SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-LOUIS NICOLAS

Sur les entiers n pour lesquels il y a beaucoup de groupes abéliens d'ordre n

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1976-1977), exp. n° 8, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 8, 12 p.

6 décembre 1976

SUR LES ENTIERS n POUR LESQUELS IL Y A BEAUCOUP DE GROUPES ABÉLIENS D'ORDRE n

par Jean-Louis NICOLAS

Introduction.

Soit $a(n)$ le nombre de groupes abéliens d'ordre n. On désigne par $P(\alpha)$ le nombre de partitions de l'entier α, c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire α comme somme d'entiers, sans tenir compte de l'ordre (Cf. [8], ch. XIX). Il est connu depuis longtemps (Cf. par exemple BURNSIDE [1]) que, si la décomposition en facteurs premiers de n est

$$n = p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} ,$$

alors on a

$$a(n) = P(\alpha_1)\ P(\alpha_2) \cdots P(\alpha_k) .$$

La démonstration se fait en deux temps : D'abord le groupe G d'ordre n s'écrit

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_k ,$$

où G_i est le sous-groupe des éléments dont l'ordre est une puissance de p_i. Cela montre que la fonction arithmétique $a(n)$ est multiplicative, et vérifie

$$a(n) = a(p_1^{\alpha_1}) \cdots a(p_k^{\alpha_k}) .$$

Il reste ensuite à compter le nombre de groupes abéliens d'ordre p^α.

On peut décomposer un groupe abélien en somme directe de sous-groupes cycliques. Si le groupe H a p^α éléments, on écrit

$$H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_r .$$

Si le sous-groupe H_i a α_i éléments, on voit apparaître la partition de α

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r .$$

Il y a donc $P(\alpha)$ groupes H non isomorphes ayant p^α éléments.

P. ERDÖS et G. SZEKERES ont étudié en 1934 (Cf. [4]) la fonction $a(n)$ et montré que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\ n^{-s} = \prod_{k=1}^{\infty} \zeta(k\ s) , \qquad \mathrm{Re}\ s > 1 .$$

On en déduit, par application du théorème taubérien d'IKEHARA (Cf. [6], ch. 12), que

$$\sum_{n\leqslant x} a(n) \sim A_1\ x \quad \text{avec} \quad A_1 = \prod_{k=2}^{\infty} \zeta(k) .$$

On peut maintenant démontrer (Cf. [17] et [20])

$$\sum_{n\leqslant x} a(n) = A_1\ x + A_2\ x^{1/2} + A_3\ x^{1/3} + O(x^\theta) ,$$

l'exposant θ diminuant progressivement : la meilleure valeur actuellement connue est $\frac{10}{39} + \varepsilon$.

L'étude des "grandes valeurs" prises par une fonction multiplicative a été étudiée pour la première fois par WIGERT, pour la fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de n .

Il démontra [21] que l'ordre maximum de $d(n)$ était

$$2^{(1+o(1))(\log n)/\log\log n} ,$$

c'est-à-dire que, pour $\varepsilon > 0$, on avait

$d(n) < 2^{(1+\varepsilon)(\log n)/\mathrm{loglog}\, n}$ pour tout n assez grand,

$d(n) > 2^{(1-\varepsilon)(\log n)/\mathrm{loglog}\, n}$ pour une infinité de n .

S. RAMANUJAN [16] a introduit les nombres hautement composés afin de préciser les résultats de WIGERT. Il montre notamment que l'ordre maximum de $d(n)$ est

$$2^{\ell i(\log n)+O(\log n \exp(-c\sqrt{\mathrm{loglog}\, n})} ,$$

où $\ell i(x) = \int_2^x dt/\log t$ désigne le logarithme intégral de x .

Avec l'hypothèse de Riemann, il donne même un développement asymptotique plus long (Cf. [16], § 43).

