

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE MIGNOTTE

Indépendance algébrique de certains nombres de la forme α^β et α^{β^2}

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975),
exp. n° G9, p. G1-G5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A10_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INDÉPENDANCE ALGÈBRIQUE DE CERTAINS NOMBRES
 DE LA FORME α^β et α^{β^2}

par Maurice MIGNOTTE

(d'après W. Dale BROWNAWELL et Michel WALDSCHMIDT [2]).

1. Énoncé du résultat.

En 1949, A. O. GEL'FOND ([4], Th. 1, p. 132-133) prouva que si α est un nombre algébrique non nul, $\log \alpha \neq 0$, et β un irrationnel cubique, alors α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants (sur $\overline{\mathbb{Q}}$). Le théorème suivant étend ce résultat au cas où α est très bien approché par des nombres algébriques de degré borné.

THÉOREME. - Soient α un nombre complexe non nul, $\log \alpha \neq 0$, et β un nombre irrationnel cubique. Soit f une fonction réelle positive, croissante et non bornée, définie sur \mathbb{N} . Supposons que, pour un certain entier d_0 et une infinité d'entiers T , il existe un nombre algébrique a_T , de degré au plus d_0 , tel que

$$\log H(a_T) \leq T \text{ et } \log |\alpha - a_T| < -\exp(Tf(T)).$$

Alors α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants.

(La notation $H(a)$ désigne la hauteur d'un nombre algébrique a , c'est-à-dire le maximum des modules des coefficients de son polynôme minimal sur \mathbb{Z} .)

Exemple. - Pour

$$\alpha = \sum_{n \geq 0} (-1)^n 2^{-2^n} \dots \} 2n \text{ fois}$$

α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants si β est un nombre algébrique de degré 3.

On fixe une détermination du logarithme dans le disque $|z - \alpha| < |\alpha|$ telle que $\log \alpha$ soit non nul. Pour a dans ce disque, on écrit a^γ au lieu de $\exp(\gamma \log a)$.

2. Une série de lemmes.

LEMME 1 ("Lemme de Siegel"). - Soient R et S deux entiers positifs, $2R < S$, et soient a_{ij} , $1 \leq i \leq R$, $1 \leq j \leq S$, des polynômes à coefficients entiers de degré et de hauteur respectivement majorés par δ et A , $A \geq 1$. Alors il existe des polynômes f_1, \dots, f_S de degré au plus δ vérifiant

$$ht(f_j) \leq ((1 + \delta)^2 SA)^{2R/(S-2R)}$$

et

$$\sum_{j=1}^S a_{ij} f_j = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq R.$$

(Voir [1], lemme 5.2.)

LEMME 2 (GEL'FOND). - Pour deux polynômes quelconques sur \mathbb{C} , on a

$$ht(P).ht(Q) \leq e^{\deg PQ}.ht(PQ) .$$

(Voir [4], lemme 2, p. 135.)

LEMME 3 (TIJDEMAN, [5]). - Soit

$$F(z) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \exp(\alpha_i z) ,$$

m entier positif, α_i distincts, un polynôme exponentiel. Soient r, s, t des entiers positifs, $r = st$. Soient $\beta_0, \dots, \beta_{s-1}$ des nombres complexes distincts. On pose

$$a = \max_{0 \leq i < m} (|\alpha_i|, 1) , \quad b = \max_{0 \leq j < s} (|\beta_j|, 1) , \\ a_0 = \min_{i,j,i \neq j} (|\alpha_i - \alpha_j|, 1) , \quad b_0 = \min_{0 \leq i < j < s} (|\beta_i - \beta_j|, 1) .$$

Alors, pour $r \geq 2m + 13ab$, on a

$$\max_{0 \leq i < m} |A_i| \leq s \sqrt{m!} e^{7ab} \left(\frac{1}{2a_0 b}\right)^{m-1} \left(\frac{72b}{b_0 \sqrt{s}}\right)^r \max_{0 \leq h < t, 0 \leq j < s} |F^{(h)}(\beta_j)| .$$

