

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE MIGNOTTE

## Sur les facteurs premiers distincts d'entiers consécutifs

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 16, n° 2 (1974-1975),  
exp. n° G5, p. G1-G6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1974-1975\\_\\_16\\_2\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A8_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LES FACTEURS PREMIERS DISTINCTS  
D'ENTRIERS CONSÉCUTIFS

par Maurice MIGNOTTE

(d'après K. RAMACHANDRA, T. N. SHOREY et R. TIJDEMAN [2])

1. Introduction.

Soit  $n$  un entier naturel. S'il existe  $g$  nombres premiers distincts  $p_1, \dots, p_g$  divisant respectivement  $n+1, \dots, n+g$ , on dira que la propriété  $G(n, g)$  a lieu.

On cherche à minorer  $g(n)$ , le plus grand entier  $g$  tel que  $G(n, g)$  ait lieu. Pour l'histoire de cette question, nous renvoyons le lecteur à [2].

L'originalité du travail de RAMACHANDRA, SHOREY et TIJDEMAN est d'utiliser la méthode de Gel'fond-Baker aussi bien dans la partie combinatoire de la preuve que dans la partie analytique. Leur résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. - Pour  $n \geq 3$ , on a  $g(n) > c(\log n)^3 (\log \log n)^{-3}$ ,  $c$  constante positive.

2. Partie combinatoire.

Le lemme combinatoire suivant, dû à Philippe HALL, est très utile.

LEMME 1 [1]. - Une famille  $(E_i)_{i \in I}$  de sous-ensembles finis d'un ensemble  $E$  possède un système de représentants distincts si, et seulement si, pour tout sous-ensemble fini  $J$  de  $I$ , le cardinal de  $J$  est majoré par celui de l'ensemble  $\bigcup_{j \in J} E_j$ .

Le résultat ci-dessous repose essentiellement sur le lemme 1.

LEMME 2. - Soit  $g(n)$  défini comme plus haut. Alors on peut trouver un entier qui vérifie la propriété suivante

(i) Il existe des entiers positifs distincts, appartenant à l'intervalle

$$]n, n + g(n) + 1], n_0, n_1, \dots, n_t,$$

tels que

$$\omega\left(\prod_{j=0}^t n_j\right) \leq t \quad (\omega(m) = \text{nombre de facteurs premiers distincts de } m).$$

De plus, si  $t$  est minimal,

(ii) Tout diviseur premier de  $\prod_{j=0}^t n_j$  est majoré par  $g(n)$ ,

(iii)  $\omega(n_0 \dots n_t) = t$ .

Démonstration. - Dans l'énoncé du lemme 1, choisir  $I = \{n + 1, \dots, n + g(n) + 1\}$ , et, pour  $m$  parcourant  $I$ , prendre pour  $E_m$  l'ensemble des diviseurs premiers de  $m$ . Par définition de  $g(n)$ , on ne peut trouver des représentants distincts des  $E_m$ . D'où (i).

Supposons maintenant  $t$  minimal. Si  $p > g(n)$  divisait un certain  $n_j$  ( $p$  désigne un nombre premier), du fait que, pour  $i \neq j$ , on a  $|n_i - n_j| \leq g(n)$ ,  $p$  ne divise pas  $n_i$  pour  $i$  distinct de  $j$ . On aurait alors  $\omega(\prod_{0 \leq i \leq t, i \neq j} n_i) \leq t-1$ , ce qui contredit la minimalité de  $t$  (on ne peut avoir  $t = 1$  puisque les  $n_i$  sont au moins égaux à 2). Cette contradiction achève la démonstration de l'assertion (ii). La démonstration de (iii) est immédiate.

Dans la suite, on travaille sur un choix de  $t$ ,  $n_0, \dots, n_t$  tel que (i) et (ii) aient lieu. Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des  $r$  diviseurs premiers de  $n_0 \dots n_t$ . On définit une application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} = \{n_0, \dots, n_t\}, \quad \mathcal{P} = (p_1, \dots, p_t),$$

de sorte que  $v_p(f(p))$  soit maximal parmi les  $v_p(n_i)$ . Posons

$$\mathcal{N}_0 = \{m \in \mathcal{N}, m \notin f(\mathcal{P})\}, \quad N_0 = \text{Card } \mathcal{N}_0,$$

$$\mathcal{N}_1 = \{m \in \mathcal{N}, \exists p \text{ unique, } f(p) = m\}, \quad N_1 = \text{Card } \mathcal{N}_1,$$

$$\mathcal{N}_2 = \{m \in \mathcal{N}, \exists p, p' \text{ distincts, } f(p) = f(p') = m\}, \quad N_2 = \text{Card } \mathcal{N}_2.$$

Par construction,  $\text{Card } \mathcal{P} < \text{Card } \mathcal{N}$ , donc  $\mathcal{N}_0$  n'est pas vide.

