Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

FRANCISCO DIAZ Y DIAZ

Sur les corps quadratiques imaginaires dont le 3-rang du groupe des classes est supérieur à 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G15, p. G1-G10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G15, 10 p.

13 mai 1974

SUR LES CORPS QUADRATIQUES IMAGINAIRES DONT LE 3-RANG DU GROUPE DES CLASSES EST SUPÉRIEUR A 1

par Francisco DIAZ Y DIAZ

0. Notations.

Dans toute la suite, $k = Q(\sqrt{-d})$ désignera un corps quadratique imaginaire, où

$$\left.\begin{array}{ll} d = D & \text{si } D \equiv 3 \pmod 4 \\ d = 4D & \text{si } D \equiv 1 , 2 \pmod 4 \end{array}\right\} D \text{ sans facteurs carrés et } D > 0 .$$

$\mathcal{H}_k$ sera le groupe des classes d'idéaux de k. C'est un groupe abélien fini dont l'ordre h_k est le nombre des classes de k.

Le groupe $\mathcal{H}_k$ admet une décomposition comme produit direct de groupes cycliques dont les ordres sont des puissances de nombres premiers.

Si p est un nombre premier, je note $\mathcal{H}_{k,p}$ le p-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{H}_k$. $\mathcal{H}_{k,p}$ admet une décomposition comme produit direct de groupes cycliques de la forme

$$\mathcal{H}_{k,p} = C(p^{a_1}) \times \ldots \times C(p^{a_{r_p}}) \quad \text{avec} \quad r_p \geq 0 ,$$

où $C(n)$ désigne un groupe cyclique d'ordre n.

r_p est appelé le p-rang de k.

Le cas d'un corps quadratique réel ne sera pas étudié, mais chaque fois que je parlerai d'un corps réel il s'agira d'un corps noté k' pour indiquer qu'il est en rapport avec k, car $k' = Q(\sqrt{3d})$.

En suivant la terminologie de SCHOLZ [5], j'écrirai s_3 pour désigner le 3-rang de k'. On aura toujours [5]

$$s_3 \leq r_3 \leq s_3 + 1 .$$

1. Introduction.

(a) Si $p = 2$, on sait calculer r_2 à partir de la décomposition de d en facteurs premiers. Dans la suite, p désignera donc un nombre premier impair.

NAGELL [3] a développé une méthode de calcul qui permet la détermination de corps quadratiques imaginaires avec $r_p \geq 1$. En fait, son théorème est plus général, car il permet la construction de corps k pour lesquels h_k est divisible par un nombre naturel impair n fixé d'avance.

THÉORÈME de Nagell [3]. - <u>Soit</u> n <u>un nombre naturel impair</u>. <u>Si</u> $k = Q(\sqrt{x^2 - z^n})$ <u>est tel que</u>

(i) $x^2 < z^n$,

(ii) $(x, z) = 1$,

(iii) z <u>est impair</u>,

(iv) <u>pour tout nombre premier</u> p <u>qui divise</u> n, $p|x$, <u>mais</u> $p^2 \nmid x$. <u>Alors</u> $n|h_k$.

Il devient donc possible de construire une infinité de corps quadratiques imaginaires pour lesquels le groupe des classes aura un sous-groupe cyclique d'un ordre impair donné.

D'autres méthodes ont été développées pour construire des corps avec $r_3 \geq 1$, notamment par NEUMANN [4] et d'autres (introduction et bibliographie dans [4]).

(b) YAMAMOTO [10] généralise le résultat de Nagell, et prouve le théorème très précis suivant, où n désigne un entier naturel quelconque :

THÉORÈME de Yamamoto [10]. - <u>Etant donnés trois ensembles finis de nombres premiers</u> S_1, S_2, S_3 <u>qui vérifient</u> $S_i \cap S_j = \emptyset$ <u>lorsque</u> $i \neq j$, <u>il existe une infinité de corps quadratiques imaginaires</u> k <u>tels que</u> :

(i) <u>Le groupe</u> $\mathcal{H}_k$ <u>a un sous-groupe isomorphe à</u> $C(n) \times C(n)$,

(ii) <u>Tous les nombres de</u> S_i

$$\begin{cases} \underline{\text{décomposent dans}}\ k\text{, si } i = 1\text{,} \\ \underline{\text{restent inertes dans}}\ k\text{, si } i = 2\text{,} \\ \underline{\text{ramifient dans}}\ k\text{, } \underline{\text{si}}\ i = 3\text{.} \end{cases}$$

Dans le même article, il décrit aussi une méthode qui permet de construire effectivement de tels corps quadratiques.