LEMME 4 (GEL'FOND [4], lemme V, p. 145-146). - Soient f et g des polynômes à coefficients entiers premiers entre eux. Alors, pour tout nombre complexe ω , on a

$$\max(|f(\omega)|, |g(\omega)|) > |f|^{-n} |g|^{-m} (m+n)^{-(m+n)} ,$$

où on a posé

$$|f| = ht(f) , \quad |g| = ht(g) , \quad m = \deg(f) , \quad n = \deg(g) .$$

LEMME 5 (GEL'FOND [4], lemme VI, p. 147). - Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients entiers et ω un nombre complexe vérifiant

$$|P(\omega)| \leq \exp(-\lambda d(h+d)) , \quad \lambda \geq 3 , \quad d = \deg P , \quad ht(P) = e^h .$$

Alors il existe un diviseur Q de P , égal à une puissance d'un polynôme irréductible sur \mathbb{Z} , tel que

$$|Q(\omega)| \leq \exp(-(\lambda-1)d(h+d)) .$$

LEMME 6. - Soit ω un nombre complexe transcendant et ξ un entier algébrique sur $\mathbb{Z}[\omega]$, de degré δ , dont le polynôme minimal a un degré majoré par d et une hauteur majorée par e^h . Si

$$\log|\xi| = -\lambda d(d+h) , \quad \text{avec } \lambda > 6 + 2 \log(\delta+1) + 2 \log(|\omega|+1) ,$$

alors il existe un polynôme $P(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ irréductible, et un entier positif s , tels que P^s divise la norme de ξ sur $\mathbb{Q}(\omega)$ et que

$$-3\delta\lambda d(h+d) \leq \log|P(\omega)| \leq -\frac{\lambda}{6s} d(h+d) .$$

Démonstration du lemme 6. - C'est une adaptation des arguments de ČUDNOVSKIJ [3].
Considérons le polynôme minimal de ξ sur $\mathbb{Z}[\omega]$:

$$\xi^\delta + u_{\delta-1}(\omega) \xi^{\delta-1} + \dots + u_0(\omega) = 0, \quad \deg u_i \leq d, \quad h u_i \leq e^h \quad (0 \leq i \leq \delta-1).$$

La norme de ξ sur $\mathbb{Q}(\omega)$ est u_0 , et

$$u_0 = -\xi \sum_{1 \leq i \leq \delta} u_i \xi^{i-1} \quad (\text{avec } u_\delta = 1).$$

D'où, facilement,

$$\log |u_0(\omega)| < -\frac{\lambda}{2} d(d+h).$$

Soit $P(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ irréductible, donné par le lemme 5, tel que P^s divise u_0 ,
 $s > 0$, et

$$\log |P^s(\omega)| < -\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) d(d+h) < -\frac{\lambda}{6} d(d+h).$$

On va démontrer l'inégalité

$$(1) \quad \log |P(\omega)| > -3\delta\lambda d(d+h).$$

Supposons que (1) n'ait pas lieu. Dans ce cas,

$$(2) \quad \log |u_j(\omega)| \leq -2\delta\lambda d(d+h) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq \delta-1.$$

En effet, (2) est vraie pour $j=0$: utiliser le fait que P divise u_0 et le lemme 2. Supposons que (2) ait lieu jusqu'à l'indice $j-1$, $1 \leq j \leq \delta-1$, et démontrons qu'elle est vraie au rang j . On a

$$-u_j(\omega) = \xi^{\delta-j} + \sum_{i=0}^{j-1} u_i(\omega) \xi^{i-j} + \xi \sum_{\ell=j+1}^{\delta-1} \xi^{\ell-j-1} u_\ell(\omega).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et l'expression de $|\xi|$, on obtient le résultat suivant

$$\log |u_j(\omega)| \leq -\frac{\lambda}{2} d(h+d).$$

Puis le lemme 4 montre que u_j et P^s ont un facteur commun, c'est-à-dire que $P(\omega)$ divise $u_j(\omega)$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$. D'où (2). Et en particulier,

$$e^{-\delta\lambda d(d+h)} \leq |\xi^\delta| \leq \sum_{j=0}^{\delta-1} |u_j(\omega)| |\xi|^{j-1} \leq \delta e^{-2\delta\lambda d(d+h)}.$$

Cette dernière inégalité est impossible. D'où le lemme.