Les grandes valeurs de la fonction $a(n)$ ont été étudiées par KENDALL et RANKIN [10] qui ont montré que l'ordre maximum de $\log a(n)$ était $O(\log n/\mathrm{loglog}\, n)$. KRÄTZEL [12] précisait la constante $(\frac{\log 5}{4} + o(1))\log n/\log\log n$, et SCHWARZ et WIRSING démontraient [19]

(1) $$\log 5\, \ell i(\tfrac{1}{4} \log n) + O(\log n \exp(- c\sqrt{\log\log n}) .$$

D'autres auteurs ont étudié les grandes valeurs de fonctions multiplicatives (Cf. [8], notes du chap. XVIII) : LANDAU pour $n/\Phi(n)$, où Φ est l'indicateur d'Euler, GRONWALL pour la somme $\sigma(n)$ des diviseurs de n , KNOPFMACHER ([11] et [12]) pour certaines fonctions venues de la théorie algébrique des nombres, SERRE et DELIGNE [2] pour des coefficients de formes modulaires. Enfin, HEPPNER [9] a donné une formulation plus générale.

Nous allons suivre l'idée de RAMANUJAN, et définir pour la fonction $a(n)$ des nombres a-hautement composés et a-hautement composés supérieurs. Il faudra pour cela étudier la concavité de la fonction $\log p(\alpha)$. Nous montrerons ensuite que l'étude de ces nombres est indispensable pour évaluer l'ordre maximum, en donnant sous l'hypothèse de Riemann, un développement asymptotique plus long que (1).

Nous terminerons par des considérations sur l'ordre maximum.

1. Concavité logarithmique de la fonction de répartition.

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$. On appelle enveloppe inférieure convexe de E l'intersection des demi-plans inférieurs contenant E. Pour les demi-plans définis par l'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$, on appelle demi-plan inférieur la région $y \leqslant ax + b$.

PROPOSITION 1. - Soit $P(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. L'enveloppe inférieure convexe du graphe de l'application $n \mapsto \log P(n)$ de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{R}$ a pour sommets 0, les entiers pairs vérifiant $4 \leqslant n \leqslant 26$ et tous les entiers supérieurs à 26.

Démonstration. - Nous allons d'abord démontrer que $P(n)$ est logarithmiquement concave pour $n \geqslant 100$. Nous allons utiliser les formules données par HARDY et RAMANUJAN [7], et RADEMACHER ([17], § 120) :

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k\geqslant 1} \sqrt{k}\, A_k(n) \frac{d}{dn}\Big(\frac{\mathrm{Sh}(C/k)\lambda_n}{\lambda_n}\Big) , \tag{2}$$

avec $C = \pi\sqrt{2/3} = 2,565$, $\lambda_n = \sqrt{n - (1/24)}$. Les valeurs de $A_k(n)$ ont été calculées par HARDY et RAMANUJAN jusqu'à $k = 18$. En particulier, $A_1(n) = 1$ et $A_2(n) = (-1)^n$. On sait démontrer que (Cf. [17], § 127), pour tout n, on a $|A_k(n)| \leqslant 2k^{3/4}$.

Le reste $R_N = \sum_{k\geqslant N+1}$ de la série (2) se majore en développant en série entière la fonction Sh, en permutant les sommations, et en majorant $\sum_{k\geqslant N+1} |A_k|/k^{2r-1/2}$ par l'intégrale $\int_N^\infty 2dx/x^{2r-1/4}$. On trouve

$$|R_N| \leqslant \frac{4}{3} \frac{N^{9/4}}{\lambda_n^3} \mathrm{Sh} \frac{C\lambda_n}{N} .$$

On trouvera dans [17], une majoration plus précise.

LEMME. - Soit

$$f(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\Big(\frac{\exp(C\lambda_n)}{\lambda_n}\Big) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \frac{\exp(C\lambda_n)}{n^2} \Big(C - \frac{1}{\lambda_n}\Big) .$$

Pour $n \geqslant 26$, on a

$$P(n) = f(n) + \theta(\exp(C/2)\lambda_n)/\lambda_n^2 \quad \text{avec} \quad |\theta| < 1$$

et

$$P(n) = f(n)\ (1 + \xi \exp(-C/2)\lambda_n), \quad \text{avec} \quad |\xi| < 8 .$$

Démonstration. - On écrit les deux premiers termes de la série (2) en décomposant le Sh,

$$P(n) = f(n) - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{\exp(-C/2)\lambda_n}{\lambda_n}$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn}\Big(\frac{\exp(C/2)\lambda_n}{\lambda_n}\Big) - \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn}\Big(\frac{\exp(-C/2)\lambda_n}{\lambda_n}\Big) + R_2 .$$

Le deuxième terme s'écrit

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \frac{\exp(-C\lambda_n)}{\lambda_n^2} \Big(C + \frac{1}{\lambda_n}\Big) \frac{1}{2\lambda_n^2} .$$

