Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

HENRI CHAIX

Points extrémaux d'un convexe compact de Rn appartenant à un réseau

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° 26, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 26, 9 p.
9 juin 1975

POINTS EXTRÉMAUX D'UN CONVEXE COMPACT DE $\mathbb{R}^n$ APPARTENANT À UN RÉSEAU

par Henri CHAIX

Introduction.

Etant donné, dans $\mathbb{R}^2$, un arc de courbe défini par une fonction différentiable, strictement convexe sur un segment $[a , b]$, de longueur L , on a le résultat classique suivant :

"Le nombre des points entiers sur l'arc de courbe est, à une constante près, majoré par $L^{2/3}$ ".

L'objet de cet article est de donner une généralisation de ce résultat dans $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME. - *Soit* $\mathcal{C}$ *un domaine convexe et compact de* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ *de volume* V *strictement positif* ; *soit* $\mathcal{R}$ *un réseau de points de* $\mathbb{R}^n$ *de volume fondamental* 1 ; *si* N *est le nombre de points extrémaux de* $\mathcal{C}$ *appartenant au réseau* $\mathcal{R}$, *et si ces points n'appartiennent pas à un même hyperplan, il existe une constante universelle positive* K_n *telle que*

$$N \leq K_n \, V^{(n-1)/(n+1)} \quad (1)$$

REMARQUE 1. - *Les hypothèses du théorème étant conservées, si on note* S *l'aire de la frontière de* $\mathcal{C}$, *il existe une constante* K'_n *telle que* :

$$N \leq K'_n \, S^{n/(n+1)} \quad (2)$$

Ce résultat est la conséquence immédiate de l'inégalité isopérimétrique et du théorème énoncé. Toutefois, on remarquera que la démonstration de celui-ci donne directement la majoration de N en fonction de l'aire S et un meilleur majorant de la constante K'_n .

REMARQUE 2. - *L'exposant* $(n - 1)/(n + 1)$ *de* V *ne peut être amélioré, et* K_n *admet un minorant strictement positif*.

Soient P_1 le "paraboloïde" défini par : $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq x_n \leq r^2$, et P_2 le paraboloïde symétrique de P_1 par rapport à l'hyperplan $(x_n = r^2)$; le domaine $P = P_1 \cup P_2$ est compact et strictement convexe.

Prenons pour réseau $\mathbb{Z}^n$, le réseau des points entiers de $\mathbb{R}^n$. Tous les points frontières de P sont extrémaux. Le nombre N_P de points entiers de la frontière de P est alors donné par le nombre de points entiers de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenus dans la boule $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq r^2$; ce nombre est équivalent au volume de cette boule.

Un rapide calcul montre que, pour V_P assez grand,

$$N_P \geqslant \frac{2(((n+1)/4)\pi)^{(n-1)/(n+1)}}{(\Gamma((n+1)/2))^{2/(n+1)}} V_P^{(n-1)/(n+1)} .$$

D'où une minoration de K_n , et le résultat.

REMARQUE 3. - <u>Ce théorème permet de majorer en fonction de</u> V , <u>ou de</u> S , <u>le nombre de points d'un réseau sur une hypersurface de</u> $\underset{\sim}{R}^n$ <u>si celle-ci est frontière d'un domaine strictement convexe et compact</u>.

<u>Pour</u> $n = 2$, <u>on retrouve le résultat connu, mais il est obtenu ici, à l'aide d'une nouvelle démonstration</u>.

La démonstration du théorème et la remarque 2 fournissent les inégalités suivantes :

$$(3) \quad K'_n < \left(2^{n^2-n-1}(C_{2n-3}^{n-1})^{n(n-1)}(n-1)^{(n(n-1)/2)+2}((n-1)!)^{n^2-1} \frac{\Gamma^2((n-1)/2)}{\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(n/2)}\right)^{1/n+1}$$

$$(4) \qquad \left(\frac{(n+1)^{n-1}\,\pi^{n-1}}{2^{n-3}\,\Gamma^2((n+1)/2)}\right)^{1/(n+1)} < K_n < (2^n\, n^n (n!)^{n-1})^{1/(n+1)}\, K'_n .$$