(c) Il reste donc à trouver des méthodes qui permettent la construction de corps quadratiques imaginaires avec $r_p \geq 3$.

SHANKS [6] s'attaque à ce problème dans le cas $p = 3$. Bien que ce qu'il cherche soit des corps quadratiques réels avec $s_3 = 3$, le théorème de Scholz lui fournit les premiers exemples connus de corps quadratiques imaginaires avec $r_3 = 3$.

Il définit $p(A, B) = A^6 + 4B^6$, et démontre que, sauf pour $p(1, 1) = 5$, dans tous les cas où $p(A, B)$ est un nombre sans facteurs carrés, si $k = Q(\sqrt{-3p(A,B)})$ et $k' = Q(\sqrt{p(A, B)})$, on a respectivement $3|h_k$ et $3|h_{k'}$.

Or on constate qu'il est fréquent de trouver, parmi ces corps $s_3 > 1$, et en conséquence $r_3 \geq 2$ aussi.

Dans [7], SHANKS développe quatre nouvelles séries de discriminants pour lesquels $r_3 \geq 1$, et où les cas avec $r_3 \geq 2$ sont fréquents.

LEMME 1 [7]. - <u>Soit</u> $D_1(w) = (3w^2 - 12w + 18)^2 - 2w^3$. <u>Si</u> $D_1(w)$ <u>est sans facteurs carrés et si</u> $k = Q(\sqrt{-3D_1(w)})$, $k' = Q(\sqrt{D_1(w)})$, <u>alors on a</u> $r_3 = s_3 \geq 1$.

LEMME 2 [7]. - Soit $D_2(x) = \frac{1}{4} D_1(2x) = 6x^2 - 12x + 9)^2 - 4x^3$. Si $D_2(x)$ est sans facteurs carrés et $x \neq 1$, on a $r_3 = s_3 \geq 1$ pour les corps $k = Q(\sqrt{-3D_2(x)})$ et $k' = Q(\sqrt{D_2(x)})$.

LEMME 3 [7]. - Soient $D_3(y) = D_1(3y)/9$ et $D_6(z) = D_2(3z)/9$. Si $D_3(y)$ (resp. $D_6(z)$) est sans facteurs carrés et si $d_3(y) = D_3(y)/3$ (resp. $d_6(z)=D_6(z)/3$), alors $r_3 = s_3 + 1 \geq 2$ pour les corps $k = Q(\sqrt{-d_3(y)})$ et $k' = Q(\sqrt{D_3(y)})$ (resp. $k = Q(\sqrt{-d_6(z)})$ et $k' = Q(\sqrt{D_6(z)})$).

Les valeurs $d_3(y)$ et $d_6(z)$ qui sont sans facteurs carrés forment les séries que SHANKS appelle respectivement séries 3 et séries 6 ; ce sont elles qui lui fournissent la grande majorité des discriminants qu'il a trouvés pour lesquels $r_3 = 3$ ou $r_3 = 4$ ([8], [9]).

(d) Dans [7], SHANKS pose trois questions, qui en tenant compte des résultats qu'il a trouvés lui-même, peuvent être énoncées de la façon suivante :

(q1) : Existe-t-il un corps quadratique réel de discriminant < 86814697, et pour lequel $s_3 = 3$?

(q2) : Existe-t-il un corps quadratique imaginaire de discriminant > -63199139, et pour lequel $r_3 = 3$?

(q3) : Existe-t-il un corps quadratique imaginaire k avec $h_k < 27.68$, et $r_3 = 3$?

Je peux répondre aux deux dernières questions :

En ce qui concerne (q2), la plus petite valeur de d que j'ai pu trouver, pour laquelle $r_3=3$, est $d = 3321607$.

En appendice 1, je donne une table comportant 19 valeurs de d pour lesquelles $k = Q(\sqrt{-d})$ est avec $r_3 = 3$, et qui sont plus petites que 10^7.