3. Preuve du théorème.

L'application du théorème de Gel'fond ([4], III, p. 134) montre que α^β et α^{β^2} sont transcendants. On veut montrer que α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants. Supposons que ce ne soit pas le cas, le corps $\mathbb{Q}(\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2})$ a alors un degré de transcendance égal à 1. On peut alors écrire $\mathbb{Q}(\beta, \alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}) = \mathbb{Q}(\omega, \omega_1)$, où ω est transcendant et ω_1 entier sur $\mathbb{Z}[\omega]$, de degré m . Soit $v \in \mathbb{Z}[\omega]$ non nul tel que $v\alpha^\beta, v\alpha^{\beta^2}, v\alpha^{-\beta}, v\alpha^{-\beta^2}$ appartiennent à $\mathbb{Z}[\omega, \omega_1]$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que β est un entier algébrique et que $f(T)$ est majoré par $\log T$.

Soit T un entier suffisamment grand, et soit a_T donné par les hypothèses du

théorème, de dénominateur $\Delta \ll e^T$. On pose

$$f = f(T), \quad N_0 = [\exp(Tf/7)], \quad N_1 = [N_0^2 \log N_0],$$

et

$$L_N = [N^{1/2} f^{1/4}], \quad H_N = [N^{3/2} (\log N) f^{-3/4}], \quad P_N = \left[\frac{1}{4d_0 m} N^{3/2} f^{-3/4} \right],$$

pour $N_0 \leq N \leq N_1$.

1er pas. - On construit une fonction auxiliaire de la forme

$$F_N(z) = \sum_{0 \leq v_0, v_1, v_2 \leq N} \varphi(v_0, v_1, v_2) \exp((v_0 + v_1 \beta + v_2 \beta^2)z)$$

telle que

$$\log |F_N(z)| \ll -N^3 \log N \quad \text{pour } |z| \leq N^{3/2},$$

où les $\varphi(v)$ appartiennent à $\mathcal{Z}[\omega]$, sont premiers entre eux dans leur ensemble, et vérifient

$$\log \text{ht}(\varphi(v)) \ll H_N, \quad \deg \varphi(v) \ll NL_N.$$

Les étapes de cette construction sont les suivantes.

(i) On considère les nombres

$$\varphi(p, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_v \varphi(v) (v_0 + v_1 \beta + v_2 \beta^2)^{2p} \alpha^{\mu_0} \alpha^{\beta \mu_1} \alpha^{\beta^2 \mu_2},$$

pour $0 \leq \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 < L_N$, et où les μ_i sont les entiers définis par

$$\mu_0 + \mu_1 \beta + \mu_2 \beta^2 = (v_0 + v_1 \beta + v_2 \beta^2)(\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2).$$

Le lemme 1 permet de trouver des $\varphi_0(v)$ dans $\mathcal{Z}[\omega]$, pas trop gros, tels que les $\varphi(p, \lambda)$ soient nuls. Si les $\varphi_0(v)$ ne sont pas premiers entre eux dans leur ensemble, on divise chacun d'eux par leur p. g. c. d., d'où une famille de $\varphi(v)$, de p. g. c. d. égal à 1, qui annule les $\varphi(p, \lambda)$. Le lemme 2 permet de montrer que les φ vérifient les majorations ci-dessus.

