Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Georges Rhin

Géométrie des nombres p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1973-1974), exp. n° G9, p. G1-G7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G9, 7 p.

21 janvier 1974

GÉOMETRIE DES NOMBRES p-ADIQUES

par Georges RHIN

1. Introduction.

Les résultats de cet exposé généralisent les résultats classiques de géométrie des nombres [1]. Ils ont été obtenus pour l'essentiel par E. LUTZ [2] sous une forme un peu différente.

Soient t un entier positif ou nul, et $p_1, \ldots, p_t$ t nombres premiers distincts. On munit $\mathbb{Q}_{p_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant t)$ de la valeur absolue p_j-adique telle que $|p_j|_j = p_j^{-1}$.

Soit $\Omega^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Q}_{p_1}^n \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_t}^n$. Soient $a_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}$ n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$, $a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}$ n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ pour $1 \leqslant j \leqslant t$.

On appelle lattice de base $(a_i^{(j)})_{1\leqslant i\leqslant n, 0\leqslant j\leqslant t}$ l'ensemble Λ des points de Ω^n de la forme $(a^{(0)}x, \ldots, a^{(t)}x)$ où $a^{(j)}$ désigne la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont $a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}$ et x un vecteur colonne de $\mathbb{Z}^n$.

On note $m(\Lambda) = \prod_{j=0}^{t} |\det a^{(j)}|_j$, $|\ |_0$ désignant la valeur absolue réelle.

On appelle connexe de $\mathbb{Q}_{p_j}$ un sous-ensemble $M^{(j)}$ de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ tel que, si $x, y \in M^{(j)}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_{p_j}$ avec $|\lambda|_j \leqslant 1$, $|\mu|_j \leqslant 1$, alors $\lambda x + \mu y \in M^{(j)}$.

Un convexe de Ω^n est un produit $\mathfrak{M} = M^{(0)} \times M^{(1)} \times \ldots \times M^{(t)}$, où $M^{(0)}$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$, et $M^{(j)}$ un convexe de $\mathbb{Q}_{p_j}^n$ pour $j > 0$.

$\mathfrak{M}$ est dit symétrique par rapport à 0 si $M^{(0)}$ l'est. Sur Ω^n, on considère la mesure de Haar produit des mesures de Haar sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Q}_{p_t}$ telles que $\text{mes}\ [0, 1] = 1$ et $\text{mes}\ \mathbb{Z}_{p_j} = 1$.

$\mathfrak{F}_0$ désigne l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^n$ tels que $x = \alpha_1 a_1^{(0)}, \ldots, \alpha_n a_n^{(0)}$ avec $0 \leqslant \alpha_i < 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mathfrak{F}_j$ désigne $\mathbb{Z}_{p_j} a_1^{(j)} + \ldots + \mathbb{Z}_{p_j} a_n^{(j)}$.

2. Premiers résultats.

LEMME 1. - *Soit* $\mathfrak{A}$ *une partie mesurable de* $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_t$ *telle que* $\text{mes}(\mathfrak{A}) > m(\Lambda)$; *alors il existe* $x_1 \in \mathfrak{A}$, $x_2 \in \mathfrak{A}$, *tels que* $x_1 - x_2 \in \Lambda - \{0\}$.

Démonstration. - Soient $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$, et $L(y_1, \ldots, y_n)$ l'ensemble des points $(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(t)})$ de Ω^n tels que

$$x^{(0)} = \alpha_1 a_1^{(0)} + \ldots + \alpha_n a^{(0)} \quad \text{avec} \quad y_i \leqslant \alpha_i < y_i + 1$$

$$x^{(j)} \in \mathfrak{F}_j \quad \text{pour} \quad j \geqslant 1 .$$

$L(y_1, \dots, y_n)$ est donc un "translaté" du domaine fondamental $\mathfrak{F} = \prod_{0 \leq j \leq t} \mathfrak{F}_j$. D'après [1] et [2], on a donc

$$\text{mes}\, L(y_1, \dots, y_n) = m(\Lambda) = m(\mathfrak{F}) .$$

Soit $M(y_1, \dots, y_n)$ l'ensemble des points

$$x^{(0)} - a^{(0)} y , x^{(1)} - a^{(1)} y , \dots, x^{(t)} - a^{(t)} y)$$

tels que $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(t)})$ appartienne à $\mathfrak{a} \cap L(y_1, \dots, y_n)$. $M(y_1, \dots, y_n)$ est un sous-ensemble mesurable de $L(0, 0, \dots, 0) = \mathfrak{F}$.