En appendice 2, je donne une liste de 79 valeurs de d, toutes plus petites que 63199139, et pour lesquelles le groupe des classes des corps quadratiques imaginaires correspondants admet trois générateurs d'ordre 3.

A l'égard de (q3) je peux donner une réponse partielle :

$$k_1 = Q(\sqrt{-3640387}) \quad \text{pour lequel} \quad \mathcal{H}_{k_1} = C(9) \times C(3) \times C(3) \times C(2)$$
$$k_2 = Q(\sqrt{-4897363}) \quad \text{pour lequel} \quad \mathcal{H}_{k_2} = C(3) \times C(3) \times C(3) \times C(11)$$
$$k_3 = Q(\sqrt{-3321607}) \quad \text{pour lequel} \quad \mathcal{H}_{k_3} = C(9) \times C(3) \times C(3) \times C(7).$$

Néanmoins, aucun des corps quadratiques imaginaires que j'ai trouvé, et pour lesquels $r_3 = 3$, n'a un nombre de classes 27.

2. Autres possibilités.

Il est possible de calculer h_k, et même donner la structure de $\mathcal{H}_k$, en utilisant la méthode développée par CHÂTELET [1] et MITCHELL [2], et qui consiste à déterminer les idéaux réduits du corps, lesquels sont en correspondance bi-univoque avec les classes d'idéaux ; pour le calcul de $\mathcal{H}_k$, on construit sa table de multiplication.

Or, si l'on s'intéresse seulement au 3-sous-groupe de Sylow de $\mathcal{H}_k$, on doit chercher, parmi les idéaux réduits, ceux qui sont d'ordre 3 .

LEMME 4. - Si $\mathfrak{M}$ est un idéal réduit qui représente une classe d'idéaux d'ordre 3 , et si $\mathfrak{M} = (m , (a + b\sqrt{-d})/2)$, alors l'équation

$$4m^3 = x^2 + y^2 d \tag{1}$$

admet une solution en nombres entiers.

Car $\mathfrak{M}^3 = ((x + y\sqrt{-d})/2)$ est un idéal principal.

LEMME 5. - Soit (m , x , y) , $x \neq 0$, $y \neq 0$, un triplet qui vérifie (1), et pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $m < \sqrt{d/4}$,

(ii) si $(m , y) = a$, alors $a|d$ et a est sans facteurs carrés.

Alors l'idéal (m) admet une décomposition dans k de la forme $(m) = \mathfrak{M} \circ \overline{\mathfrak{M}}$, où $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ sont des idéaux réduits qui représentent des classes conjuguées d'ordre 3 .

Remarque. - La condition (i) du lemme est trop forte. En fait, il est possible que la conclusion du lemme soit correcte même si $\sqrt{d/4} \leqslant m \leqslant \sqrt{d/3}$.

Démonstration. - Soit

$$m = \prod_{q|m,q|a} q \times \prod_{p|m,p\nmid a} p^{\alpha_p} = am' \tag{2}$$

la décomposition de m en facteurs premiers. Aucun des nombres premiers qui divisent m ne reste inerte dans l'extension k/Q à cause de (ii). Les nombres premiers q (resp. p) qui figurent dans (2) ramifient (resp. décomposent) dans l'extension k/Q .

Soit $w = (x + y\sqrt{-d})/2$; alors $w = a(x' + y'\sqrt{-d})/2 = a.w'$ et $(m , y') = 1$. On peut donc écrire (1) sous la forme suivante :

$$am'^3 = w'.\overline{w}' .$$

Soit $(w') = \prod_{\mathfrak{q}|(w'),q|a} \mathfrak{q} \prod_{\mathfrak{p}|(w'),p\nmid a} \mathfrak{p}^{\alpha_{\mathfrak{p}}}$ la décomposition de (w') comme produit d'idéaux premiers dans k .

Alors $\alpha_{\mathfrak{p}} = 3\alpha_p$ si $\mathfrak{p}|(p)$ et $(w') = \mathfrak{a}\mathfrak{M}'^3$, où $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{q}|(w'),q|a} \mathfrak{q}$. Puisque $\mathfrak{M}'^3$ est un idéal qui appartient à une classe ambige, il n'est pas principal. $\mathfrak{M}'^2$ n'est pas principal non plus à cause de (i) et du fait que m n'a pas de facteurs premiers qui restent inertes dans l'extension k/Q .

