

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

ALAIN ESCASSUT

Synthèse harmonique ultramétrique. Théorie spectrale en analyse ultramétrique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975),
exp. n° 23, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYNTHÈSE HARMONIQUE ULTRAMÉTRIQUE
 THÉORIE SPECTRALE EN ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

par Alain ESCASSUT

1. Spectre et semi-normes spectrales.

Soit K un corps ultramétrique complet algébriquement clos. On notera k le corps résiduel de K ($k = A/\mathfrak{m}$), et $|K| = \{|x|; x \in K\}$. On dira que K est fortement valué si l'un au moins des ensembles k et $|K|$ est non dénombrable.

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une K -algèbre de Banach commutative unitaire.

La théorie spectrale classique concerne le spectre maximal $\text{Max}(A)$ d'une \mathbb{C} -algèbre de Banach [1], qui est en bijection avec l'ensemble $X(A)$ des caractères de A , et avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues, car toute semi-norme multiplicative continue de A est de la forme $|\chi|$ où $\chi \in X(A)$.

En algèbre de Banach ultramétrique il n'en est pas de même : d'une part tout idéal maximal n'est pas de codimension 1, et d'autre part les semi-normes multiplicatives continues n'ont pas toutes pour noyau un idéal maximal.

L'absence de topologie "sympathique" sur $\text{Max}(A)$ conduit à introduire l'ensemble $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|\cdot\|$, et on notera $\text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)$ les $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\ker \varphi \in \text{Max}(A)$.

2. Calcul fonctionnel holomorphe en analyse ultramétrique.

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une K -algèbre de Banach ultramétrique, soit $x \in A$, et soit $D = s(x)$. Soit $h \in K(D)$ (algèbre des fractions rationnelles sans pôle dans D), et soit $h(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, où $(P, Q) = 1$. Alors $Q(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in D$, et par suite $Q(x)$ est un élément inversible de A (en effet, si $Q(x)$ n'est pas inversible, il existe un homomorphisme χ de A sur une extension E de K tel que

$$\chi(Q(x)) = 0;$$

or $\chi(Q(x)) = Q(\chi(x))$, donc $\chi(x)$ est algébrique sur K , donc $\chi(x) \in K$, donc $\chi(x) \in D$, ce qui est absurde puisque $Q(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in D$).

Il existe donc un homomorphisme unifère canonique unique θ_x tel que $\theta_x(X) = x$, défini par $\theta_x(h) = P(x) Q(x)^{-1}$, où $h(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$.

Pour résoudre certains problèmes de synthèse harmonique, on doit chercher une norme $\|\cdot\|_{\rho}$ définie sur $K(D)$ qui rende θ_x continue, et permette son prolongement à l'algèbre de Banach $H(D, \rho)$ complétée de $K(D)$ pour cette norme, de sorte que l'on retrouve dans A des propriétés bien connues de $H(D, \rho)$.

Par exemple, si l'on note dans A , $\|x\|_s = \sup |\lambda|$, et si l'on note dans $K(D)$, $\|h\|_D = \sup_{\lambda \in D} |h(\lambda)|$, $\lambda \in s(x)$, il est clair que $\|h\|_D = \|h(x)\|_s$ de sorte que si la semi-norme $\|\cdot\|_s$ de A est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|$ d'algèbre de Banach de A , \mathcal{O}_x est trivialement continu quand on munit $K(D)$ de la norme $\|\cdot\|_D$ et, dans ce cas, \mathcal{O}_x se prolonge à l'algèbre de Krasner $H(D)$.

Dans le cas général, nous utiliserons un procédé dont un aspect simplifié peut être résumé de la façon suivante :

Soit $\alpha \in D$, et soit V le disque circonferencié $d(\alpha, \|x\|)$. Si a et b appartiennent à $V - D$ et si $|a - b| < 1/\|(x - a)^{-1}\|$, on remarque, grâce à la propriété ultramétrique de la norme de A , que $\|(x - b)^{-1}\| = \|(x - a)^{-1}\|$.

On peut donc définir une partition \mathcal{P} de $V - D$ dont les classes $T(a)$ sont les disques non circonferenciés $\delta(a, 1/\|(x - a)^{-1}\|)$: on a bien $T(b) = T(a)$, $\forall b \in T(a)$.