Supposons les ensembles $M(y_1, \dots, y_n)$ tous disjoints ; on obtient

$$\text{mes}(\mathfrak{a}) = \sum \text{mes}(\mathfrak{a} \cap L(y_1, \dots, y_n))$$

puisque les ensembles $L(y_1, \dots, y_n)$ forment un recouvrement de $\underset{\sim}{R}^n \times \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_t$.

On a donc $\text{mes}(\mathfrak{a}) = \sum \text{mes}\, M(y_1, \dots, y_n) \leq m(\Lambda)$, ce qui est contradictoire. Il existe donc deux ensembles $M(y_1, \dots, y_n)$ et $M(y'_1, \dots, y'_n)$ d'intersection non vide. Il existe $x_1 = (x_1^{(0)}, \dots, x_1^{(t)})$ et $x_2 = (x_2^{(0)}, \dots, x_2^{(t)})$ appartenant à $\mathfrak{a}$ tels que

$$x_1 - (a^{(0)} y , a^{(1)} y , \dots, a^{(t)} y) = x_2 - (a^{(0)} y' , a^{(1)} y' , \dots, a^{(t)} y') .$$

Comme $y \neq y'$ et $\det a^{(j)} \neq 0$, $\forall j$, $x_1 - x_2$ est non nul et appartient à Λ.

PROPOSITION 1. – <u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est un convexe compact symétrique par rapport à</u> 0 <u>de</u> Ω^n, <u>tel que</u> $\text{mes}(\mathfrak{M}) \geq 2^n m(\Lambda)$, <u>alors</u> $\mathfrak{M} \cap \Lambda \neq \{0\}$.

<u>Démonstration</u>.

(a) <u>Supposons</u> $\text{mes}(\mathfrak{M}) > 2^n m(\Lambda)$.

Si $\mathfrak{M}_1 = (\frac{1}{2} M^{(0)}) \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(r)}$, $\text{mes}(\mathfrak{M}_1) > m(\Lambda)$. Soient x_1 et x_2 appartenant à $\mathfrak{M}_1$ tels que $x_1 - x_2 \in \Lambda - \{0\}$. $x_i = (x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(t)})$ avec $\pm 2\, x_i^{(0)} \in M^{(0)}$, donc

$$x_1^{(0)} - x_2^{(0)} = \frac{1}{2} (2x_1^{(0)}) + \frac{1}{2}((- 2x_2^{(0)}) \in M^{(0)} .$$

Pour $1 \leq j \leq t$, $x_1^{(j)} - x_2^{(j)} \in M^j$, donc $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$.

(b) <u>Supposons que</u> $\text{mes}(\mathfrak{M}) = 2^n m(\Lambda)$.

Soit $\mathfrak{M}_\varepsilon = ((1 + \varepsilon)M^{(0)}) \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(t)}$ pour ε réel positif

$$\text{mes}\, \mathfrak{M}_\varepsilon = (1 + \varepsilon)^n \text{mes}\, \mathfrak{M} > 2^n m(\Lambda)$$

donc $\mathfrak{M}_\varepsilon \cap \Lambda \neq \{0\}$.

Comme $\mathfrak{M}$ est compact, $\mathfrak{M} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{M}_\varepsilon$. Or $\mathfrak{M}_\varepsilon \cap \Lambda$ est un ensemble fini, donc $\mathfrak{M} \cap \Lambda \neq \{0\}$.

DÉFINITION 1. – Le système $(b_i^{(j)})$, $1 \leq j \leq t$, $1 \leq i \leq n$, $[b_i^{(j)} \in \underset{\sim}{Q}^n_{p_j}]$, satisfait la condition $(A(\Lambda))$ si

$$\forall\, j\ ,\quad 1 \leq j \leq t\ ,\qquad \max_{1\leq i\leq n} |b_i^{(j)}.x|_j \leq 1 \Rightarrow x \in \mathfrak{F}_j\ ,$$

$b_i^{(j)}.x$ désignant le produit scalaire habituel.

