Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MARTINE PATHIAUX

Familles fermées de n-uples de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 5, 7 p.

6 novembre 1978

FAMILLES FERMÉES DE n-UPLES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Martine PATHIAUX (*)
[Univ. P. et M. Curie]

On se propose de généraliser l'ensemble S des nombres de Pisot. Charles PISOT l'a lui-même généralisé dans une première direction, en considérant le cas où le nombre algébrique n'est plus entier, et a introduit les ensembles S_q [4].

Définition. - Soit $q \in \mathbb{N}^*$, S_q est l'ensemble des nombres algébriques θ de module > 1 aux quels on peut associer deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\mathbb{Z}[z]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° $Q(0) = q$,

2° $\frac{1}{\theta}$ est le seul zéro de $Q(z)$ dans $|z| \leqslant 1$,

3° $A(\frac{1}{\theta}) \neq 0$,

4° $|\frac{A(z)}{Q(z)}| \leqslant 1$ si $|z| = 1$,

5° $|A(0)| \geqslant |Q(0)|$.

Les ensembles S_q sont fermés. De plus, $S_1 = S$, et dans ce cas la condition 5° est inutile, car automatiquement réalisée.

Une autre manière de généraliser cet ensemble S est de considérer des n-uples $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ constitués de nombres algébriques.

Définition. - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Σ^n désigne l'ensemble des n-uples $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ où θ_i, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, est un nombre algébrique de module strictement supérieur à 1, dont tous les conjugués, autres que θ_j pour $j \neq i$, sont de module strictement inférieur à 1.

Deux éléments de Σ^n sont égaux, s'ils sont égaux dans leur ensemble. On définit sur Σ^n une topologie naturelle de sorte que si $t_j = (\theta_1^{(j)}, \ldots, \theta_n^{(j)})$ est une suite d'éléments de Σ^n, alors $\lim_{j\to\infty} t_j = (\theta_1^*, \ldots, \theta_n^*)$ si, et seulement si, on peut ranger les éléments de t_j de sorte que

$$\lim_{j\to\infty} \theta_i^{(j)} = \theta_i^* \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Remarque. - CANTOR [2] a étudié la sous-famille de Σ^n constituée d'éléments où les θ_i sont entiers algébriques sans toutefois prouver que cette sous-famille est fermée. Le seul résultat positif est dû à KELLY [3], qui a démontré que la

---

(*) Texte reçu le 21 mai 1979
Martine PATHIAUX, 187 boulevard Bineau, 92200 NEUILLY

sous-famille de Σ^2, constituée d'éléments (θ_1, θ_2), où, θ_1 et θ_2 sont complexes conjugués, entiers algébriques, est fermée.

De façon plus précise, on essaye de déterminer des familles de sous-ensembles de Σ^n qui soient fermées, et telles que leur réunion soit Σ^n. Ces familles vont être déterminées à l'aide de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme, sans zéro sur $|z| = 1$, ait n zéros dans $|z| < 1$.

THÉORÈME 1. - Soit $Q(z)$ un polynôme à coefficients rationnels, n'ayant pas de zéro sur $|z| = 1$, vérifiant $Q(0) \neq 0$; une condition nécessaire et suffisante pour que $Q(z)$ ait n zéros dans $|z| < 1$ est qu'il existe 3 polynômes F_1, F_2, F_3 de $\mathbb{Q}[z]$ vérifiant

(i) $Q(z)\, F_3(z) = z^n\, F_1(z) + F_2(z)$,

(ii) $F_1(z)$ et $F_3(z)$ sans zéros dans $|z| \leq 1$,

(iii) $|F_2(z)| < |Q(z)\, F_3(z)|$ si $|z| = 1$.

Démonstration dans le cas où $n = 1$.

La condition suffisante est évidente d'après ROUCHÉ.

Démontrons la condition nécessaire : posons $Q(z) = (z - \frac{1}{\theta})D(z)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $D(z) \in \mathbb{R}[z]$ et $|\theta| > 1$, $D(z)$ a tous ses zéros dans $|z| > 1$.

Supposons par exemple $\theta > 0$. $Q(z)$ s'écrit alors

$$Q(z) = \frac{1}{\theta}(z - 1)\, D(z) + z(1 - \frac{1}{\theta})\, D(z) .$$

Posons $F_3^* = 1$, $F_2^* = \frac{1}{\theta}(z - 1)\, D(z)$, $F_1^* = (1 - \frac{1}{\theta})\, D(z)$; alors F_3^*, F_2^*, F_1^*, ont toutes les propriétés requises sauf une, celle d'appartenir à $\mathbb{Q}[z]$. En effet, (i) et (ii) sont réalisées.