Considérons maintenant la décomposition de $h \in K(D)$ sous la forme $h = h_0 + \sum h_i$, où h_0 est une série de Taylor convergeant dans V , et où h_i est une série de la forme $\sum_{n \geq 1} \lambda_{i,n} / (x - a_i)^n$ qui converge pour $|x - a_i| \geq 1/\|(x - a_i)^{-1}\|$.

Alors, grâce au théorème de Mittag-Leffler [8] en analyse ultramétrique, on définit sur $K(D)$ une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ associée à la partition \mathcal{P} par

$$\|h\|_{\mathcal{P}} = \sup(\|h\|_V, \|h_i\|),$$

où $\|h_i\| = \sup_n |\lambda_{i,n}| \|(x - a_i)^{-1}\|^n$ et l'algèbre $H(D, \mathcal{P})$ complétée de $K(D)$ pour cette norme possède les propriétés cherchées.

Remarque. - Pour obtenir des résultats plus fins, on peut construire une algèbre de "germes" $\mathcal{O}_{A,x}(D)$ obtenue comme limite projective des algèbres $H(D, \varphi)$, où φ est une partition de $V - D$ dont toutes les classes sont celles de \mathcal{P} sauf un nombre fini, qui sont plus grandes. L'algèbre de germes ainsi construite dépend de l'élément x considéré.

Les procédés de calcul fonctionnel holomorphe permettent d'obtenir les deux résultats qui suivent.

Soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique, et soit ψ_A l'application de $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ dans $\text{Max}(A)$ définie par $\varphi \rightarrow \text{Ker } \varphi$. Il résulte de la proposition 1 que ψ est surjective.

Définition. - Nous dirons que A est ψ -injective si ψ_A est une bijection.

THÉOREME. - Si K est fortement valué, toute K -algèbre de Banach A est ψ -injective.

Si K n'est pas fortement valué, on sait qu'il existe des algèbres $H(D)$ qui ne sont pas ψ -injectives [4].

Notation : Pour tout idéal \mathfrak{J} d'une K -algèbre A , on notera $h(\mathfrak{J})$ l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant \mathfrak{J} .

PROPOSITION. - Supposons K fortement valué, et soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique.

Soit F un fermé de $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$, et soit $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ tel que

$$h(\text{Ker}(\varphi)) = F.$$

Alors φ appartient à l'adhérence de F dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$.

COROLLAIRE. - Si un idéal premier \mathfrak{p} de A est le noyau d'un élément

$$\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$$

et si $h(\mathfrak{p})$ se réduit à un seul élément \mathfrak{M} , alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}$.

3. Synthèse harmonique.

Considérons une \mathbb{C} -algèbre de Banach. On dit que A est régulière si l'application

$$\begin{array}{l} \chi \longrightarrow \text{Ker } \chi \\ \text{de } X(A) \text{ dans } \text{Max}(A) \end{array}$$

est un homéomorphisme quand on munit $X(A)$ de la topologie de la convergence simple, et $\text{Max}(A)$ de la topologie de Jacobson.

Cette définition n'aurait plus de sens en analyse ultramétrique puisque certains idéaux peuvent être de codimension infinie.

Mais on peut remarquer que, dans une \mathbb{C} -algèbre de Banach, l'application

$$\begin{array}{l} \chi \longrightarrow |\chi| \\ \text{de } X(A) \text{ dans } \text{Mult}(A, \|\cdot\|) \end{array}$$

est homéomorphe pour la topologie de la convergence simple dans ces deux ensembles de sorte que A est régulière si, et seulement si, l'application

$$\begin{array}{l} \psi_A : \varphi \longrightarrow \text{Ker } \varphi \\ \text{de } \text{Mult}(A, \|\cdot\|) \text{ dans } \text{Max } A \end{array}$$

est un homéomorphisme.

C'est cette dernière définition que nous allons prolonger en algèbre de Banach non archimédienne.

Définition. - Nous disons qu'une K -algèbre de Banach A est régulière si l'application ψ_A est fermée.

Notations. - Soit A une K -algèbre commutative unitaire, et soit $x \in A$. On notera $\sigma(x)$ l'adhérence dans $\text{Max}(A)$ (pour la topologie de Jacobson) de l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \text{Max}(A)$ tels que $x \notin \mathfrak{M}$.