Le quatrième terme est lui aussi majoré par $1/2\lambda_n^2$. Le troisième vaut

$$\frac{(-1)^n}{4\pi} \frac{\exp(C/2)\lambda_n}{\lambda_n^2} \left(\frac{C}{2} - \frac{1}{\lambda_n}\right) .$$

Il est majoré en valeur absolue par $(C \exp(C/2)\lambda_n)/8\pi\lambda_n^2$. Enfin pour R_2 on a

$$|R_2| \leqslant \frac{4}{3} \frac{2^{9/4}}{\lambda_n^3} \left(\frac{1}{2} \exp(C/2)\lambda_n\right) \leqslant \frac{4}{15} 2^{5/4} \frac{\exp(C/2)\lambda_n}{\lambda_n^2} ,$$

car $\lambda_n > 5$ dès que $n \geqslant 26$. On a donc

$$P(n) = f(n) + \theta \frac{\exp(C/2)\lambda_n}{\lambda_n^2} ,$$

avec

$$|\theta| \leqslant \frac{C}{8\pi} + \frac{4}{15} 2^{5/4} + \frac{1}{e^5} = 0{,}743 < 1 .$$

Pour la forme multiplicative, on exprime ξ en fonction de θ .

$$\xi = \frac{4\pi\sqrt{2}\,\theta}{C - 1/\lambda_n} \leqslant \frac{4\pi\sqrt{2}}{C - 1/5}\,\theta \leqslant 7{,}52\,\theta < 8 ,$$

dès que $n \geqslant 26$.

Nous allons déduire de ce lemme que la concavité de $\Phi(n) = \log f(n)$ entraîne la concavité de $\log P(n)$. On a

$$\log P(n) = \Phi(n) + \log(1 + \xi \exp(-(C/2)\lambda_n) ,$$

d'où l'on tire

$$\log \frac{P(n+2)}{P(n+1)} - \log \frac{P(n+1)}{P(n)} = \Phi(n+2) - 2\Phi(n+1) + \Phi(n) + \Delta ,$$

avec $\Delta \leqslant 32 \exp(-(C/2)\lambda_n)$. La fonction Φ est définie pour x réel, et l'on a

$$\Phi(n+2) - 2\Phi(n+1) + \Phi(n) = \Phi''(\eta) \quad \text{avec} \quad n < \eta < n+2 .$$

On a

$$\Phi(x) = C\lambda - 2 \log \lambda + \log\left(C - \frac{1}{\lambda}\right) - \log(4\pi\sqrt{2}) ,$$

avec $\lambda = \lambda(x) = \sqrt{x - 1/24}$ et $\lambda'(x) = 1/2\lambda(x)$. D'où

$$\Phi''(x) = -\frac{C}{4\lambda^3} \left[1 - \frac{4}{C\lambda} + \frac{3C\lambda - 2}{C\lambda(C\lambda - 1)^2}\right] .$$

La fonction $u \longmapsto (3u - 2)/u(u-1)^2$ est décroissante pour $u > 1$.

On en déduit que le crochet est $> 2/3$ lorsque $x \geqslant 26$, ce qui entraîne $C\lambda > 12{,}5$. On aura donc, pour $n \geqslant 26$,

$$|\Phi(n+2) - 2\Phi(n+1) + \Phi(n)| = \Phi''(\eta) > C/6\lambda_{n+2}^3 > C/7\lambda_n^3 .$$

Pour s'assurer que $P(n)$ est logarithmiquement concave, il suffit de vérifier que $\Delta \leqslant C/7\lambda_n^3$.

Soit $\exp(C/2)\lambda_n/\lambda_n^3 > 224/C$. Cette inégalité est vraie pour $\lambda_n \geqslant 9$, et donc pour $n \geqslant 82$.

On achève de démontrer la proposition en étudiant, avec un ordinateur, la table numérique des valeurs de $P(n)$. Il est à noter que comme $A_2(n) = (-1)^n$, la fonction P est un peu plus faible pour les nombres impairs.

COROLLAIRE. - <u>On a les inégalités</u>, <u>valables pour tout</u> $n \geqslant 0$,

$$P(n) \leqslant 5^{n/4} \quad \text{et} \quad P(n) \leqslant \frac{125}{121}\left(\frac{11}{5}\right)^{n/2} .$$

On obtient de telles inégalités en écrivant que le graphe de $\log P(n)$ est situé sous l'une des droites qui forment son enveloppe convexe.