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on trouve :

$$K'_2 < 2 \;, \quad 2 < K_2 < 6$$
$$K'_3 < 58 \;, \quad 3 < K_3 < 537 .$$

<u>"Encubage" d'un domaine</u> $\mathcal{C}$. - Le domaine $\mathcal{C}$ de $\underset{\sim}{R}^n$ sera dit <u>"encubé"</u> s'il existe un cube $\mathcal{K}$ de dimension n tel que :

1° Les $(n-1)$-faces de $\mathcal{K}$ sont des hyperplans d'appui de $\mathcal{C}$,

2° Il existe deux $(n-1)$-faces opposées de $\mathcal{K}$ notées k et k' telles que :

(α) il existe deux points de contact μ_1 (resp. μ'_1) de $\mathcal{C}$ avec k (resp. k') tels que la droite $\mu_1 \mu'_1$ soit orthogonale à l'hyperplan de k .

(β) $\mathcal{C}_1$ étant la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur l'hyperplan de k :

si $n > 2$, $\mathcal{C}_1$ est encubé dans k .

si $n = 2$, $\mathcal{C}_1 = k$.

LEMME 1. - <u>Un domaine</u> $\mathcal{C}$ <u>de</u> $\underset{\sim}{R}^n$ <u>compact et convexe étant donné, il existe une transformation</u> $\mathcal{T}$ <u>de</u> $\underset{\sim}{R}^n$ <u>affine, de déterminant</u> 1 , <u>telle que</u> $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ <u>soit encubé</u>.

1° On construit deux hyperplans d'appui de $\mathcal{C}$, H_1 et H'_1 parallèles, touchant $\mathcal{C}$ en μ_1 et μ'_1 .

Considérons alors deux nouveaux hyperplans d'appui de $\mathcal{C}$, H_2 et H'_2 parallèles entre eux et parallèles à $\mu_1 \mu'_1$, touchant $\mathcal{C}$ en μ_2 et μ'_2 .

On construit de la même façon H_3 et H'_3, parallèles entre eux et parallèles à $\mu_1\mu'_1$ et $\mu_2\mu'_2$, hyperplans d'appui de $\mathcal{C}$ dont les points de contact sont μ_3 et μ'_3, ... Et ainsi de suite jusqu'à la construction de H_n et H'_n (parallèles entre eux et parallèles à $\mu_1\mu'_1, \dots, \mu_{n-1}\mu'_{n-1}$) hyperplans d'appui de $\mathcal{C}$ dont les points de contact sont μ_n et μ'_n.

Le domaine délimité par ces hyperplans d'appui de $\mathcal{C}$ est un "hyperparallélépipède" de $\underset{\sim}{R}^n$.

2° Soit $\mathcal{G}$ une des transformations affines de $\underset{\sim}{R}^n$ de déterminant 1, transformant l'"hyperparallélépipède" en un hypercube $\mathcal{K}$.

On constate que $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ est encubé dans $\mathcal{K}$.

LEMME 2. - Soit $\mathcal{C}$ un domaine encubé, compact et convexe de $\underset{\sim}{R}^n$, de volume V, dont la frontière est une hypersurface d'aire S :

$$S \leq 2n(n!)^{(n-1)/n}\, V^{(n-1)/n} \tag{5}$$

$$V \geq a^n/n! \,. \tag{6}$$

La démonstration se fait par récurrence.

Si $n = 2$: Appelons ϖ le périmètre de la frontière du domaine, σ la surface du domaine, et a le côté du carré. On a :

$$\varpi \leq 4a \quad \text{et} \quad \sigma \geq a^2/2 \,,$$

ce qui entraîne que $\varpi \leq 4\sqrt{2}\,\sigma^{1/2}$.

Si $n \neq 2$ (Nous utiliserons les mêmes notations que dans la définition de l'encubage, a sera le côté de l'hypercube $\mathcal{K}$) : Supposons alors que $\mathcal{C}_1$, projection de $\mathcal{C}$ sur k, vérifie l'hypothèse de récurrence :

$$v_{\mathcal{C}_1} \geq a^{n-1}/(n-1)! \,. \tag{7}$$

S étant l'aire de la frontière de $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ étant convexe :

$$S \leq 2na^{n-1} \,. \tag{8}$$

En coupant $\mathcal{C}$ par des parallèles à $\mu_1\mu'_1$, on remarque que ces droites déterminent dans $\mathcal{C}$ des segments de longueurs supérieures à celles des segments obtenus dans la pyramide de sommet μ'_1 et de base $\mathcal{C}_1$. D'où :

$$V \geq \frac{1}{n}\, a v_{\mathcal{C}_1} \,. \tag{9}$$

Les formules (7), (8) et (9) fournissent le résultat énoncé.

