

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GUY HENNIART

Représentations du groupe de Weil d'un corps local : conducteurs et facteurs ε

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978),
exp. n° 37, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL :
 CONDUCTEURS ET FACTEURS ϵ

par Guy HENNIART

Résumé. - Soient F un corps local non archimédien et W_F le groupe de Weil (absolu) de F . Soit R une représentation linéaire continue de W_F , irréductible et de degré n . Notons $a(R)$ l'exposant de son conducteur d'Artin. Supposons R primordiale, i. e. $a(R \otimes \chi) \geq a(R)$, pour tout caractère χ de W_F . Alors nous montrons que l'on a

$$a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi)), \text{ pour tout caractère } \chi \text{ de } W_F.$$

Fixons un caractère additif ψ de F , et supposons $n = 2$. Alors, si $a(\chi) \geq a(R)$, on a $\epsilon(R \otimes \chi, \psi) = \epsilon(\chi, \psi)\epsilon(\chi \det R, \psi)$ (phénomène de dégénérescence pour les facteurs ϵ). On conjecture que, si n est quelconque, alors $a(\chi) \geq (2a(R))/n$ implique l'égalité

$$\epsilon(R \otimes \chi, \psi) = \epsilon(\chi, \psi)^{n-1} \epsilon(\chi \det R, \psi).$$

Abstract. - Let F be a non-archimedean local-field and W_F its absolute Weil-group. Let R be a continuous irreducible linear representation of W_F and n its degree. Let us denote by $a(R)$ the exponent of the Artin conductor of R . Let us suppose that R is primordial, i. e. $a(R \otimes \chi) \geq a(R)$, for every character χ of W_F . Then, we show the equality $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi))$, for every character χ of W_F . Let us choose a character χ of W_F and let us fix an additive character ψ of F . Suppose $n = 2$. Then, if $a(\chi) \geq a(R)$, we have

$$\epsilon(R \otimes \chi, \psi) = \epsilon(\chi, \psi)\epsilon(\chi \det R, \psi)$$

(degeneracy phenomenon for the ϵ -factors). We conjecture that, for any n , the assumption $a(\chi) \geq (2a(R))/n$ implies the equality

$$\epsilon(R \otimes \chi, \psi) = \epsilon(\chi, \psi)^{n-1} \epsilon(\chi \det R, \psi).$$

1. La conjecture de Langlands pour GL_n .

Dans toute la suite, F désignera un corps local non archimédien, de caractéristique résiduelle p ; \bar{F} sera une clôture algébrique séparable de F , et l'on notera $W_{\bar{F}}$ le groupe de Weil de \bar{F} sur F [13] (app. 2).

Soit n un entier, $n \geq 1$. Nous nous intéressons à deux sortes d'objets : d'une part, les représentations continues de $W_{\bar{F}}$ dans $GL(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension n (nous les appellerons représentations de degré n de $W_{\bar{F}}$); d'autre part, les représentations irréductibles admissibles [5] (p. 8) de $GL_n(F)$.

Pour $n = 1$, ce sont respectivement les caractères (continus) de $W_{\bar{F}}$ et ceux de F^\times . L'on sait que la théorie du corps de classes local établit une correspondance bijective entre ces deux types d'objets. Plus précisément, il existe une application continue surjective $\tau_{\bar{F}}$ de $W_{\bar{F}}$ dans F^\times et, à un caractère χ de F^\times , l'on associe le caractère $\chi \circ \tau_{\bar{F}}$ de $W_{\bar{F}}$. En particulier, pour $s \in \mathbb{C}$, nous noterons ω_s le caractère de $W_{\bar{F}}$ défini par

$$\omega_s(x) = q^{-v(\tau_F(x))},$$

où q est le cardinal du corps résiduel de F et v la valuation normalisée de F . Les caractères ω_s sont les caractères non ramifiés de W_F .

Désignons par ψ un caractère additif de F . Aux représentations admissibles irréductibles ρ de $GL(n, F)$ sont attachées des fonctions $L(\rho)$ qui vérifient une équation fonctionnelle et des facteurs $\epsilon(\rho, \psi)$ qui interviennent dans cette équation [5] (théorème 3.3). Pour les représentations R de degré n de W_F , l'on définit également des fonctions $L(R)$ et des facteurs $\epsilon(R, \psi)$ [12].

Pour $n = 1$, la correspondance donnée plus haut conserve les facteurs L et ϵ . C'est-à-dire que, si χ est un caractère de F^\times , l'on a

$$L(\chi) = L(\chi \circ \tau_F) \quad \text{et} \quad \epsilon(\chi, \psi) = \epsilon(\chi \circ \tau_F, \psi).$$

Conjecture de Langlands pour GL_n . - Il existe une bijection naturelle entre (classes de) représentations irréductibles de degré n de W_F et (classes de) représentations admissibles irréductibles supercuspidales [5] (p. 26) de $GL_n(F)$.