Soit  $n^* = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$  un élément de  $\mathcal{N}_0$ . Des relations

$$p_j^{\alpha_j} | f(p_j), \quad |n^* - f(p_j)| \leq g(n)$$

résulte la majoration  $p_j^{\alpha_j} \leq g(n)$ . Donc  $n^* \leq g(n)^t$ . Ce qui implique

$$(1) \quad t \geq \log n / \log g(n).$$

En sens contraire, les majorations  $p_j \leq g(n)$  pour  $j = 1, \dots, t$  impliquent (théorie des nombres premiers) la majoration

$$(2) \quad t < \frac{2g(n)}{\log g(n)}$$

Notre but est d'améliorer la minoration (1) (lemmes 3 à 5).

LEMME 3. - Soient  $a_1, \dots, a_v$  des entiers positifs tels que  $\min_i a_i \geq A$  et  $\max_{1 \leq i \leq j \leq v} (a_i, a_j) \leq B$ . On a alors la minoration

$$[a_1, \dots, a_v] \geq \max_{1 \leq i \leq v} (A^i B^{-i(i-1)/2}).$$

Démonstration. - Elle se fait par récurrence sur  $v$ .

LEMME 4. - On a les minorations

$$(i) \quad t \geq \frac{(\log n)^2}{2(\log g(n))^2} \quad \text{si } N_0 > \frac{\log n}{\log g(n)};$$

$$(ii) \quad t \geq \frac{N_0 \log n}{2 \log g(n)} \quad \text{si} \quad N_0 \leq \frac{\log n}{\log g(n)} .$$

Démonstration. - Soit  $M_0$  le p. p. c. m. des éléments de  $\pi_0$ . On peut appliquer le lemme 3 avec  $A = n$ , et  $B = g(n)$  aux éléments de  $\pi_0$  :

$$M_0 \geq \max_{1 \leq i \leq N_0} (n^i g(n)^{-i(i-1)/2}) .$$

Supposons d'abord  $N_0 > \log n / \log g(n)$ , le choix de  $i = [\log n / \log g(n)] + 1$  conduit à la minoration

$$M_0 \geq \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\log n}{\log g(n)}\right)^2\right) , \quad \text{si} \quad N_0 > \frac{\log n}{\log g(n)} .$$

D'autre part, on a toujours (avec  $i = N_0$ )

$$M_0 \geq n^{N_0} g(n)^{-N_0(N_0-1)/2} ,$$

et donc

$$M_0 \geq \exp\left(\frac{1}{2} N_0 \log n\right) , \quad \text{si} \quad N_0 \leq \frac{\log n}{\log g(n)} .$$

Le lemme résulte alors de la majoration  $M_0 \leq g(n)^t$ , dont la démonstration est analogue à celle de la majoration de  $n^*$ .

COROLLAIRE. - Si  $t < ((\log n)^2) / (18(\log \log n)^2)$  et  $g(n) < (\log n)^3$ , on a

$$N_1 \geq t \left(1 - 12 \frac{\log \log n}{\log n}\right) .$$

Démonstration. - Les inégalités  $N_0 + N_1 + N_2 > t$  et  $N_1 + 2N_2 \leq t$  impliquent  $N_1 > t - 2N_0$ . La conclusion résulte alors de cette minoration de  $N_1$  et du fait que, sous les hypothèses du corollaire, on est nécessairement dans le cas (ii) du lemme 4.

Les éléments  $v$  de  $\pi_1$  sont de la forme  $v = m_v p_v^{L_v}$ , où

$$v = f(p_v) , \quad L_v = v_p(v) , \quad \text{et} \quad p_v \neq p_{v'} , \quad \text{si} \quad v \neq v' .$$

Soit  $\mu$  un réel vérifiant la condition :  $[N_1/2]$  des  $m_v$  vérifient  $m_v \geq e^\mu$  et les autres vérifient  $m_v \leq e^\mu$ . Nous utiliserons divers encadrements de  $\mu$ .