<u>Table numérique</u>

$n =$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n) =$ 1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

2. Nombres a-hautement composés.

<u>Définition</u>. - On dit que n est a-hautement composé (a-h.c.) si, pour $m < n$, on a : $a(m) < a(n)$. Comme $a(p^\alpha) = P(\alpha)$ ne dépend que de l'exposant α , on a, pour deux nombres premiers p et q , et n a-h.c. :

$$p < q \Rightarrow v_p(n) \geqslant v_q(n) , \tag{3}$$

avec $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n .

Désignons par p_k le k-ième nombre premier, et écrivons n , supposé a-h.c. :

$$n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} . \tag{4}$$

On a $\alpha_{k-1} \geqslant 4$ et $\alpha_k \geqslant 2$.

Si n n'est pas a-h.c., il existe $m < n$ tel que $a(m) \geqslant a(n)$. On dit alors que m barre n .

Comme $P(1) = 1$, on a d'abord $\alpha_i \geqslant 2$. (Si $\alpha_i = 1$, $m = n/p_i$ barre n .) Les valeurs possibles du couple $(\alpha_{k-1} , \alpha_k)$, compte tenu de (3), sont : $(2 , 2)$; $(3 , 2)$ et $(3 , 3)$. Dans les deux premiers cas, n est barré par $n(p_{k-1}/p_k)^2$ et dans le troisième par $n(p_{k-1}/p_k)^3$.

Les méthodes utilisées pour étudier les nombres hautement composés de RAMANUJAN s'adaptent à l'étude des nombres a-h.c.

En particulier, on peut démontrer, par la méthode des bénéfices, que, sauf pour un nombre fini de n , on a $\alpha_k = 4$ dans la formule (4) (Cf. [14]).

3. Nombres a-h.c. supérieurs.

PROPOSITION 2. - *Pour* $\varepsilon > 0$ *fixé, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n^{\varepsilon}} = 0 \ .$$

Démonstration. - La fonction $n \longmapsto a(n)/n^{\varepsilon}$ est multiplicative. Pour qu'elle tende vers 0, il faut et il suffit qu'elle tende vers 0 sur la sous-suite des $n = p^m$, puissance des nombres premiers (Cf. [8], chap. XVIII). La formule (2) nous donne

$$P(m) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{\exp(C\sqrt{m})}{m} ,$$

soit $\log P(m) \leqslant A\sqrt{m}$ et

$$\log \frac{a(p^m)}{p^{m\varepsilon}} = \log P(m) - \varepsilon m \log p \leqslant A\sqrt{\frac{\log p^m}{\log p}} - \varepsilon \log p^m \leqslant \frac{A}{\sqrt{\log 2}} \sqrt{\log p^m} - \varepsilon \log p^m \ .$$

Cette dernière expression tend vers $-\infty$ quand p^m tend vers l'infini.

Remarque. - La fonction $n \longmapsto a(n)/n^{\varepsilon}$ a un maximum qu'elle atteint en général en un seul point N_{ε} : Comme pour les nombres colossalement abondants (Cf. [5]), le maximum peut être atteint en deux points et éventuellement en quatre points s'il existe, ce qui est peu probable, deux nombres premiers $p \neq q$ et des nombres rationnels a et b distincts de 1 tels que

$$\frac{\log a}{\log p} = \frac{\log b}{\log q} \ .$$

Définition. - On dit que N est a-hautement composé supérieur (a-h.c.s.) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $n \longmapsto a(n)/n^{\varepsilon}$ soit maximale en N .

Un tel nombre est a-h.c.. On a en effet, pour $n < N$,

$$\frac{a(n)}{n^{\varepsilon}} \leqslant \frac{a(N)}{N} \Rightarrow a(n) \leqslant \left(\frac{n}{N}\right)^{\varepsilon} a(N) < a(N) \ .$$

Détermination des nombres N_{ε} . - Le maximum d'une fonction multiplicative f tendant vers 0 à l'infini vérifie

$$\max_n f(n) = \max \prod_i f(p_i^{\alpha_i}) = \prod_p \max_{\alpha} f(p^{\alpha}) \ .$$

Le dernier produit est fini, car, dauf pour un nombre fini de p , $\max_{\alpha} f(p^{\alpha})$ est atteint pour $\alpha = 0$.