Soit R une représentation irréductible de degré n de W_F , et ρ la représentation supercuspidale correspondante de $GL_n(F)$. Le terme "naturelle" signifie que l'on a, entre autres, les propriétés suivantes :

- 1° $\det R = \omega_\rho \circ \tau_F$, où ω_ρ désigne le caractère central de ρ .
- 2° Si χ est un caractère de F^\times , à $R \otimes (\chi \circ \tau_F)$ est associée $\rho \otimes (\chi \circ \det)$.
- 3° $L(R) = L(\rho)$ et $\epsilon(R, \psi) = \epsilon(\rho, \psi)$.

Ces propriétés ne suffisent pas en général à caractériser la correspondance de Langlands. Néanmoins, on a le résultat suivant (voir [11] pour le cas $n = 3$, [6] pour le cas $n = 2$).

THÉORÈME 1. - Soient ρ et ρ' deux représentations admissibles irréductibles de $GL(n, F)$, où $n = 2$ ou 3 . Si l'on a $\omega_\rho = \omega_{\rho'}$ et

$$\epsilon(\rho \otimes (\chi \circ \det), \psi) = \epsilon(\rho' \otimes (\chi \circ \det), \psi)$$

quel que soit le caractère χ de F^\times , alors on a $\rho = \rho'$.

La conjecture de Langlands a été établie pour $n = 2$ et $p \neq 2$, pour $n = 2$ et F de caractéristique 2, et enfin pour certaines extensions de \mathbb{Q}_2 . On n'a pas d'autres résultats généraux.

2. Conducteurs d'Artin et exposants.

Soit R une représentation de degré n de W_F , $c(R)$ son conducteur d'Artin et $a(R)$ l'exposant de ce conducteur : On a $c(R) = \mathfrak{P}_F^{a(R)}$, où \mathfrak{P}_F est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de F . Soit $a(\psi)$ le plus petit entier m tel que ψ soit trivial sur \mathfrak{P}_F^m . Alors on a, pour $s \in \mathbb{C}$,

$$\epsilon(R \otimes \omega_S, \psi) = \epsilon(R, \psi) q^{-s(a(R) + na(\psi))} .$$

En vertu de la conjecture de Langlands et du théorème 1, il est intéressant d'obtenir des renseignements sur $a(R)$ et $a(R \otimes (\chi \circ \tau_F))$, pour un caractère χ de F^\times . Appelons π_V la projection de $GL(V)$ sur $PGL(V)$, V étant un espace vectoriel complexe de dimension n . Si R est une représentation de W_F dans $GL(V)$, la représentation projective $r = \pi_V \circ R$ sera dite associée à R , et on dira que R relève r ou est un relèvement de r . Deux représentations R et R' de W_F dans $GL(V)$ relèvent la même représentation projective si, et seulement si, il existe un caractère χ de F^\times tel que l'on ait $R' = R \otimes (\chi \circ \tau_F)$.

THÉOREME 2. - Toute représentation (continue) de W_F dans $PGL(V)$ possède un relèvement.

Pour la démonstration de ce théorème et celles des théorèmes suivants, voir [3].

Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Le théorème 2 nous permet de définir l'exposant $a(r)$ de r comme le minimum des $a(R)$ quand R parcourt l'ensemble des relèvements de r . Une représentation linéaire R de W_F sera dite primordiale si son exposant $a(R)$ est égal à celui de la représentation projective associée.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux représentations irréductibles de W_F .

THÉOREME 3. - Toute représentation projective irréductible de W_F est d'image finie.

Par suite, le noyau d'une telle représentation r fixe une extension finie K de F . Cette propriété permet de démontrer le théorème suivant.

THÉOREME 4. - Soit R une représentation linéaire de W_F , irréductible, primordiale et de degré n . Soit χ un caractère de W_F . Alors on a

$$a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi)) .$$

En particulier, si $a(\chi) \geq a(R)/n$, on a $a(R \otimes \chi) = na(\chi)$ (phénomène de dégénérescence pour les exposants).

Un cas difficile à décrire est celui où R est primitive, c'est-à-dire irréductible et non induite par une représentation d'un sous-groupe propre de W_F . On montre en particulier que, si R est primitive, son degré est une puissance de p [7]. Remarquons que toute représentation irréductible de W_F est l'induite d'une représentation primitive.

Nous dirons qu'une représentation projective r de degré n de W_F est primitive si ses relèvements le sont. Soient K le corps fixé par le noyau d'une telle représentation r , et F_1 l'extension modérément ramifiée maximale de F incluse

dans K . Appelons r_1 la restriction de r à W_{F_1} et e l'indice de ramification de F_1 sur F .