LEMME 3. - $\mathcal{C}$ étant un domaine compact et convexe de $\underset{\sim}{R}^n$, il existe deux ellipsoïdes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ homothétiques dans un rapport ρ_n (ne dépendant que de n) tels que : $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$.

On obtient pour ρ_n les majorations suivantes :

$$\rho_2 \leqslant 4\sqrt{2}$$

$$\rho_3 \leqslant 24\sqrt{3}$$

$$\rho_n \leqslant n!\, C_{2n-1}^{n} \sqrt{n} \qquad (\text{si } n \geqslant 4)\,.$$

On remarque immédiatement que $\rho_1 = 1$.

Grâce au lemme 1, il suffit de démontrer que si $\mathcal{C}$ est encubée dans $\mathcal{K}$ de côté a, il existe deux boules fermées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ dont les rayons sont dans un rapport ρ_n et telles que :

$$\mathcal{B}' \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\,.$$

On remarque immédiatement que la sphère circonscrite au cube $\mathcal{K}$ de rayon $(\sqrt{n}/2)a$ fournit une boule $\mathcal{B}$.

D'autre part, E l'enveloppe convexe des points $\mu_1, \mu_1', \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_n'$ est contenue dans $\mathcal{C}$, et son volume $V(E)$ vérifie la formule (6). De plus, E est un ensemble de $\underset{\sim}{R}^n$ recouvert par C_{2n-1}^{n} n-simplexes.

En effet, soit μ un point extrémal quelconque de E, chaque point M de E appartient à un n-simplexe formé par μ et n autres points extrémaux de E.

Par suite, l'un au moins de ces n-simplexes, noté T, a un volume V_T vérifiant

$$V_T \geqslant (1/C_{2n-1}^{n})(a^n/n!)\,. \tag{11}$$

Si r est le rayon de la boule $\mathcal{B}'$ inscrite dans T, donc incluse dans $\mathcal{C}$: $V_T = (1/n) r S_T$.

Mais S_T est majoré par $2na^{n-1}$ ("aire" du cube $\mathcal{K}$). Ceci montre que :

$$r \geqslant a/(2n!\, C_{2n-1}^{n})\,.$$

D'où une majoration du rapport ρ_n d'homothétie entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On remarque que si $n = 2$, E est recouvert par deux triangles, et si $n = 3$, E est recouvert par quatre tétraèdres au plus. Ce qui permet d'améliorer ρ_2 et ρ_3.

LEMME 4. – $\mathcal{C}$ <u>étant un domaine convexe et compact de $\underset{\sim}{R}^n$, soit $\mathcal{S}$ la frontière de $\mathcal{C}$, hypersurface bornée, orientable, de courbure totale γ (que l'on peut supposer positive)</u> :

$\int_{\mathcal{S}} \gamma^{1/(n+1)}\, d\sigma$ <u>est une intégrale invariante par transformation affine de déterminant</u> 1.

<u>Remarque</u> : Le résultat est encore valable si $\mathcal{S}$ est une partie de la frontière de $\mathcal{C}$.

Soit f une carte de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une application différentiable, injective de rang $(n-1)$ d'un ouvert U de $\underset{\sim}{R}^{n-1}$ dans $\underset{\sim}{R}^n$.

$$f \; : \; x \in U \longrightarrow p = f(x) \in \underset{\sim}{R}^n \; .$$

(On suppose que la classe de différentiabilité de f est suffisamment élevée de sorte que les calculs, qui suivent, aient un sens.) Les notations seront celles utilisées par J. BREUNEVAL (*).