Il reste à déterminer le maximum de $P(\alpha)/p^{\varepsilon\alpha}$, c'est-à-dire de $\log P(\alpha) - \alpha\varepsilon \log p$. Cette quantité peut s'interpréter comme l'ordonnée à l'origine de la droite de pente $\varepsilon \log p$ passant par le point de coordonnées α , $\log P(\alpha)$. On voit alors que le maximum de $\log P(\alpha) - \varepsilon\alpha \log p$ est atteint en un des sommets de l'enveloppe convexe du graphe de $\log P$.

Désignons par (s_i) l'abscisse du i-ième sommet de cette enveloppe convexe. On a vu (proposition 1) que

$$s_0 = 0 \ , \qquad s_1 = 4 \ , \qquad s_2 = 6 \ , \qquad s_k = 2k + 2 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant 12$$

et

$$s_k = k + 14 \quad \text{pour} \quad k \geqslant 12 \ .$$

Désignons par t_k la pente du côté qui relie les $(k-1)$-ième au k-ième sommet. On a

(5) $$t_1 = \frac{\log 5}{4} \ ; \qquad t_2 = \frac{\log(11/5)}{2} \ ; \ \ldots \ ; \qquad t_k = \frac{\log P(s_k) - \log P(s_{k-1})}{s_k - s_{k-1}} \ ,$$

la suite t_k est décroissante et tend vers 0.

Si l'on a

(6) $$t_{k+1} < \varepsilon \log p < t_k \ ,$$

alors $P(\alpha)/p^{\varepsilon\alpha}$ atteindra son maximum en $\alpha = s_k$.

En particulier, posons x tel que $\varepsilon \log x = t_1 = \frac{\log 5}{4}$, alors, pour $p > x$, on aura un maximum en $\alpha = 0$.

De même, on pose

(7) $$\varepsilon \log x_{s_i} = t_i \ , \text{ c'est-à-dire } \log x_{s_i} = (4t_i/\log 5) \log x \ ,$$

et on a

$$\text{pour} \quad p < x_{s_i} \ , \qquad v_p(N_\varepsilon) \geqslant s_i \ ;$$
$$\text{pour} \quad p > x_{s_i} \ , \qquad v_p(N_\varepsilon) \leqslant s_{i-1} \ .$$

On a alors, en fonction de $x = x_{s_1} = 5^{1/4\varepsilon}$,

$$\log N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p \leqslant x_{s_i}} (s_i - s_{i-1}) \log p \ ,$$

(8) $$\log N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i - s_{i-1}) \, \theta(x^{4t_i/\log 5}) \ ,$$

où $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ désigne la fonction de Čebyšev. On a également

(9) $$\log a(N_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(x_{s_i}) \log \frac{P(s_{i+1})}{P(s_i)} \ ,$$

avec $\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$.

Ces formules permettent de calculer numériquement les nombres N_ε .

Table numérique

s_i	$s_0 = 0$	$s_1 = 4$	$s_2 = 6$	$s_3 = 8$	$s_4 = 10$	$s_5 = 12$
$\frac{4t_i}{\log 5}$		1	0,97979	0,86135	0,90354	0,75323

Application.

$$\varepsilon = 0{,}155 \;; \qquad x = x_4 = 5^{1/4\varepsilon} = 13{,}40 \;;$$
$$x_6 = x^{0,97979} = 12{,}72 \;; \qquad x_8 = x^{0,86135} = 9{,}35 \;\ldots$$

Compris entre x_4 et x_6, le nombre premier 13 aura pour exposant 4. L'exposant de 11 sera 6. Les exposants de 2, 3, 5, 7 se calculent à l'aide de la relation (6) et d'une table des valeurs de t_k. On trouve

$$N_{0,155} = 2^{124}\, 3^{45}\, 5^{17}\, 7^{12}\, 11^{6}\, 13^{4} \,.$$

Les plus petits nombres a-h.c.s. sont des puissances de 2 : 2^4, 2^6, ..., 2^{18}. Viennent ensuite $2^{18}\,3^4$ et $2^{18}\,3^6$. Le plus petit nombre où intervient 5 est $2^{43}\,3^{14}\,5^4$.