Ainsi $\mathfrak{M}'$ est d'ordre 6 , et $\mathfrak{a}\mathfrak{M}'$ d'ordre 3 . Or $(m) = (\mathfrak{a}\mathfrak{M}').(\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{M}}')$, et le lemme est démontré.

Dans les résultats trouvés par SHANKS ([6], [7], [8], [9]) lorsque $r_3 = 3$ ou 4, on remarque tout de suite que, dans l'ensemble des solutions de l'équation (1) pour un discriminant donné, il y a une valeur de y qui semble être privilégiée, car elle figure dans un grand nombre de solutions.

D'après le lemme 5, il suffit de trouver 5 solutions de (1) vérifiant les conditions du lemme pour pouvoir affirmer que le corps k correspondant a un $r_3 = 3$, et ce sans faire aucun autre calcul. Pour avoir $r_3 = 2$, il suffit d'obtenir deux solutions.

Supposons que (m_1 , x_1 , y_1) et (m_2 , x_2 , y_1) soient deux solutions de (1). Si l'on appelle $m_2 - m_1 = t$ et $x_2 - x_1 = 2v$, on doit avoir aussi

$$t(3m_1^2 + 3m_1 t + t^2) = v(v + x_1) . \tag{4}$$

Le premier membre de (4) est un produit de deux entiers, et je prends toujours $t > 0$ pour le premier ; le second facteur est toujours positif, et il est la norme d'un entier de $Q(\sqrt{-3})$:

$$3m_1^2 + 3m_1 t + t^2 = N_{Q(\sqrt{-3})/Q}\left(\frac{(3m_1 + 2t) + m_1\sqrt{-3}}{2}\right) .$$

3. Le programme.

L'obtention de discriminants pour lesquels $r_3 = 2$ est facile.

Parmi toutes les décompositions possibles du premier membre de (4), comme produit de deux facteurs, sont seulement à retenir celles dont la différence entre les deux facteurs vérifie $x_1 < 2\sqrt{m_1^3 - (m_1 + t)^2}$, pour que la condition (i) du lemme 5 puisse être remplie. Après, la détermination des facteurs carrés de $4m_1^3 - x_1^2$ permet de calculer y_1 et d.

La condition (i) exige que $d > 4(m_1 + t)^2$.

La condition (ii) exige que $(m_1 , y_1) = a_1$ et $(m_1 + t , y_1) = a_2$ soient sans facteurs carrés et que $a_1 | d$, $a_2 | d$.

La décomposition du premier membre de (4) est facilités par le fait que dans le second facteur de l'expression il suffit de considérer :

(a) le nombre premier 3 et les nombres premiers qui sont $\equiv 1 \pmod 6$,

(b) les nombres premiers qui divisent $(m_1 , t) = a$. Si $a \neq 1$, alors a^2 divise ce deuxième facteur.

Finalement, pour une valeur donnée de m_1, t doit vérifier l'inégalité $t < \sqrt{4m_1^3 - 1} - m_1$.

Le programme que j'ai écrit, RANGGC, est prévu pour résoudre (4) pour toute valeur de $m_1 \leq 1000$ et pour tout t compris entre 1 et $\sqrt{4m_1^3 - 1} - m_1$; il est écrit en Fortran, et je l'ai utilisé pour $m_1 \leq 251$, ce qui m'a fourni tous les résultats que je donne en appendice, plus plusieurs milliers de corps quadratiques imaginaires pour lesquels $r_3 = 2$.

Le temps employé pour effectuer ces calculs sur l'Univac 1108 de l'Université de Paris-Sud à Orsay, a été de 20 minutes environ.

4. Quelques commentaires.

(a) Le premier corps quadratique imaginaire avec $r_3 = 2$ est $Q(\sqrt{-3299})$, que l'on trouve pour $m_1 = 11$. Le premier avec $r_3 = 3$ est $Q(\sqrt{-3321607})$ pour $m_1 = 94$.