LEMME 2. - Pour tout j $(1 \leq j \leq t)$, soit $(b_i^{(j)})$ un système de n vecteurs linéairement indépendants de $\underset{\sim}{Q}_{p_j}^n$. Alors il existe $\delta^{(j)} \in \underset{\sim}{Q}_{p_j}$ tel que

$$(\delta^{(j)}\, b_i^{(j)})\ ,\quad 1 \leq i \leq n\ ,\ 1 \leq j \leq t\ ,$$

vérifie la condition $A(\Lambda)$.

Démonstration. - Soit $x \in \underset{\sim}{Q}_{p_j}$. On pose $x = a^{(j)}\, y$. Il faut donc vérifier que

$$\max_{1\leq i\leq n} |\delta^{(j)}\, b_i^j.a^{(j)}\, y|_j \leq 1 \Rightarrow y \in \underset{\sim}{Z}_{p_j}^n\ .$$

En notation matricielle $b_i^{(j)}\circ a^{(j)}\, y = {}^t(b_i^j)\, a^{(j)}\, y$. En posant $c_i^{(j)} = {}^t(b_i^j)\, a^{(j)}$, $\max_{1\leq i\leq n} |c_i^{(j)}\, y|_j$ définit une norme sur $\underset{\sim}{Q}_{p_j}^n$; comme toutes les normes sur $\underset{\sim}{Q}_{p_j}^n$ sont équivalentes, il existe $\Delta_j \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que

$$\Delta_j \max_{1\leq i\leq n} |c_i^{(j)}\, y|_j \geq \max |y_i|_j\ ,\qquad \forall\, y \in \underset{\sim}{Q}_{p_j}^n\ .$$

Il suffit de prendre $\delta^{(j)}$ vérifiant $|\delta^{(j)}|_j \geq \Delta j$.

PROPOSITION 2. - Soient $(b_1^{(0)}\ , \ldots\ , b_n^{(0)})$ n vecteurs linéairement indépendants de $\underset{\sim}{R}^n$ et, pour $1 \leq j \leq t$, $(b_1^{(j)}\ , \ldots, b_n^{(j)})$ n vecteurs linéairement indépendants de $\underset{\sim}{Q}_{p_j}^n$ satisfaisant la condition $A(\Lambda)$. Soient $C_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq t$, des réels tels que

$$C_i^{(j)} > 0$$

$$C_i^{(j)} \leq 1 \text{ pour } j \geq 1 \text{ et } C_i^{(j)} \in p_j^{Z}\ .$$

Posons $|\det(b_1^{(j)}\ , \ldots, b_n^{(j)})|_j = d_j$ et $d = \prod_{j=0}^t d_j$. Alors si

$$m(\Lambda)\, d \leq \prod_{j=0}^t \prod_{i=1}^n C_i^{(j)}\ ,$$

il existe $x = (x^{(0)}\ , \ldots, x^{(t)}) \neq 0$ appartenant à Λ tel que

$$|b_i^{(j)}\circ x^{(j)}|_j \leq C^{(j)}\ ,\quad \forall\, i\ \ 1 \leq i \leq n\ ,\ \forall\, j\ \ 0 \leq j \leq t\ .$$

Démonstration. - Soit $\mathfrak{M} = \{x \in \Omega^n\ ;\ |b^{(j)}\circ x^{(j)}|_j \leq C_i^{(j)}\ ,\ \forall\, i\ ,\ \forall\, j\}$. $\mathfrak{M}$ est évidemment un convexe compact, symétrique par rapport à 0.

$$\text{mes } \mathfrak{M} = \prod_{j=0}^t \text{mes } M^{(j)}\ .$$

D'après [1], $\text{mes } M^{(0)} = 2^n (\prod_{i=1}^n C_i^{(0)})/d_0$.

D'après [2], $\text{mes } M^{(j)} = 1/d_j \prod_{i=1}^n C_i^{(j)}$ pour $j \geq 1$.

On a donc $\text{mes } \mathfrak{M} = 2^n (\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^t C_i^{(j)})/(\prod_{j=0}^t d_j) \geq 2^n\, m(\Lambda)$.

On peut donc appliquer la proposition 1.