4. Ordre maximum de $a(n)$.

THÉORÈME. - Sous l'hypothèse de Riemann l'ordre maximum de $a(n)$ vérifie

$$\log a(n) = \Phi(n) + O(\log n)^{2\alpha-1} \,,$$

avec

$$\Phi(n) = \log 5\; \ell i\left(\frac{\log n}{4}\right) - \frac{\log 5}{2 \log\log n}\left(\frac{\log n}{4}\right)^{\alpha} + \log \frac{11}{5}\; \ell i\left(\frac{\log n}{4}\right)^{\alpha}$$

et

$$\alpha = \frac{t_2}{t_1} = \frac{2 \log 11/5}{\log 5} = 0{,}97979 \,.$$

Démonstration. - Montrons d'abord que, pour $n = N_\varepsilon$, a-h.c.s., nous avons

(10) $$\log a(N_\varepsilon) = \Phi(N_\varepsilon) + O(\log N_\varepsilon)^{2\alpha-1} \,.$$

On définit x par $\varepsilon \log x = (1/4) \log 5$. Les formules (8) et (9) donnent

$$\log N_\varepsilon = 4\theta(x) + 2\theta(x_6) + O(x_8) \,,$$
$$\log a(N_\varepsilon) = \pi(x) \log 5 + \pi(x_6) \log \frac{11}{5} + O(x_8) \,.$$

Si la limite supérieure σ de l'abscisse des zéros de la fonction de Riemann vérifie $1/2 \leqslant \sigma < 1$, on sait que (Cf. [3], p. 175) :

$$\theta(x) = x + O(x^{\sigma} \log^2 x) \,,$$
$$\pi(x) = \ell i\, x + O(x^{\sigma} \log x) \,.$$

On a seulement besoin ici de supposer $\sigma < 0{,}97$. On a alors

$$\log N_\varepsilon = 4x + 2x^{\alpha} + O(x^{2\alpha-1}) \,,$$
$$\log a(N_\varepsilon) = \log 5\; \ell i\, x + \log \frac{11}{5}\; \ell i(x^{\alpha}) + O(x^{2\alpha-1})$$

puisque $x_8 = x^{0,86} \leqslant x^{2\alpha-1}$.

On doit calculer x en fonction de N dans la première équation, et reporter dans la deuxième. Ce calcul suit la méthode de RAMANUJAN ([16], § 43). Il vient

$$(11)\qquad x \sim \frac{1}{4}\log N_\varepsilon .$$

On pose, par commodité, $\xi = \frac{1}{4}\log N_\varepsilon$, et en remplaçant x^α par $\xi^\alpha(1 + o(1))$, on trouve

$$x = \xi - \frac{1}{2}\xi^\alpha + O(\xi^{2\alpha-1}) \overset{\text{déf}}{=} \xi - u .$$

On a alors

$$\log a(N) = \log 5\ \ell i(\xi - u) + \log\frac{11}{5}\ \ell i(\xi - u)^\alpha + O(\xi^{2\alpha-1}) ,$$

Par la formule de Taylor, on a

$$(12)\qquad \ell i(\xi - u) - \ell i(\xi) = -\frac{u}{\log \xi} + O(\xi^{2\alpha-1})$$

et

$$\ell i(\xi - u)^\alpha = \ell i(\xi^\alpha + O(\xi^{2\alpha-1})) = \ell i\ \xi^\alpha + O(\xi^{2\alpha-1}) ,$$

et la formule (10) en découle.

Maintenant soit n quelconque, et soit $N_1 < n \leqslant N_2$ les deux nombres a-h.c.s. qui l'encadrent. Si P est le plus petit nombre premier ne divisant pas N_1 , on a $N_2 \leqslant N_1\ P^4$, d'où il résulte que

$$\log N_2 = \log n + O(\log\log n)$$

(puisque $P \sim x \sim \frac{1}{4}\log N_1$ par (10)).

On a alors, par (12),

$$\Phi(N_2) = \Phi(n) + O(1)$$

et

$$\log a(n) \leqslant \log a(N_2) = \Phi(N_2) + O(\log N_2)^{2\alpha-1} = \Phi(n) + O(\log n)^{2\alpha-1} ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. – En prenant davantage de termes dans les formules (8) et (9), on peut obtenir un développement asymptotique plus long. Le calcul en est techniquement compliqué. L'intérêt de ce théorème est de mettre en valeur le coefficient $\alpha = t_2/t_1$ quotient des deux premières pentes de l'enveloppe inférieure convexe de la fonction $n \longmapsto \log P(n)$. Un développement asymptotique plus long ferait intervenir les pentes suivantes. Le problème de l'ordre maximum de $a(n)$ est donc lié à celui de cette enveloppe.