Le plus petit corps avec $r_3 = 4$ connu [8] est $Q(\sqrt{-87386945207})$, pour $m_1 = 2802$. Il semble donc assez naturel que l'on puisse trouver un corps avec $r_3 = 4$ pour lequel m_1 soit proche de 10^3 et $d < 10^{10}$.

(b) Plus m_1 est grand, plus il est facile de trouver des discriminants avec $r_3 = 3$ pour ce m_1 .

J'ai essayé les valeurs $m_1 = 820$ et $m_1 = 821$. Le temps de calcul a été inférieur à 8 minutes, et j'ai trouvé :

10 discriminants avec $r_3 = 3$ pour $m_1 = 820$,

24 " " " " $m_1 = 821$,

17 " " " " $m_1 < 820$.

(c) Si bien que, dans la plupart des cas où l'on a $r_3 = 3$, on trouve aussi 5 solutions ou plus de (1) avec la même valeur de y , ceci n'est pas général.

Dans ces cas, il faut en avoir au moins trois pour pouvoir décider si les idéaux correspondants, donnés par le lemme 5, appartiennent tous au groupe engendré par deux quelconques d'entre eux.

Appendice 1

Je donne ici les 19 valeurs de d que j'ai trouvées qui sont $< 10^7$ et, pour lesquelles les corps $Q(\sqrt{-d})$ ont $r_3 = 3$.

Chaque valeur de d est suivie de la liste des 13 idéaux réduits qui, avec ses conjugués et la classe principale, forment le sous-groupe de $\mathcal{H}_k$ d'exposant 3 . Si $\mathfrak{M}$ est un tel idéal, je note (m , x , y) la solution de l'équation (1) correspondante.

3321607 (94,27,1) - (128,2251,1) - (152,3275,1) - (202,5445,1) - (284,9397,1) - (304,10443,1) - (367,8840,6) - (377,1322,8) - (433,10590,8) - (533,23506,4) - (538,24891,1) - (722,36643,7) - (859,17028,26)

3640387 (149,3097,1) - (163,3699,1) - (229,6663,1) - (337,12225,1) - (383,14869,1) - (401,4994,8) - (433,17919,1) - (457,12198,8) - (521,21787,5) - (601,25206,8) - (787,44115,1) - (877,6653,27) - (941,43322,20)

4019207 (102,475,1) - (104,693,1) - (158,3429,1) - (278,9051,1) - (294,1081,5) - (379,8548,6) - (401,834,8) - (402,15995,1) - (573,26234,4) - (582,24323,7) - (618,30661,1) - (768,36409,11) - (833,45330,8)

4472360 (174,1784,2) - (234,5776,2) - (281,8418,2) - (451,2162,9) - (489,4526,10) - (506,22368,2) - (531,7598,11) - (569,26814,2) - (715,21350,15) - (761,24858,16) - (801,45142,2) - (990,58600,10) - (1035,65750,5)

4818916 (173,1198,2) - (178,1812,2) - (218,4708,2) - (485,20906,2) - (505,16704,7) - (706,37260,2) - (733,3742,18) - (745,20502,16) - (761,19240,17) - (925,56094,2) - (937,45354,16) - (965,46924,17) - (1121,43090,28)

4897363 (107,53,1) - (113,935,1) - (151,2979,1) - (163,3525,1) - (247,4025,3) - (367,4628,6) - (577,21330,8) - (641,21469,11) - (691,36261,1) - (769,38802,8) - (863,14164,22) - (1027,65787,1) - (1081,71049,1)

5048347 (109,363,1) - (233,6749,1) - (269,8533,1) - (283,6725,3) - (539,11024,10) - (583,24716,6) - (641,27026,8) - (707,37328,2) - (757,41595,1) - (907,54585,1) - (1057,32303,27) - (1063,69279,1) - (1069,69867,1)

5067967 (194,4913,1) - (218,6031,1) - (226,749,3) - (251,6556,2) - (268,8481,1) - (356,7333,5) - (358,13359,1) - (457,7578,8) - (472,20385,1) - (487,16720,6) - (661,20626,12) - (722,38735,1) - (1007,63752,2)