Si G est la matrice de la première forme quadratique fondamentale :

$$ds^2 = \overline{dp}.dp = \overline{dx}\; G\; dx \quad \text{avec} \quad G = (\overline{\partial p/\partial x})(\partial p/\partial x) \; .$$

Si on note

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix},$$

l'hyperplan tangent en p à $\mathbb{S}$ est déterminé par les vecteurs

$$(\partial p/\partial x^1) \; , \; (\partial p/\partial x^2) \; , \ldots , \; (\partial p/\partial x^{n-1}) \; .$$

Le vecteur $(\partial p/\partial x^1) \wedge \ldots \wedge (\partial p/\partial x^{n-1})$ (produit vectoriel dans $\underset{\sim}{R}^n$) est normal à la surface $\mathbb{S}$, sa norme est $\sqrt{\det G}$. Donc

$$\nu = 1/(\sqrt{\det G})\left(\frac{\partial p}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial p}{\partial x^2} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial p}{\partial x^{n-1}}\right)$$

est unitaire et normal à $\mathbb{S}$ en p .

Soit F la matrice de la deuxième forme quadratique fondamentale :

$$F = - (\overline{\partial p}/\partial x)(\partial \nu/\partial x) \; .$$

D étant la matrice d'éléments

$$D_{ij} = \det \left((\partial p/\partial x^1) \; , \ldots , \; (\partial p/\partial x^{n-1}) \; , \; (\partial^2 p/\partial x^i \, \partial x^j) \right) \; ,$$

le calcul de F montre que

$$\sqrt{\det G}\; F = D \; .$$

La courbure totale γ est le produit des valeurs propres de l'opérateur de courbure C tel que $d\nu + C dp = 0$. Mais dans la base naturelle

$$\{(\partial p/\partial x^1) \; , \ldots , \; (\partial p/\partial x^{n-1})\}$$

de l'hyperplan tangent en p à $\mathbb{S}$, C est représenté par $G^{-1} F$, donc :

$$\gamma = \det C = \det(G^{-1} F) \; ,$$

d'où :

$$\gamma = \frac{\det D}{(\det G)^{(n+1)/2}} \; .$$

Si, de plus, on suppose que le paramétrage de $\mathbb{S}$ est tel que ν soit orienté vers l'intérieur de $\mathcal{C}$, la courbure totale γ sera positive à cause de la convexité de $\mathcal{C}$.

(*) BREUNEVAL (Jacques). - Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques, Thèse Sc. math. Univ. Provence, Marseille 1972 (Pages 5 à 12).

Etant donné que $d\sigma = \sqrt{\det G}\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^{n-1}$, on obtient :

(12) $$\int_{\mathbb{S}} \gamma^{1/(n+1)}\, d\sigma = \int_U (\det D)^{1/(n+1)}\, dx^1 \ldots dx^{n-1} .$$

Si on transforme alors $\mathbb{S}$ par une transformation affine $\mathcal{T}$, de déterminant 1 , les quantités D_{ij} se conservent, le déterminant D aussi, et donc l'intégrale considérée est invariante.

Démonstration du théorème.

1° Le polytope $\mathcal{P}$: Si A_1 , A_2 ,..., A_N sont les points extrémaux de $\mathcal{C}$ appartenant au réseau $\mathcal{R}$, l'enveloppe convexe $\mathcal{P}$ de $\{A_1 , A_2 ,\ldots, A_N\}$ est un polytope (polyèdre borné) contenu dans $\mathcal{C}$. Les points A_1 , ... , A_N sont encore points extrémaux de $\mathcal{P}$. Le volume de $\mathcal{P}$ n'est pas nul car A_1 , ... , A_N sont supposés n'appartenant pas à un même hyperplan, $\mathcal{P}$ est donc de dimension n . Comme le volume de $\mathcal{P}$ est majoré par celui de $\mathcal{C}$, il suffit de démontrer le théorème pour le domaine $\mathcal{P}$.

2° "Encubage" de $\mathcal{P}$: Le théorème à démontrer étant invariant par les transformations affines de déterminant 1 , il est loisible de supposer $\mathcal{P}$ "encubé". En effet, la démonstration conduira à limiter N en fonction de l'aire de $\mathcal{P}$, et le lemme 2 permettra de passer au volume de $\mathcal{P}$.

3° Les hyperplans H_A : Etant donné un point extrémal A de $\mathcal{P}$, soient p_i les milieux des 1-faces de $\mathcal{P}$ contenant A , et ε_A l'enveloppe convexe des p_i . On remarque que ε_A est un convexe de dimension au moins $n-1$ et que A n'appartient pas à ε_A . Comme ε_A est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (famille que nous prendrons minimale), on peut trouver un tel demi-espace ne contenant pas A . H_A sera la frontière de ce demi-espace. L'hyperplan H_A sépare A de tous les autres points extrémaux de $\mathcal{P}$, ainsi que des milieux de toutes les 1-faces de $\mathcal{P}$.