5. Ordre maximum d'une fonction multiplicative.

Revenons à la fonction $n \longmapsto d(n) = \sum_{d|n} 1$.

RAMANUJAN [16] a défini les nombres hautement composés n , $(m < n \Rightarrow d(m)<d(n))$ et les nombres h.c. supérieurs N_ε maximisant $d(n)/n^\varepsilon$. Il construit alors (§ 30) une fonction $x \longrightarrow D(x)$, telle que, pour tout n , on a $d(n) \leqslant D(n)$, avec égalité lorsque n est un nombre h.c. supérieur. Il conclut : "Hence $D(n)$ is the maximum order of $d(n)$. In other words, $d(n)$ will attain its maximum order when n is a superior highly composite number".

RAMANUJAN donne pour la fonction $x \longmapsto D(x)$ une définition compliquée. En fait, on peut la définir ainsi. On trace les points de coordonnées $(\log n \, , \, \log d(n))$ pour tout n . On prend l'enveloppe inférieure convexe de ces points. La frontière est une fonction $u \longmapsto \Delta(u)$ affine par morceau, concave, affine entre les points $(\log N \, , \, \log d(N))$, où N est h.c. supérieur. On a alors :

$$D(x) = e^{\Delta(\log x)} .$$

Si la fonction Φ est dérivable deux fois, on a, pour $f(x) = e^{\Phi(\log x)}$,

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{\Phi} (\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi') ,$$

Φ , Φ' , Φ'' étant prise au point $\log x$. Comme Δ peut être interprétée comme la limite d'une suite de fonctions concaves dérivables deux fois, et que la dérivée à droite de Δ est $\leqslant 1$, on en déduit que D est concave.

Le "bénéfice" de n (Cf. [14]) s'interprète facilement. Si $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$ sont les nombres h.c. supérieurs entourant n , et ε la pente du segment

$$(\log N_1 \, , \, \log d(N_1)) \quad (\log N_2 \, , \, \log d(N_2)) ,$$

on a, relativement à ε ,

$$\text{bén } n = \Delta(n) - \log d(n) .$$

On pouvait prendre d'autres définitions que celle de RAMANUJAN pour l'ordre maximum de $d(n)$:

1° Soit $F_1(x)$ la plus petite fonction croissante telle que $F_1(n) \geqslant d(n)$. L'appui de F_1 (i. e. les entiers n pour lesquels $F_1(n) = d(n)$) est formé des nombres n largement composés $(m \leqslant n \Longrightarrow d(m) \leqslant d(n))$.

2° Soit $F(x)$ une fonction strictement croissante telle que $F(n) \geqslant d(n)$ et d'appui maximal. L'appui est formé des nombres h.c. On a $F_1(x) \leqslant F(x)$.

3° Soit $F_2(x)$ la plus petite fonction concave telle que $F_2(n) \geqslant d(n)$. On a $F_2(x) \leqslant D(x)$ avec égalité lorsque $x = N_\varepsilon$, h.c. supérieur. L'appui de $F_2(x)$ est formé des nombres $\tilde{N}_\varepsilon$ maximisant $d(n) - \lambda n$. Il contient l'appui de D . Donc tout nombre h.c. supérieur est un $\tilde{N}_\lambda$ pour une certaine valeur de λ . On peut se demander s'il existe une infinité de $\tilde{N}_\lambda$ qui ne sont pas h.c. supérieurs, et une infinité de nombres h.c. qui ne sont pas des $\tilde{N}_\lambda$.

Ces diverses fonctions sont très voisines. A l'aide du théorème de majoration des bénéfices (Cf. [14], th. 1), on voit que

$$\log D(n) - \log F_1(n) = O\left(\frac{1}{(\log n)^\gamma}\right) ,$$

avec $\gamma > 0$. Ce terme d'erreur est très petit comparé à celui du théorème du § 4. On aurait pour $a(n)$ les mêmes résultats, et cela nous autorise à dire, après RAMANUJAN, que l'ordre maximum de la fonction $n \longmapsto a(n)$ est atteint pour les nombres a-hautement composés supérieurs.