LEMME 5. - Si  $N_1 \geq 3\sqrt{t}$ , on a  $\mu \leq \sqrt{2t} \log g$ .

Démonstration. - Soit  $M_1$  le p. p. c. m. des  $m_v$  pour les  $[N_1/2]$  éléments de  $\pi_1$  tels que  $m_v \geq e^\mu$ . Le lemme 3 avec  $v = [N_1/2]$ ,  $a_j = m_j$ ,  $A = e^\mu$ ,  $B = g$ , fournit

$$M_1 \geq \max_{1 \leq i \leq [N_1/2]} e^{\mu i} g^{-i(i-1)/2} .$$

Le choix de  $i = [\sqrt{2t}] + 1$  conduit à l'inégalité

$$\mu \leq \sqrt{t/2} \log g + (1/\sqrt{2t}) \log M_1 .$$

Mais, comme plus haut, on a  $M_1 \leq g^t$ . D'où le résultat.

LEMME 6. - On a  $g \log g > \max(N_0 \log n, \frac{1}{2} N_1 \mu)$ .

Démonstration. - D'après un argument dû à ERDÖS, on a

$$n^{N_0} < \prod_{n_j \in \pi_0} n_j \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\lfloor g/p \rfloor + \lfloor g/p^2 \rfloor + \dots} \leq g! \leq g^g.$$

D'où  $g \log g \geq N_0 \log n$ . La seconde inégalité se démontre de même en considérant l'expression  $\prod_{v \in \pi_1} m_v$ , qui est elle aussi majorée par  $g!$ .

### 3. Preuve du théorème 1.

Supposons d'abord  $N_0 \geq t/4$ . D'après le lemme 4 (i), on a

$$t \geq \frac{1}{18} (\log n / \log \log n)^2.$$

Et le lemme 6 fournit

$$g \log g \geq \frac{1}{72} \log^3 n (\log \log n)^{-2}.$$

Donc

$$g \geq \frac{1}{216} (\log n / \log \log n)^3.$$

Le théorème est donc démontré dans ce cas. Il suffit donc de considérer le cas où  $g$  vérifie

$$(*) \quad g < \frac{1}{216} (\log n / \log \log n)^3.$$

D'après ce qui précède, on a alors  $N_0 \leq t/4$ . Les relations  $N_0 + N_1 + N_2 > t$  et  $N_1 + 2N_2 = t$  montrent que l'on a alors

$$(3) \quad N_1 > t - 2N_0 \geq t/2.$$

Ce qui montre, en particulier, que le lemme 6 s'applique. D'où

$$(4) \quad t \geq \frac{1}{2} (\mu / \log g)^2.$$

Ordonnons les  $m_v$ ,  $v$  parcourant  $\pi_1$ , par ordre croissant. Pour  $K_1 = \lfloor N_1/2 \rfloor$  et  $K = \lfloor K_1^{1/4} \rfloor$ , on a

$$1 \leq \prod_{1 \leq v \leq K_1 - K} (m_{v+K} / m_v) = m_{K_1 - K + 1} \dots m_{K_1} \leq e^{K\mu}.$$

Il existe donc  $v_0$ ,  $1 \leq v_0 \leq K_1 - K$  tel que

$$1 \leq m_{v_0+K} / m_{v_0} \leq \exp\left(\frac{K}{K_1 - K} \mu\right).$$

Ce qui implique

$$1 \leq m_{v_0+i} / m_{v_0+j} \leq \exp\left(\frac{2K}{K_1} \mu\right) \text{ pour } 0 \leq i \leq j \leq K.$$

Du fait que les  $L_v$  sont majorés par  $\log(2n)/\log 2$ , le principe des tiroirs montre que, parmi les  $L_v$  (associés aux  $K$  nombres  $m_v$  définis ci-dessus), il existe  $L_{v_1}$  et  $L_{v_2}$  tels que

$$|L_{v_1} - L_{v_2}| \leq \frac{2}{K} \log n.$$

Posons alors

$$\beta_1 = L_{v_1}, \quad \alpha_1 = p_{v_1}/p_{v_2}, \quad \alpha_2^{-1} = p_{v_1}^{L_{v_1} - L_{v_2}} m_{v_1}/m_{v_2}.$$