4° Les "pyramides" π_A : L'intersection de $\mathcal{P}$ et du demi-cercle fermé H_A^+ (contenant A et limité par H_A) est une "pyramide" π_A . Comme H est le plan d'une $(n-1)$-face de ε_A (la famille dont est extraite H_A étant minimale), on peut trouver n points p_i affinement indépendants dans H_A . π_A contient donc un n-simplexe dont les sommets appartiennent au réseau $\mathcal{R}'$ déduit de $\mathcal{R}$ par l'homothétie $(A , 1/2)$, réseau dont le volume fondamental est 2^{-n} . On trouve donc pour le volume $V(\pi_A)$ de la pyramide :

(13) $$V(\pi_A) \geq 1/(n!2^n) .$$

D'autre part, soit $S(\pi_A)$ la "surface latérale" de π_A , aire de l'intersection de H_A^+ et de la frontière de $\mathcal{P}$. Etant donné que H_A sépare π_A des autres pyramides π_{A_i} , on a l'inégalité :

(14) $$\sum_{\ell=1,\ldots,N} S(\pi_{A_\ell}) \leq S(\mathcal{P}) .$$

5° Les cônes de Γ_A : D'après le lemme 3, il existe dans H_A deux ellipsoïdes $\mathcal{E}'_A$ et $\mathcal{E}_A$ homothétiques dans le rapport ρ_{n-1} et tels que :

$$\mathcal{E}'_A \subset (H_A \cap \mathcal{P}) \subset \mathcal{E}_A .$$

Γ_A sera le cône de sommet A et de base $\mathcal{E}_A$. Chaque cône Γ_A contient $\mathcal{P}$.

Si on note $\Gamma_A^+ = \Gamma_A \cap H_A^+$, on a :

(15) $$V(\Gamma_A^+) \geq V(\pi_A) .$$

6° Les calottes paraboliques τ_A : Soit $\mathcal{F}_A$ la frontière de $\mathcal{E}_A$ dans H_A. Considérons le paraboloïde dont l'hypersurface est tangente à la frontière du cône Γ_A le long de $\mathcal{F}_A$. τ_A sera l'intersection de cette hypersurface avec l'intérieur de H_A^+. On notera que τ_A est incluse dans Γ_A. L'homothétie qui transforme $\mathcal{E}_A$ en $\mathcal{E}'_A$, transforme τ_A en une calotte τ'_A contenue dans π_A. Il en résulte que $S(\tau'_A) < S(\pi_A)$ et donc :

(16) $$S(\tau_A) < (\rho_{n-1})^{n-1} S(\pi_A) .$$

7° Les indicatrices ω_A : Soit ω l'hypersphère unité de $\underset{\sim}{R}^n$. ω_A sera l'incatrice sur ω de τ_A , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités des rayons de ω parallèles aux normales à τ_A orientées vers l'intérieur (par exemple) du paraboloïde définissant τ_A.

Si A et A' sont deux points extrémaux,

(17) $$\omega_A \cap \omega_{A'} = \emptyset .$$

En effet, soit m appartenant à ω_A , il lui correspond un point M de τ_A. Comme τ_A est incluse dans Γ_A , l'hyperplan W , tangent en M à τ_A , coupe tous les segments de génératrices de Γ_A déterminés par H_A^+ , donc en particulier ceux qui appartiennent à π_A. L'hyperplan W sépare ainsi A de tous les autres points extrémaux de $\mathcal{P}$.

Si on a également m appartenant à $\omega_{A'}$, on trouvera un second hyperplan W' , parallèle à W et séparant A' de tous les autres points extrémaux. De plus, m définit une même direction orientée, orthogonale à W comme à W' , définissant les demi-espaces devant contenir A et A' , ce qui est absurde.

En conclusion,

(18) $$\Sigma_{\ell=1,\dots,N}\, S(\omega_{A_\ell}) \leq S(\omega) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} .$$

Remarque : Si on note $m = \varphi(M)$ et $\tau = \bigcup_{\ell=1}^{N} \tau_{A_\ell}$, on définit une application injective

$$\varphi : \tau \longrightarrow \omega .$$

φ étant de degré 1 , comme $\int_\tau \gamma d\sigma$ est un invariant topologique, on a :

(19) $$\int_\tau \gamma d\sigma = \int_{\varphi(\tau)} d\omega \leq \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$ (en utilisant (17) et (18)).