5153431 (110,413,1) - (140,2413,1) - (154,3075,1) - (212,5741,1) - (322,11331,1) - (512,23059,1) - (542,3649,11) - (553,18618,8) - (650,21793,11) - (746,37525,7) - (920,47369,13) - (1012,43279,21) - (1028,53443,17)

5288968 (182,1720,2) - (214,4248,2) - (227,6442,1) - (233,5426,2) - (403,1626,7) - (433,11590,6) - (434,17488,2) - (457,18990,2) - (514,22848,2) - (662,11128,14) - (673,34614,2) - (697,678,16) - (931,45142,15)

6562327 (118,99,1) - (227,4532,2) - (248,7379,1) - (292,9645,1) - (374,14237,1) - (418,16899,1) - (593,20350,8) - (601,21174,8) - (619,26692,6) - (764,42157,1) - (869,94,20) - (1102,23857,27) - (1276,16473,35)

7016747 (129,1253,1) - (149,2493,1) - (207,5335,1) - (283,5245,3) - (449,18843,1) - (683,35601,1) - (761,36246,8) - (777,8950,16) - (919,3197,21) - (959,59337,1) - (977,57282,8) - (1131,48896,22) - (1363,70805,27)

7060148 (197,1530,2) - (198,1676,2) - (222,3940,2) - (254,6108,2) - (278,7596,2) - (429,16958,2) - (649,32092,3) - (702,68,14) - (893,53106,2) - (1009,50204,15) - (1062,4292,26) - (1093,70490,6) - (1221,50086,26)

8124503 (132,1037,1) - (176,3699,1) - (192,4493,1) - (206,5181,1) - (246,7171,1) - (394,13097,3) - (446,18621,1) - (796,13763,15) - (902,1593,19) - (918,55555,1) - (1116,74509,1) - (1312,55775,27) - (1452,33505,37)

8180671 (142,1809,1) - (172,3489,1) - (212,5471,1) - (298,5677,3) - (412,16479,1) - (470,20177,1) - (500,22177,1) - (521,6490,8) - (632,4459,11) - (1070,23929,23) - (1270,47221,27) - (1304,31745,31) - (1396,95087,15)

8819519 (146,1905,1) - (180,3809,1) - (288,9313,1) - (458,19377,1) - (537,7414,8) - (578,27633,1) - (640,18281,9) - (678,35183,1) - (685,3958,12) - (804,43109,5) - (1384,31615,33) - (1394,5619,35) - (1578,29863,41)

8992363 (131,1,1) - (157,2547,1) - (187,4143,1) - (649,22758,8) - (671,31363,5) - (997,26793,19) - (1003,8395,21) - (1037,65702,4) - (1051,68079,1) - (1067,10105,23) - (1303,47891,27) - (1409,103022,8) - (1469,95306,20)

9487991 (150,2003,1) - (561,9950,8) - (633,20182,8) - (684,35645,1) - (810,46003,1) - (901,39490,12) - (1132,70949,9) - (1185,77774,8) - (1215,50816,22) - (1258,32353,27) - (1360,56081,27) - (1387,101644,6) - (1509,99746,20)

9778603 (143,1385,1) - (187,4047,1) - (221,5779,1) - (331,11631,1) - (569,10538,8) - (601,29301,1) - (683,28201,7) - (863,25580,14) - (979,39409,15) - (1157,75605,7) - (1487,42988,34) - (1513,115014,8) - (1579,92837,27)

Appendice 2

Je donne ci-dessous les 79 discriminants qui me sont connus, pour lesquels $r_3=3$ et qui sont plus petits que 63199139 (réponse à (q2)).

Je veux signaler, que cette liste n'est pas exhaustive, et que l'on peut s'attendre à un nombre beaucoup plus grand de discriminants qui répondent à la question 2, simplement en poussant plus loin mes calculs.

J'indique à la suite de chaque discriminant 5 valeurs de m qui sont solution de l'équation (1) correspondante.

