$$B_0(m) = \frac{1}{\lambda^m}\ ,$$

$$B_1(m) = \frac{1}{\lambda^{m+1}}\left[A_1 + \frac{p}{\lambda} A_2 + \frac{p^2}{\lambda^2} A_3 + \ldots + \frac{p^{n-1}}{\lambda^{n-1}} A_n\right]\ ,$$

$$B_2(m) = \frac{1}{\lambda^{m+1}}\left[A_2 + \frac{p}{\lambda} A_3 + \ldots + \frac{p^{n-2}}{\lambda^{n-2}} A_n\right]\ ,$$

...

$$B_n(m) = \frac{1}{\lambda^{m+1}} A_n\ ;$$

alors μ définie par

$$\mu(K_{a,n}) = B_0(m)\ R\left(\frac{a}{\Delta p^m}\right) + B_1(m)\ \left(\frac{a}{\Delta p^{m-1}}\right) + \ldots + B_n(m)\ \left(\frac{a}{\Delta p^{m-n}}\right)$$

est une distribution.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier que

$$\mu(K_{a,m}) = \sum_{b \equiv a(\Delta p^m),\, b \bmod \Delta p^{m+1}} \mu(K_{b,m+1})\ .$$

7. Distributions associées aux formes modulaires.

Dans la première partie de son article (2), MANIN étudie les intégrales

$$\int_x^{i\infty} \varphi(z)\, dz\ ,$$

dans le cas où φ est une série de Hecke, i. e. $\varphi|T_n = \lambda_n\, \varphi$ pour tout n, et $\varphi(z) = \sum_1^\infty \lambda_n \exp 2\pi i n z$. Il démontre qu'il existe ω_+ et $\omega_- \in \mathbb{C}$ tels que

$$Q^+(x) = \frac{1}{\omega_+} \operatorname{Im} \int_x^\infty \varphi(z)\, dz\ , \quad Q^-(x) = \frac{1}{\omega_-}\ e \int_x^\infty \varphi(z)\, dz$$

sont des fonctions définies sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ prenant leurs valeurs dans les entiers du corps de nombres réel $\mathbb{Q}(\lambda_1\ , \lambda_2\ , \ldots, \lambda_n\ , \ldots)$. De plus on a

$$\lambda_p\ Q^\pm(x) = p^w\ Q^\pm(px) + \sum_{k=0}^{p-1} Q^\pm\left(\frac{x+i}{p}\right)\ .$$

Grâce au théorème de Nassiboulin, on construit quatre mesures en posant

$$\mu^\pm_{\varphi,\lambda}(K_{a,n}) = \lambda^{-m}\ Q^\pm\left(\frac{a}{\Delta p^m}\right) + p^w\ \lambda^{-(m+1)}\ Q^\pm\left(\frac{a}{\Delta p^{m-1}}\right)$$

avec λ racine de l'équation $X^2 - \lambda_p X + p^{w+1} = 0$.

Si $v(\lambda_p) < 1$, une des racines vérifie $v(\lambda) < 1$, et les deux distributions

(2) Dans son deuxième article [3], MANIN étudie les fonctions $Q_k(x) = \int_x^{i\infty} (z-x)^k\, \varphi(z)\, dz$, où $0 \leq k \leq w$, ce qui permet de démontrer l'équation fonctionnelle de la fonction A p-adique.

correspondantes sont à croissance lente.

Par conséquent, on peut définir $\int_{\underset{\sim}{Z}_\Delta^k} \chi\, \mu_\varphi^\pm$.

Le lien avec les intégrales archimédiennes correspondantes est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit χ un caractère de Dirichlet, de conducteur Δp^n, posons

$$\varphi_\chi(z) = \sum_1^\infty \lambda_n\, \chi(n) \exp 2\pi i n z ,$$

$G(\chi) = \sum_{x \bmod \Delta p^n} \chi(x) \exp(2\pi i x/\Delta p^n)$ la somme de Gauss,

$$\chi^*(x) = \chi^{-1}(-x) ,$$

et identifions χ à un élément de $X(\underset{\sim}{Z}_\Delta^\times)$. Nous avons la relation

$$\frac{\Delta p^n}{\omega_{\chi(-1)}\, G(\chi)} \int_0^\infty \varphi_\chi(z)\, dz = \lambda^{-n} \int_{\underset{\sim}{Z}_\Delta^\times} \chi^*\, \mu_\varphi^{\chi(-1)} = \sum_{a \bmod \Delta p^n} \chi^*(a)\, Q^{\chi(-1)}\Big(\frac{a}{\Delta p^n}\Big)).$$

Remarque. - Cette dernière formule est en réalité le point de départ de la construction de la fonction Λ p-adique. Depuis que cet exposé a été fait, Ju. I. MANIN [3], Y. AMICE et J. VELU [1] ont amélioré ces résultats, et démontré, d'une part que la fonction p-adique construite satisfait une équation fonctionnelle comparable à celle de la fonction Λ archimédienne, d'autre part qu'on peut définir cette fonction en remplaçant la condition $v(\lambda) < 1$ par $v(\lambda) < w + 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.) et VÉLU (J.). - Fonctions L p-adiques associées aux séries de Hecke, Journées arithmétiques [1974. Bordeaux] (à paraître).

[2] LIGOZAT (G.) et VÉLU (J.). - Séminaire Serre : Fonctions modulaires, 1973/74, Collège de France.

[3] MANIN (Ju. I.). - Détermination des valeurs des séries de Hecke p-adiques aux points entiers de la bande critique [en russe], t. 93,(135), 1974, n° 4.

[4] MANIN (Ju. I.). - Périodes des formes paraboliques et séries de Hecke p-adiques [en russe], Mat. Sbornik, t. 92 (134), 1973, p. 378-401.

(Texte reçu le 12 juin 1974)

Jacques VÉLU
3 résidence du Parc
91120 PALAISEAU