Soit \mathfrak{J} un idéal de A . On notera $h(\mathfrak{J})$ l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \text{Max}(A)$ tels que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{M}$.

Soit $E \subset \text{Max}(A)$. On notera $I(E) = \bigcap \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \in E$, et on notera $f(E)$ l'idéal

des $x \in A$ tels que $\sigma(x) \cap E = \emptyset$.

La proposition 1 est une conséquence immédiate des propriétés classiques en algèbre commutative, et on en déduit la proposition 2 en considérant l'adhérence de $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ dans $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 1. - Soit A une K -algèbre commutative unitaire dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle, et soit $x \in A$ tel que $\sigma(x) \cap h(\mathfrak{J}) = \emptyset$. Alors $x \in \mathfrak{J}$.

COROLLAIRE. - Soit A une K -algèbre commutative unitaire dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle, et soient x et $y \in A$ tels que $\sigma(x)$ soit contenu dans l'ensemble des $\mathfrak{M} \in \text{Max } A$ tels que $y \notin \mathfrak{M}$. Alors x est multiple de y dans A .

Notations. - Soit $E \subset \text{Max}(A)$. On notera $f(E)$ l'idéal des $x \in A$ tels que $\sigma(x) \cap E = \emptyset$.

PROPOSITION 2. - Soit A une K -algèbre de Banach commutative unitaire régulière, ψ -injective, et dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle, et soit E un fermé de $\text{Max } A$. Alors l'ensemble des idéaux \mathfrak{J} de A tels que $h(\mathfrak{J}) = E$ admet $I(E)$ pour plus grand élément, et $f(E)$ pour plus petit élément.

On sait que dans une algèbre de Banach complexe régulière, sans radical, qui vérifie la condition de Ditkin, on peut établir la relation $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$ pour les idéaux fermés \mathfrak{J} tels que toute partie fermée de la frontière de $h(\mathfrak{J})$ possède des points isolés.

Nous obtenons ici cette relation sous des hypothèses beaucoup plus générales. Seule la condition de Ditkin, que nous allons rappeler, joue un rôle essentiel.

Définition. - Nous dirons qu'une K -algèbre de Banach commutative unitaire régulière vérifie la condition de Ditkin si, $\forall \mathfrak{M}_0 \in \text{Max}(A)$ et $\forall x \in A$, il existe une suite u_n de A et une suite de voisinages V_n de \mathfrak{M}_0 telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x u_n = x \text{ et } u_n \in \mathfrak{M}, \quad \forall \mathfrak{M} \in V_n.$$

Nous pouvons maintenant conclure.

THÉORÈME. - Soit A une K -algèbre de Banach commutative unitaire dont l'intersection des idéaux maximaux est nulle et qui vérifie la condition de Ditkin. Alors, pour tout idéal fermé \mathfrak{J} , on a $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$.

Le théorème est immédiat, à partir de la proposition 2, si $h(\mathfrak{J})$ est fini. Dans le cas où $h(\mathfrak{J})$ est dénombrable, la déduction à partir du cas fini est aisée. Si $h(\mathfrak{J})$ est quelconque, on doit considérer une limite dans A suivant le filtre du complémentaire des parties finies de $\text{Max}(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). - *Éléments de mathématiques. Théorie spectrale.* - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. ind., 1332 ; Bourbaki, 32).
- [2] ESCASSUT (A.). - *Algèbres de Banach ultramétriques et algèbre de Krasner-Tate*, Astérisque n° 10, 1973, p. 1-107.
- [3] ESCASSUT (A.). - *Propriétés spectrales en analyse non archimédienne*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 1387-1389.
- [4] ESCASSUT (A.). - *Spectre maximal d'une algèbre de Krasner* (à paraître).
- [5] GARANDEL (G.). - *Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner*, *Indagationes Mathematicae*, 1975 (à paraître).
- [6] GUENNEBAUD (B.). - *Algèbres localement convexes sur les corps valués*, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.
- [7] GUENNEBAUD (B.). - *Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques*, Thèse Sc. math. Poitiers, 1973.
- [8] ROBBA (P.). - *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-220.

(Texte reçu le 26 mai 1975)

Alain ESCASSUT
M-11 G' Résidence Compostelle
33600 PESSAC