10348907	143-173-243-411-561
10381927	142-208-242-298-344
10676983	146-227-262-316-376
11324296	241-338-466-659-758
11393951	162-212-410-564-570
12201979	173-175-251-287-553
12641639	156-180-206-398-453
12897383	162-296-326-456-593
13974943	166-212-476-736-752
14177407	154-202-208-347-374
14227223	156-158-162-408-726
14643743	162-192-236-366-474
14935391	162-180-240-300-360
15476323	157-181-211-667-733
15987407	164-198-284-302-582
16006307	173-213-239-331-641
16434239	198-206-278-300-430
16784851	175-263-265-287-395
17496643	191-277-341-601-1043
17725451	165-167-185-227-689
18594131	167-179-275-507-651
19941763	187-397-407-629-689
19969763	177-191-251-379-467
21806879	176-583-626-775-777
22151867	189-239-423-713-987
22309331	179-185-207-279-423
24418831	190-220-352-418-623
24688264	203-329-395-530-539
24952655	186-204-534-576-816
25012003	191-193-293-443-611
25249451	189-225-227-489-525
25424951	192-290-362-440-619
26156083	187-317-361-487-1067
26758111	242-335-344-622-760
28114627	193-311-349-467-517
28732623	208-402-436-454-502
29225219	195-221-233-255-501
29395571	197-255-299-407-1027
29482627	217-769-827-973-1057
30365267	197-219-279-453-719
30470603	197-461-501-587-667
30580763	197-201-263-809-1201
31859095	206-274-566-584-1226
32332891	245-337-905-935-1175
33505727	204-242-488-648-876
33543383	222-566-606-882-929
33889487	204-212-894-1074-1097
34394964	205-253-726-745-933
34557071	210-224-422-770-825
34757159	228-680-834-1145-1350
34764971	249-375-645-737-1023
35269627	209-229-773-857-1313
36323563	211-217-371-787-863
36399667	209-343-379-721-943
36519044	221-353-585-765-857
37940287	212-218-284-298-764
38547491	245-267-857-955-1295
38588287	214-262-314-578-644
39726931	215-329-605-913-1315
41980504	223-470-535-1031-1897
42132596	225-257-485-1521-1566
42808163	231-297-341-567-651
42895603	221-227-523-941-953
44671307	227-249-459-909-1121
48651143	246-272-402-446-648
49993463	246-438-612-867-1284
50994247	244-434-638-686-1153
52517111	240-860-1022-1044-1145
52526399	236-248-330-1065-1237
54433787	239-243-447-1087-1887
54530671	250-322-491-524-952
55247159	240-258-498-540-900
55458643	241-257-487-883-1031
55990111	244-302-844-967-1090
56012791	250-334-734-782-836
56892947	243-357-657-1113-1553
58106407	244-274-398-1388-1466
59240407	248-418-428-608-704
60638315	251-849-981-1289-1799

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHÂTELET (A.). - L'arithmétique des corps quadratiques. - Genève, l'Enseignement mathématique, 1962 (Monographies de l'Enseignement mathématique, 9).

[2] MITCHELL (H.). - On classes of ideals in a quadratic field, Annals of Math., Series 2, t. 27, 1926, p. 297-314.

[3] NAGELL (T.). - Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., t. 1, 1922, p. 140-150.

[4] NEUMANN (O.). - Relativ-quadratische Zahlkörper deren Klassenzahlen durch 3 teilbar sind, Math. Nachr., t. 56, 1973, p. 281-306.

[5] SCHOLZ (A.). - Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, J. für reine und angew Math., t. 166, 1931, p. 201-203.

[6] SHANKS (D.) and WEINBERGER (P.). - A quadratic field of prime discriminant requiring three generators for its class group and related theory, Acta Arithm., Warszawa, t. 21, 1972, p. 71-87.

[7] SHANKS (D.). - New types of quadratic fields having three invariants divisible by 3, J. number theory, t. 4, 1972, p. 537-556.

[8] SHANKS (D.) and SERAFIN (R.). - Quadratic fields with four invariants divisible by 3, Math. of Comput., t. 27, 1973, p. 183-187.

[9] SHANKS (D.) and NEILD (C.). - On the 3-rank of quadratic fields and the Euler product, Math. of Comput., t. 28, 1974, p. 279-291.

[10] YAMAMOTO (Y.). - On unramified Galois extensions of quadratic number fields, Osaka J. Math., t. 7, 1970, p. 57-76

(Texte reçu le 13 mai 1974)

Francisco DIAZ Y DIAZ
Université de Paris-Sud
Mathématiques, Bâtiment 425
Campus universitaire
91405 ORSAY