(ii) Grâce aux hypothèses du théorème, et au choix des φ , les quantités

$$|F_N^{(p)}((\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \log \alpha) - \varphi(p, \lambda)|$$

sont très petites pour $0 \leq p < P_N$. Mais, par construction, les $\varphi(p, \lambda)$ sont nuls, et les $F_N^{(p)}((\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \log \alpha)$ sont donc très petits.

(iii) La formule d'interpolation d'Hermite permet enfin de majorer $|F_N(z)|$.

2e pas. - On montre qu'il existe un entier p_0 , $P_N \leq p_0 \ll P_N$, et un indice $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $0 \leq \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 < L_N$, tels que

$$-N^3 \log N \ll \log F_N^{(p_0)}((\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \log \alpha) \ll -N^3 \log N.$$

Si cette assertion était fautive, le lemme 3 montrerait que les $\varphi(v)$ sont tous très petits, le lemme 5 fournirait des facteurs primaires $q(v)$ de chaque $\varphi(v)$ tous très petits, du fait que les $\varphi(v)$ ont un p. g. c. d. trivial deux des $q(v)$ sont premiers eux mais ne vérifient pas le lemme 4 : contradiction.

Le même argument qu'en (ii) montre que le nombre $\varphi(p_0, \lambda)$ vérifie aussi

$$-N^3 \log N \ll \log \varphi(p_0, \lambda) \ll -N^3 \log N.$$

3e pas. - Un multiple convenable de $\varphi(p_0, \lambda)$, du type $\xi_N = (v\Delta)^{cNL_N} \varphi(p_0, \lambda)$, vérifie encore un encadrement analogue et ξ_N , ainsi que ses conjugués, est un polynôme en les conjugués des ω_1 et Δ_{a_T} au-dessus de $\mathbb{Q}(\omega)$ (de degré $\leq m$ et d_0 respectivement), à coefficients dans $\mathbb{Z}[\omega]$ de degré $\ll NL_N$ et tel que $\log ht \ll H_N$.

Grâce au lemme 6, on obtient un polynôme irréductible, $R_N(\omega)$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$ et un entier positif s , tels que R_N et $Q_N = R_N^{sN}$ vérifient

$$\begin{aligned} \deg Q_N &\ll NL_N, \quad \log ht Q_N \ll H_N, \\ -N^3(\log N) f^{1/4} &< \log |R_N(\omega)|, \quad \log |Q_N(\omega)| \ll -N^3 \log N. \end{aligned}$$

4e pas. - On applique le lemme 4 aux polynômes Q_N et Q_{N+1} pour $N_0 \leq N < N_1$. On en déduit $R_N = R_{N+1}$ et donc $R_{N_1} = R_{N_0}$. Ce qui implique

$$\begin{aligned} -\log |Q_{N_1}(\omega)| &= -s_{N_1} \log |R_{N_0}(\omega)| \ll N_1^{3/2} f^{1/4} N_0^3 (\log N_0) f^{1/4} \\ &\ll f^{1/2} N_1^3 (\log N_1)^{-1/2}, \end{aligned}$$

et contredit la borne supérieure de $\log |Q_{N_1}(\omega)|$ obtenu au troisième pas.

Cette contradiction achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWNAWELL (W. D.). - Gel'fond's method for algebraic independence, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).
- [2] BROWNAWELL (W. D.) and WALDSCHMIDT (M.). - The algebraic independence of certain numbers to algebraic powers (manuscrit non publié).
- [3] ČUDNOVSKIJ (G. V.). - Algebraic independence of some values of the exponential function [en russe] Mat. Zametki, t. 15, 1974, p. 661-672 ; [en anglais] Math. Notes, t. 15, 1974, p. 391-398.
- [4] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960.
- [5] TLJDEMAN (R.). - An auxiliary result in the theory of transcendental numbers, J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 80-94.

(Texte reçu le 21 avril 1975)

Maurice MIGNOTTE
 Université Louis Pasteur
 Centre de Calcul
 7 rue René Descartes
 67084 STRASBOURG