

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTINE PATHIAUX

Sur le produit des conjugués d'un nombre algébrique situés à l'extérieur du disque unité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1973-1974),
exp. n° G6, p. G1-G3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A4_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE PRODUIT DES CONJUGUÉS D'UN NOMBRE ALGÈBRE
 SITUÉS À L'EXTÉRIEUR DU DISQUE UNITÉ

par Martine PATHIAUX

Soit $\theta_0 = 1,32 \dots$ la racine réelle de l'équation $\theta^3 - \theta - 1 = 0$ (c'est-à-dire le plus petit nombre de Pisot) ; SMYTH [2] a démontré :

THÉORÈME 1. - Soient $P(z)$ un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[x]$, non réciproque et θ_i les zéros de $P(z)$, alors

$$\prod_{|\theta_i| > 1} |\theta_i| \geq \theta_0.$$

Je me propose, en utilisant des méthodes analogues, de généraliser, en un certain sens, ce résultat.

THÉORÈME 2. - Soient q un entier rationnel positif et $P(z) = qz^s + \dots + q_0$ un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$, irréductible, non réciproque tel que $|q_0| \geq q$. Si $\theta_1, \dots, \theta_s$ désignent les zéros de $P(z)$ alors

$$\prod_{|\theta_i| > 1} |\theta_i| \geq \frac{1}{4q} (1 + \sqrt{1 + 16q^2}).$$

Remarque. - Si $P(z)$ vérifie les hypothèses du théorème 2, $P(z)$ n'a pas de zéros dans le cercle $|z| = 1$. En effet, s'il en avait un, θ , de module 1, $\bar{\theta} = 1/\theta$ serait zéro de $P(z)$ et de son polynôme réciproque, ce qui est impossible puisque $P(z)$ est irréductible et non réciproque.

La démonstration repose sur le lemme suivant (voir Smyth).

LEMME 1. - Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, une fonction holomorphe dans $|z| < 1$, vérifiant $|f(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$, alors

$$|a_n| \leq 1 - a_0^2, \\ - (1 - a_0^2 - \frac{a_n^2}{1 + a_0}) \leq a_{2n} \leq 1 - a_0^2 - \frac{a_n^2}{1 - a_0}.$$

Notations. - Appelons $Q(z)$ le polynôme réciproque de $P(z)$ (resp. l'opposé du polynôme réciproque de $P(z)$) si $q_0 > 0$ (resp. si $q_0 < 0$) et posons

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = (\pm qz^s + \dots + |q_0|) / (q + q_{s-1}z + \dots + q_0 z^s) = u_0 + u_k z^{k+u_l} z^l + \dots, \quad u_k \neq 0,$$

$$g(z) = \varepsilon \prod_{|\theta_i| > 1} \left(\frac{1 - \theta_i z}{\theta_i - z} \right) = d_0 + d_1 z + \dots \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \varepsilon \prod_{|\theta_i| > 1} |\theta_i| > 0,$$

$$f(z) = g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

et

$$t = \prod_{|\theta_i| > 1} |\theta_i| .$$

$f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans $|z| \leq 1$ et vérifient les hypothèses figurant dans le lemme 1.

LEMME 2. - Si $t < 1 + 1/q$ alors $u_0 = 1$.

Il suffit d'appliquer le principe du maximum à $f(z)$. On a $|u_0/t| \leq 1$ soit $|q_0| < q(1 + 1/q) = q + 1$, et alors $q \leq |q_0| < q + 1$ et donc $|q_0| = q$ et $u_0 = 1$.

Démonstration du théorème 2. - Supposons donc que $t < 1 + 1/q$; on a alors les identités

$$(1) \quad \begin{aligned} d_0 &= c_0 = 1/t , \\ d_1 &= c_1 , \\ &\dots \\ d_{k-1} &= c_{k-1} , \\ d_k + d_0 u_k &= c_k . \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} q &= q_0 , \\ q_1 &= q_{s-1} , \\ &\dots \\ q_{k-1} &= q_{s-k} , \\ qu_k + q_{s-k} &= q_k . \end{aligned}$$

D'après l'égalité (1) et le lemme 1, on a

$$|d_k + \frac{1}{t} u_k| \leq 1 - \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad |d_k| \leq 1 - \frac{1}{t^2} ,$$

soit

$$(3) \quad |u_k| \leq 2(t - \frac{1}{t}) .$$

Mais $qu_k \in \mathbb{Z}^*$ d'après les égalités (2). Donc $|u_k| \geq 1/q$, d'où l'on déduit $1/q \leq 2(t - 1/t)$, soit

$$t \geq \frac{1}{4q} (1 + \sqrt{1 + 16q^2}) .$$

En utilisant la deuxième inégalité du lemme 1, on peut améliorer la constante $(1/4q)(1 + \sqrt{1 + 16q^2})$ mais on n'aboutit pas au résultat

$$\prod_{|\theta_i| > 1} |\theta_i| \geq \theta_q ,$$

où θ_q désigne le zéro de module > 1 du polynôme $qz^3 + (q-1)z^2 - z - q$ c'est-à-dire le plus petit nombre de S_q (PISOT [1]). Par contre, on peut démontrer le théorème suivant.

THEOREME 3. - Soit $P(z) = qz^s + \dots + q_0$ un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$, irréductible, non réciproque, tel que $|q_0| > q$, ayant au plus deux zéros dans $|z| > 1$, et ceux-ci étant réels et de même signe, alors

$$\prod_{|\theta_i| > 1} |\theta_i| \geq \theta_q.$$

On applique la deuxième inégalité du lemme 1 à la fonction f ; et de l'égalité $d_2 = 1 - d_0^2 - d_1/(1 - 1/t)$, on déduit

$$(5) \quad -2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + 2 \frac{d_1^2}{1-1/t^2} - d_1 u_1 \frac{(t-1)}{t+1} + \frac{u_1^2}{t(t+1)} \leq \frac{u_2}{t} \leq -u_1 d_1 \frac{(1+t)}{t-1} - \frac{u_1^2}{t(t-1)}.$$

On résoud cette inégalité sachant que qu_1 et $q^2 u_2$ sont des entiers rationnels si $u_1 \neq 0$ et $qu_2 \in \mathbb{Z}^*$ si $u_1 = 0$ puisque $P(z)/Q(z)$ a au plus deux pôles dans $|z| < 1$.

On en déduit que $t > \theta_q$ en utilisant l'inégalité $|d_1| > 2/\sqrt{t} (1 - 1/t)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.
- [2] SMYTH (C. J.). - On the product of the conjugates outside. The unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.

(Texte reçu le 14 octobre 1974)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 St REMY les CHEVREUSE.