8° Calcul de l'intégrale $I_A = \int_{\tau_A} \gamma^{1/(n+1)} d\sigma$: Soit $\mathcal{T}'_A$ une transformation affine de H_A de déterminant 1, transformant $\mathcal{E}_A$ en une boule fermée de H_A de centre α et de rayon r.

Soit $\mathcal{T}_A$ la transformation affine de $\underset{\sim}{R}^n$, prolongement de $\mathcal{T}'_A$, telle que la droite joignant A et son transformé $\hat{A}$ soit parallèle à H_A et que $\hat{A}$ se projette orthogonalement sur H_A en α. On notera $2h$ la distance de A à H_A.

La transformation $\mathcal{T}_A$ de $\underset{\sim}{R}^n$ est de déterminant 1 ; elle transforme la calotte τ_A et le cône Γ_A, en une calotte $\hat{\tau}_A$ et en un cône $\hat{\Gamma}_A$ de révolution autour de la droite $\alpha\hat{A}$. Dans ces conditions, on a

$$S(\mathcal{E}_A) = S(\mathcal{T}'_A(\mathcal{E}_A)) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{(n-1)\Gamma((n-1)/2)} r^{n-1},$$

et

$$(20) \qquad V(\Gamma_A^+) = \frac{1}{n}(2h)\, S(\mathcal{E}_A) = \frac{4\pi^{(n-1)/2}}{n(n-1)\,\Gamma((n-1)/2)} hr^{n-1}.$$

Soient U l'ouvert de $\underset{\sim}{R}^{n-1}$ tel que $(x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 < r^2$, et f_A la carte de l'hypersurface $\hat{\tau}_A$ tels que :

$$p = f_A(x) = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ (h/r^2)((x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2) \end{bmatrix}.$$

Les notations étant celles utilisées au lemme 4, on en déduit :

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2h/r^2 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et donc,} \quad \det D = (2h/r^2)^{n-1}.$$

Le lemme 4 et la relation (12) montrent alors que :

$$(21) \qquad I_A = \int_{\hat{\tau}_A} \gamma^{1/(n+1)} d\sigma = \int_U (2h/r^2)^{(n-1)/(n+1)} dx^1 \dots dx^{n-1} = \frac{2^{2n/(n+1)}\, \pi^{(n-1)/2}\, (hr^{n-1})^{(n-1)/(n+1)}}{(n-1)\Gamma((n-1)/2)}.$$

En utilisant les relations (13), (15) et (20), on obtient la formule (23) en posant :

$$(22) \qquad \lambda_n = (2^n(n-1)!)^{(n-1)/(n+1)} \left(\frac{(n-1)\Gamma((n-1)/2)}{2\pi^{(n-1)/2}}\right)^{2/(n+1)}.$$

$$(23) \qquad I_A \geq \lambda_n^{-1}.$$

9° Majoration de N : On déduit immédiatement de l'inégalité (23), que

$$(24) \qquad N \leq \lambda_n \sum_{\ell=1,\dots,N} I_{A_\ell}.$$

D'autre part, l'inégalité de Hölder montre que

$$(25) \qquad \int_\tau \gamma^{1/(n+1)} d\sigma \leq \left(\sum_{\ell=1,\dots,N} S(\tau_{A_\ell})\right)^{n/(n+1)} \left(\int_\tau \gamma d\sigma\right)^{1/(n+1)}.$$

En utilisant les formules (24), (25), (16), (14) et (19), on obtient le résultat suivant :

$$(26) \qquad N \leqslant \lambda_n (\rho_{n-1})^{(n-1)n/(n+1)} \, (2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2))^{1/(n+1)} \, S^{n/(n+1)} \, .$$

Il suffit alors de porter dans cette formule les majorants de ρ_{n-1} (10), λ_n (22) et S (5) pour obtenir les conclusions du théorème (inégalités (1), (2), (3), (4)).

(Texte reçu le 8 juillet 1975)

Henri CHAIX
Mathématiques
Université de Provence
Place Victor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 03