De plus,

$$\left|\frac{1}{\theta}(z - 1)\right| \leq \frac{1}{\theta}|\theta - z| = \frac{1}{\theta}|1 - \theta z| = \left|z - \frac{1}{\theta}\right| \quad \text{si} \quad |z| = 1 .$$

Donc

$$|Q(z)| > |F_2^*(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1 .$$

Approchons alors les coefficients de D et θ par des rationnels à ε près.

$$D(z) = D_\varepsilon(z) + R_\varepsilon(z) \quad \text{avec} \quad D_\varepsilon(z) \in \mathbb{Q}[z] , \quad \|R_\varepsilon(z)\| < \varepsilon ,$$

$$\theta = a_\varepsilon + b_\varepsilon \quad \text{avec} \quad a_\varepsilon \in \mathbb{Q} , \quad |b_\varepsilon| < \varepsilon ,$$

alors

$$Q(z) = z(1 - \frac{1}{a_\varepsilon})\, D_\varepsilon(z) + F_{2,\varepsilon}(z) \quad \text{avec} \quad F_{2,\varepsilon}(z) \in \mathbb{Q}[z] .$$

Posons $F_{1,\varepsilon} = (1 - \frac{1}{a_\varepsilon})D_\varepsilon(z)$. Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$, $F_{1,\varepsilon}$ tend vers F_1^*, et $F_{2,\varepsilon}$ vers F_2^* uniformément sur $|z| = 1$.

Le théorème de Rouché implique que, si ε est suffisamment petit, $F_{1,\varepsilon}$ n'a pas de zéro dans $|z| \leqslant 1$.

De plus,

$$|F_{2,\varepsilon}| < |Q(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1$$

si ε est petit puisque

$$|F_2^*| < |Q(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1 \ .$$

Donc si ε est petit, $F_{3,\varepsilon} = 1$, $F_{2,\varepsilon}$, $F_{1,\varepsilon}$ répondent à la question.

La démonstration dans le cas général consiste à montrer que la propriété est vraie dans $\underset{\sim}{R}$, et on approche ensuite une solution trouvée par des rationnels.

Notation. - Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| \leqslant 1$, holomorphe en $z = 0$, avec $f(z) = u_0 + u_1 z + \dots$ au voisinage de $z = 0$, où les u_i sont réels. On note

$$\delta_i(f) = \begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_i & u_{i-1} & u_{i-2} & \dots & u_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & u_0 & u_1 & \dots & \dots & u_i \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & u_0 & \dots & \dots & u_{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & u_0 \end{vmatrix}$$

et

$$d_{n,r}(f) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & u_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r-1} & u_{r-2} & \dots & u_0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_r & u_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & u_0 & \dots & u_{r-1} & u_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & u_0 & u_{n-r} \end{vmatrix} \qquad d_{1,0}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix}$$

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $(\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_n)$ <u>un élément de</u> Σ^n , <u>alors il existe deux polynômes</u> $A(z)$ <u>et</u> $Q(z)$ <u>de</u> $\underset{\sim}{Z}[z]$ <u>tels que</u>

(i) $Q(0) \neq 0$,

(ii) $\frac{1}{\theta_1} , \frac{1}{\theta_2} , \dots , \frac{1}{\theta_n}$ <u>sont les seuls zéros de</u> $Q(z)$ <u>dans</u> $|z| \leqslant 1$

(iii) $A(\frac{1}{\theta_i}) \neq 0$ <u>pour</u> $i = 1 , 2 , \dots , n$,

(iv) $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right| \leqslant 1$ <u>si</u> $|z| = 1$,

(v) $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \dots$ <u>avec</u> $\delta_i(\frac{A}{Q}) \geqslant 0$ <u>pour</u> $i = 0 , 1 , \dots , n-1$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $P(z)$ le polynôme de degré minimal, primitif, à coefficient dans $\underset{\sim}{Z}$, dont $\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_n$ soient racines et $\tilde{P}(z)$ son polynôme réciproque. Alors $\tilde{P}(z)$ a exactement n racines dans $|z| < 1$ et aucune racine dans $|z| = 1$. Le théorème 1 implique qu'il existe 3 polynômes F_1 , F_2 , F_3 de $\underset{\sim}{Z}[z]$ tels que

$$\tilde{P}(z)\, F_3(z) = z^n\, F_1(z) + F_2(z) \quad \text{avec } F_1 \text{ et } F_3 \text{ sans zéro dans } |z| \leqslant 1$$

et

$$|\tilde{P}(z)\, F_3(z) > |F_2(z)| \quad \text{si } |z| = 1 .$$

Prenons $Q(z) = \tilde{P}(z)\, F_3(z)$ et $A(z) = F_2(z)$, alors les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) sont vérifiées. De plus,

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{F_2(z)}{z^n\, F_1(z) + F_2(z)} = 1 + u_n\, z^n + \dots$$

Donc

$$\delta_0(\tfrac{A}{Q}) = \delta_1(\tfrac{A}{Q}) = \dots = \delta_{n-1}(\tfrac{A}{Q}) = 0$$

et (v) est vérifiée.