On vérifie que

$$(5) \quad 0 < |\beta_1 \log \alpha_1 - \log \alpha_2| < 2g/n < \exp\left(\frac{1}{2} \log n\right).$$

Les  $\alpha_i$  sont des rationnels. La taille  $s(p/q)$  d'un rationnel non nul mis sous forme irréductible étant défini par  $s(p/q) = |q| + |p/q|$ , on a

$$s(\alpha_1) \leq 2g \leq (\log n)^4,$$

$$s(\alpha_2) \leq 2g \frac{|L_{v_1} - L_{v_2}|}{e^\mu} \leq \exp(\mu + \xi), \quad \text{où } \xi = 1 + (6/K) \log n \log \log n.$$

$$|\log \alpha_2| \leq \frac{2K}{K_1} \mu + 6\xi \leq 3\mu K_1^{-3/4} + 6\xi, \quad \frac{\log n - \mu}{\log g} \leq \beta_1 \leq 2 \log n.$$

Supposons d'abord  $\mu \leq 1/2 \log n$ . Alors

$$\beta_1 \geq \frac{1}{6} \frac{\log n}{\log \log n} \quad (\text{utiliser } (*)).$$

Supposons de plus  $\mu \geq \xi^{9/8}$ . Alors

$$K \geq (\log n)^{1/9} \geq \mu^{1/9}.$$

On peut alors appliquer le théorème 2 ci-dessous, avec

$$S_1 = \exp(2\mu), \quad A = 16, \quad B = 5, \quad \delta = 9/10,$$

pourvu que l'on ait

$$\mu \geq (\log n)^{1/4};$$

si tel n'était pas le cas on aurait  $\xi \leq 7(\log n)^{1/4} \log \log n$  et donc

$$K \geq (\log n)^{3/4} \quad \text{et} \quad g \geq t \geq K_1 \geq K^4 \geq (\log n)^3,$$

en contradiction avec (\*). La conclusion du théorème 2 fournit, en raison de (5), la minoration

$$\mu \gg \log n.$$

Et donc, grâce à (4) et au lemme 6, le résultat cherché

$$g \gg (\log n / \log \log n)^3.$$

Par contre, si la condition  $\mu \leq \xi^{9/8}$  a lieu, on peut appliquer le théorème 2 avec  $S_1 = \exp(\xi^{9/8})$ , et on trouve

$$\xi \gg (\log n)^{8/9}, \quad \text{donc} \quad K \ll (\log n)^{1/8}, \quad t \ll (\log n)^{1/2},$$

ce qui contredit (1).

Le seul cas non traité est celui où  $\mu$  vérifie

$$\mu \geq \frac{1}{2} \log n,$$

mais cette inégalité, jointe à (4) et au lemme 6, implique

$$g \log^3 g \geq \frac{1}{8} (\log n)^3,$$

en contradiction avec (\*).

4. Enoncé du théorème d'approximation.

THÉOREME 2. - Soient  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  deux nombres rationnels de taille majorée respectivement par  $(\log S_1)^A$  et  $S_1$  ( $> 27$ ), où  $A$  est une constante positive. Soit  $\beta_1$  un entier vérifiant

$$\frac{2 \log S_1}{\log \log S_1} \leq |\beta_1| \leq (\log S_1)^B \quad (B \text{ constante } \geq 1).$$

Alors, si de plus

$$|\log \alpha_2| \leq (\log S_1)^\theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

il existe une constante positive  $C = C(A, B, \theta)$ , effectivement calculable, telle que

$$|\beta_1 \log \alpha_1 - \log \alpha_2| > \exp(-C \log S_1),$$

pourvu que le membre de gauche ne soit pas nul.

Démonstration. - C'est un cas particulier du théorème d'approximation de [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HALL (P.). - On representatives of subsets, J. London math. Soc., t. 10, 1935, p. 26-30.
- [2] RAMACHANDRA (K.), SHOREY (T. N.) and TIJDEMAN (R.). - On Grimm's problem relating to factorisation of a block of consecutive integers (à paraître).

(Texte reçu le 21 avril 1975)

Maurice MIGNOTTE  
 Université Louis Pasteur  
 7 rue René Descartes  
 67084 STRASBOURG

---