3. Les minima successifs.

Soient $(b_1^{(j)}\ , \ldots, b_n^{(j)})$, $1 \leq j \leq t$, n vecteurs linéairement indépendants de $\underset{\sim}{Q}^n_{p_j}$ satisfaisant la condition $A(\Lambda)$. Soient $C_i^{(j)} \in p_j^{-N}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant t$. $M^{(j)}$ désigne l'ensemble des $x^{(j)} \in \underset{\sim}{Q}^n_{p_j}$ tels que $|b_i^{(j)}.x^{(j)}|_j \leqslant C_i^{(j)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soit $M^{(0)}$ un convexe compact symétrique par rapport à 0 tel que mes $M^{(0)} > 0$.

On pose $\mathfrak{M} = M^{(0)} \times M^{(1)} \times \dots \times M^{(t)}$.

DÉFINITION 2. - Soit $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(t)}) \in \Omega^n$. On pose

$$F^{(j)}(x^{(j)}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (1/C_i^{(j)}) |b_i^{(j)}.x^{(j)}|_j \quad \text{pour} \quad j \geqslant 1 ,$$

$$F^{(0)}(x^{(0)}) = \inf_{x^{(0)} \in \lambda M^{(0)}} |\lambda| ,$$

$$F(x) = \prod_{j=0}^t F^{(j)}(x^{(j)}) .$$

On définit les minima successifs de $\mathfrak{M}$ par rapport à Λ de la façon suivante :

$$m_1 = \min_{x\in\Lambda-\{0\}} F(x) = F(x_1)$$
$$\vdots$$
$$m_i = \min_{x\in\Lambda} F(x) = F(x_i) \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

$(x\ x_1, \dots, x_{i-1})$ $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants.

Soit p un nombre premier. Pour $1 \leqslant j \leqslant t$,

$$F^{(j)}(px^{(j)}) = \begin{cases} F^{(j)}(x^{(j)}) & \text{si} \quad p \neq p_j \\ p^{-1} F^{(j)}(x^j) & \text{si} \quad p = p_j \end{cases}$$

et

$$F^{(0)}(px^{(0)}) = pF^{(0)}(x^{(0)}) .$$

On a donc $F(px) \geqslant F(x)$ pour tout nombre premier p , et il suffira de considérer les minima sur les points primitifs de Λ c'est-à-dire sur les points $(a^{(0)}y, \dots, a^{(t)}y)$ tels que $y_1, \dots, y_n$ soient premiers dans leur ensemble.

PROPOSITION 3. - <u>Les minima successifs de</u> $\mathfrak{M}$ <u>par rapport à</u> Λ <u>existent, et vérifient</u> $0 < m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n < +\infty$.

<u>Démonstration.</u>

(a) Pour tout $\alpha > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points primitifs x de Λ tels que $F(x) \leqslant \alpha$. Supposons qu'il en existe une infinité ; il existe alors une suite (x_k) et un indice j tels que

$$F^{(0)}(x_k^{(0)}) \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$$
$$F^{(j)}(x_k^{(j)}) \xrightarrow{k\to+\infty} 0 .$$

Comme $x_k^{(j)} = a^{(j)}y_k$ avec $y_k \in \underset{\sim}{Z}^n$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} 1/C_i^{(j)} |b_i^{(j)} a^j y_k|_j \xrightarrow{k\to+\infty} 0 .$$

Toutes les normes de $\underset{\sim}{Q}^n_{p_j}$ étant équivalentes, il existe un entier k_0 tel que

$k > k_0$ entraîne

$$\max_{1\leq i\leq n} |y_{k,i}|_j < 1 .$$

Ceci entraîne que p_j divise $(y_{k,1}, \ldots, y_{k,n})$ pour $k \geq k_0$, ce qui est impossible.

(b) Soient $y_1, \ldots, y_n$ n points de Λ , $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants et primitifs. Si $\alpha = \max_{1\leq i\leq n} F(y_i)$, d'après (a) il existe un nombre fini d'éléments $z_\ell (\ell \in S)$ de Λ primitifs tels que $F(z_\ell) \leq \alpha$. On a $m_1 = \min_{\ell\in S} F(z_\ell) = F(x_1)$, ce qui montre bien $m_1 > 0$.

Supposons $m_1, \ldots, m_{i-1}$, définis avec $m_k = F(x_k)$ pour $1 \leq k \leq i-1$. Il n'existe qu'un nombre fini N d'éléments z_ℓ de Λ primitifs, linéairement indépendants de $(x_1, \ldots, x_{i-1})$, tels que $F(z_\ell) \leq \alpha$. N est non nul ; en effet, il existe un y_i (y_1 par exemple) tel que $x_1, \ldots, x_{i-1}$, y_1 soient linéairement indépendants.