THEOREME 5. - Soit r une représentation projective primitive de degré n de W_F . Avec les notations précédentes, l'on a

$$ea(r) = n(e - 1) + a(r_1) .$$

Remarque. - La représentation r_1 n'est plus primitive. Elle est même monomiale en ce sens que tous ses relèvements sont induits par un caractère d'un sous-groupe de W_F . Pour la question des exposants, on a ainsi réduit le cas des représentations primitives à celui des représentations monomiales.

Considérons le groupe $G = \text{Gal}(K/F)$ et notons G^u ses sous-groupes de ramification en numérotation supérieure. Soit α le plus grand indice u tel que G^u soit non trivial.

THEOREME 6. - Soit r une représentation projective primitive de degré $n = p^d$ de W_F . Alors on a

$$a(r) \geq p^d + (p^d + 1)\alpha .$$

Si $d = 1$, on a l'égalité dans la formule précédente.

Le cas $d = 1$ est dû à BUHLER [1]. Nous conjecturons qu'il y a égalité dans le cas général.

Ces résultats permettent de donner des informations sur les facteurs ϵ et en particulier de démontrer un phénomène de dégénérescence [4].

THEOREME 7. - Soit R une représentation irréductible de degré 2 de W_F . Soit χ un caractère de W_F .

Si $a(\chi) \geq a(R)$, on a

$$\epsilon(R \otimes \chi, \psi) = \epsilon(\chi, \psi) \epsilon(\chi \det R, \psi) .$$

En particulier, si l'on tord R par un caractère de W_F d'exposant assez grand, le facteur ϵ ne dépend plus que du déterminant de R .

3. Généralisations et espoirs.

On peut montrer [8] que l'analogie du théorème 7 est valable pour les représentations de $GL(2, F)$. De même, l'analogie du théorème 4 est vrai pour les représentations de $GL(n, F)$ [2].

Les résultats de [8] (lemme 7.1) et de [9] suggèrent d'ailleurs, pour $a(\chi) \geq \frac{a(R)}{2}$, un autre type de dégénérescence des facteurs ϵ d'une représentation linéaire R de dimension 2 de W_F . Mais nous n'avons pu encore le démontrer.

Néanmoins, l'on peut voir, pour une représentation R de degré premier ℓ , in-

duite à partir d'une extension de degré ℓ de F , que l'on a

$$\epsilon(R \otimes \chi, \psi) = \epsilon(\chi, \psi)^{\ell-1} \epsilon(\chi \det R, \psi),$$

dès que χ est un caractère de W_F de conducteur $a(\chi) \geq (2a(R)/\ell)$ [4].

L'on devrait pouvoir démontrer une telle dégénérescence pour les représentations de $GL(\ell, F)$, ℓ premier.

Remarquons enfin que le théorème 7 et son analogue pour les représentations de $GL(2, F)$ permettent de donner la correspondance de Langlands pour le corps $F = \mathbb{Q}_2$, de manière explicite et par un nombre fini de calculs. L'on utilise pour cela le calcul des facteurs ϵ effectué par A. NOBS [10] et P. KUTZKO [8] pour les représentations supercuspidales dites exceptionnelles de $GL(2, F)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BUHLER (J.). - Icosahedral Galois representations. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître) (Thèse, Harvard University, 1977).
- [2] CARAYOL (H.). - Représentations supercuspidales de GL_n , Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes (Gérardin), Université Paris-7, 1978, Publications mathématiques de l'Université de Paris-7 (à paraître).
- [3] HENNIART (G.). - Représentations du groupe de Weil d'un corps local, Publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud (à paraître) (Thèse de 3e cycle, Orsay, 1978).
- [4] HENNIART (G.). - Facteurs ϵ des représentations de W_F , en cours de rédaction.
- [5] JACQUET (H.) and GODEMENT (R.). - Zeta-functions of simple algebras. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 260).
- [6] JACQUET (H.) and LANGLANDS (R. P.). - Automorphic forms on $GL(2)$. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 114).
- [7] KOCH (H.). - Classification of the primitive representations of the Galois group of local fields, Invent. Math., Berlin, t. 40, 1977, p. 195-216.
- [8] KUTZKO (P.). - The exceptional representations of $GL(2)$, Invent. Math., Berlin (à paraître).
- [9] KUTZKO (P.) et GÉRARDIN (P.). - Manuscrit en cours de rédaction.
- [10] NOBS (A.). - Les représentations exceptionnelles de $GL_2(\mathbb{Q}_2)$ et $PGL_2(\mathbb{Q}_2)$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 767-769.
- [11] PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I.). - Converse theory for $GL(3)$, University of Maryland (Preprint).
- [12] TATE (J.). - Local constants, "Algebraic number theory (L-functions and Galois properties)" [1975. Durham], p. 89-131. - London, Academic Press, 1977.
- [13] WEIL (A.). - Basic number theory, 3rd edition. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 144).

(Texte reçu le 6 septembre 1978)

Guy HENNIART
 Attaché de Recherches CNRS
 Université Paris-Sud
 91405 ORSAY