De plus, $x_1, \ldots, x_{i-2}$, z_ℓ sont linéairement indépendants, donc $F(z_\ell) \geq m_{i-1}$. On a $m_n \leq \alpha$.

4. Une généralisation du deuxième théorème de Minkowski.

Soit $\mathfrak{M}$ un convexe de Ω^n défini comme dans le paragraphe précédent.

Soient $\tau^{(j)}$, $0 \leq j \leq t$, $t+1$ matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$ si $j = 0$, dans $\mathbb{Q}_{p_j}$ si $j \geq 1$. $\tau\Lambda$ désigne l'ensemble des points $(\tau^{(0)} a^{(0)} x, \ldots, \tau^{(t)} a^{(t)} x)$ pour $x \in \mathbb{Z}^n$ et

$$G^{(j)}(y) = F^{(j)}((\tau^j)^{-1} y) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} y \in \mathbb{R}^n & \text{si } j = 0 \\ y \in \mathbb{Q}_{p_j} & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

On pose

$$(\tau\mathfrak{M})^{(j)} = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{Q}_{p_j}^n \text{ tels que } G^{(j)}(y) \leq 1\}$$

et

$$\tau\mathfrak{M} = (\tau\mathfrak{M})^{(0)} \times (\tau\mathfrak{M})^{(1)} \times \ldots \times (\tau\mathfrak{M})^{(t)} .$$

LEMME 3. - <u>Les minima successifs de</u> $\tau\mathfrak{M}$ <u>par rapport à</u> $\tau\Lambda$ <u>sont les minima successifs de</u> $\mathfrak{M}$ <u>par rapport à</u> Λ <u>et</u>

$$m(\Lambda) \operatorname{mes}(\tau\mathfrak{M}) = m(\tau\Lambda).\operatorname{mes}(\mathfrak{M}) .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$, $G^{(j)}(\tau^{(j)} a^{(j)} x) = F^{(j)}(a^{(j)} x)$, ce qui montre l'égalité des minima successifs

$$\begin{aligned} m(\tau\Lambda) &= \prod_{j=0}^{t} |\det(\tau^{(j)} a^{(j)})|_j \\ &= (\prod_{j=0}^{t} |\det \tau^{(j)}|_j).m(\Lambda) . \end{aligned}$$

D'autre part, comme $(\tau\mathfrak{M})^{(j)} = \tau^{(j)}\ M^{(j)}$

$$\operatorname{mes}(\tau\mathfrak{M}) = \prod_{j=0}^{t} |\det(\tau^{(j)})|_j . \operatorname{mes} M^{(j)}$$
$$= \operatorname{mes}(\mathfrak{M}) . \prod_{j=0}^{t} |\det(\tau^{(j)})|_j .$$

THÉORÈME 1. - Soit $\mathfrak{M}$ le convexe de Ω^n défini dans le paragraphe précédent, et soient $m_1 , \ldots, m_n$ ses minima successifs par rapport à Λ . Alors

(1) $$m(\Lambda) . \frac{2^n}{n!} \leqslant m_1 , \ldots, m_n \operatorname{mes}(\mathfrak{M}) \leqslant 2^n\ m(\Lambda) .$$

Démonstration.

(a) Si $\tau^{(j)} = (a^{(j)})^{-1}$, $\tau\Lambda$ est alors la diagonale de $(\underset{\sim}{Z}^n)^{t+1}$ que l'on notera $\underset{\sim}{Z}^n$. D'après le lemme précédent, (1) devient

(2) $$\frac{2^n}{n!} \leqslant m_1 , \ldots, m_n \operatorname{mes}(\tau\mathfrak{M}) \leqslant 2^n$$

où ${}^t(a^{(j)})\ b_i^{(j)}$ vérifie la condition $A(\underset{\sim}{Z}^n)$. On suppose dans la suite que $\Lambda = \underset{\sim}{Z}^n$.

(b) Démontrons $2^n/n! \leqslant m_1 , \ldots, m_n \operatorname{mes}(\mathfrak{M})$. Soient $x_1 , \ldots, x_n$ les points de $\underset{\sim}{Z}^n$ tels que $F(x_i) = m_i$. Soient $\mu_i^{(j)} \in \underset{\sim}{Q}_{p_j}$ pour $j \geqslant 1$ et $\mu_i^{(0)} \in \underset{\sim}{R}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que

(3) $$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i^{(0)}|\ F^{(0)}(x_i) \leqslant 1 ,$$

(4) $$\max_{i=1,\ldots,n}(|\mu_i^j|_j\ F^{(j)}(x_i)) \leqslant 1 .$$

On vérifie aisément que

$$F^{(j)}\ (\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(j)} x_i) \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant j \leqslant t$$

ce qui montre que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(j)} x_i \in M^{(j)} \quad \text{pour tout } j .$$

Pour $j = 0$, l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(0)}\ x_i$ est de mesure

$$\frac{2^n}{n!}\ (|\det(x_1 , \ldots, x_n)|_0)/(\prod_{i=1}^{i=n} F^{(0)}(x_i)) \leqslant \operatorname{mes} M^{(0)} .$$

Pour $j \geqslant 1$, l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(j)} x_i$ est de mesure

$$(|\det(x_1 , \ldots, x_0)|_j)/(\prod_{i=1}^{i=n} F^j(x_i)) \leqslant \operatorname{mes} M^{(j)} .$$

Comme $\det(x_1 , \ldots, x_n)$ est un entier non nul, $\prod_{j=0}^{j=t} |\det(x_1 , \ldots, x_n)|_j \geqslant 1$, et par conséquent

(5) $$\frac{2^n}{n!}\ (\prod_{j=0}^{j=t} |\det(x_1 , \ldots, x_n)|_j)/(F(x_1) , \ldots, F(x_n)) \leqslant \operatorname{mes}(\mathfrak{M})$$

entraîne $2^n/n! \leqslant (\operatorname{mes} \mathfrak{M}) . m_1 , \ldots, m_n$

(c) Démontrons $m_1 , \ldots, m_n \leqslant 2^n$. Soit Λ_C le sous-réseau de $\underset{\sim}{Z}^n$ des points $x \in \underset{\sim}{Z}^n$ tels que $x \in M^{(j)}$ pour $1 \leqslant j \leqslant t$. Alors, d'après [2], l'indice du sous-groupe Λ_C de $\underset{\sim}{Z}^n$ est $I(\Lambda_C) = \{\prod_{j=1}^{j=t} \operatorname{mes}(x \in \underset{\sim}{Z}_{p_j}^n\ \ |F^{(j)}(x)|_j \leqslant 1)\}^{-1}$.

Puisque $M^{(j)} \subset \underset{\sim}{Z}^n_{p_j}$ [condition $A(\underset{\sim}{Z}^n)$], on a

$$I(\Lambda_C) = \prod_{j=1}^{j=t} (\text{mes } M^{(j)})^{-1} = (\text{mes}(M^{(0)}))/\text{mes } \mathfrak{M} .$$

D'après le théorème de Minkowski [1], il existe n points de Λ_C linéairement indépendants $y_1, \ldots, y_n$ tels que

$$\prod_{i=1}^{i=n} F^{(0)}(y_i) \leq (2^n \, I(\Lambda_C))/(\text{mes}(M^{(0)})) .$$

Puisque $y_i \in \Lambda_C$, $F(y_i) \leq F^{(0)}(y_i)$; on a donc $\prod_{i=1}^{i=n} F(y_i) \leq 2^n/\text{mes}(\mathfrak{M})$.

Supposons $F(y_1) \leq F(y_2) \leq \ldots \leq F(y_n)$; alors $m_i = F(x_i) \leq F(y_i)$, $\forall\ i=1,\ldots,n$ et $\prod_{i=1}^{i=n} F(x_i) \leq 2^n/\text{mes}(\mathfrak{M})$.

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> $(x_1, \ldots, x_n)$ <u>des points de</u> Λ <u>tels que</u> $F(x_i) = m_i$, <u>alors si</u> $x_i = (a^{(0)} y_i , \ldots, a^{(t)} y_i)$, <u>on a</u>

$$1 \leq \prod_{j=0}^{t} |\det(y_1, \ldots, y_n)|_j \leq n!$$

Il suffit de comparer (5) et (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics. n° 45).

[2] LUTZ (Elisabeth). - Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1224 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12).

(Texte reçu le 21 mars 1974)

Georges RHIN
44 rue de Touraine
57160 MOULINS LES METZ