<u>Définition</u>. - Soit $q \in \underset{\sim}{N}^*$ et $n \in \underset{\sim}{N}^*$, S_q^n est l'ensemble des éléments $(\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_n)$ de Σ^n aux quels on peut associer deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\underset{\sim}{Z}[z]$ vérifiant :

(i) $Q(0) = q$,

(ii) $\frac{1}{\theta_1} , \frac{1}{\theta_2} , \dots , \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros de $Q(z)$ dans $|z| \leqslant 1$,

(iii) $A(1/\theta_i) \neq 0$ pour $i = 1 , 2 , \dots , n$,

(iv) $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right| \leqslant 1$ si $|z| = 1$,

(v) $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \dots$ avec $\delta_i(\frac{A}{Q}) \geqslant 0$ pour $i = 0 , 1 , \dots , n-1$.

<u>Remarque</u>. - $S_1^1 = S$, $S_q^1 = S_q$.

THÉORÈME 3. - $\bigcup_{q \in \underset{\sim}{N}^*} S_q^n = \Sigma^n$.

Cette propriété résulte immédiatement du théorème 2.

LEMME. - <u>Soit</u> $f(z)$ <u>une fraction rationnelle</u>, <u>sans pôle à l'origine</u>, <u>avec</u> $f(z) = u_0 + u_1 z + \dots$ <u>au voisinage de</u> 0 , u_i <u>réels</u>, <u>vérifiant</u> :

(i) $|f(z)| \leqslant 1$ <u>si</u> $|z| = 1$,

(ii) $\delta_i(f) \geqslant 0$ <u>pour</u> $i = 0 , \dots , n-1$.

<u>Soit</u> $r = \min(n-1 , \inf i$ <u>tel que</u> $\delta_i = 0)$, <u>si</u> $d_{n,r} \neq 0$, <u>alors</u> $f(z)$ <u>a au moins</u> n <u>pôles dans</u> $|z| < 1$, <u>et si</u> $f(z)$ <u>a exactement</u> n <u>pôles, alors</u> $d_{n,r} \neq 0$.

THÉORÈME 4. - S_q^n <u>est fermé.</u>

<u>Démonstration.</u> - Soit $t_j = (\theta_1^{(i)} , \ldots , \theta_n^{(i)})$ une suite d'éléments de S_q^n tels que

$$\lim_{i\to\infty} \theta_j^{(i)} = \theta_j^* \quad \text{pour} \quad j = 1 , \ldots , n \quad \text{avec} \quad |\theta_j|^* > 1 .$$

A chaque élément t_j on associe une fraction rationnelle A_j/Q_j qui sert à le définir. Les fractions rationnelles appartiennent alors à la famille $\mathfrak{F}(q , n , \delta)$, définie par Charles PISOT [4], qui est compacte. Donc une sous-suite (notée de façon identique) converge vers A^*/Q^* uniformément sur tout compact de $|z| < 1$, et dont les pôles sont pris parmi les $1/\theta_i^*$ et $A^*/Q^* \in \mathfrak{F}(q , n , \delta)$.

Il suffit simplement alors de démontrer que A^*/Q^* a effectivement n pôles dans $|z| < 1$.

Cela résulte du lemme précédent et du fait que $q^{s+1} u_{i,s} \in \underset{\sim}{Z}$. Donc il existe i_0 tel que, pour $i \geqslant i_0$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$,

$$u_s^* = u_{i,s} \quad \text{si} \quad \frac{A_i}{Q_i} = u_{i,0} + u_{i,1} z + \ldots \quad \frac{A^*}{Q^*} = u_0^* + u_1^* z + \ldots$$

au voisinage de $z = 0$.

THÉORÈME 5. - <u>Si</u> $(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n) \in S_q^n$ <u>est point limite de</u> S_q^n , <u>alors</u> $|\theta_i| \neq 1$.

<u>Remarque.</u> - On peut essayer de préciser les "plus petits" éléments de S_q^n , c'est-à-dire de déterminer, par exemple, $\inf_{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\in S_q^n} \prod |\theta_i|$, et pour quels n-uples ce minimum est atteint.

THÉORÈME 6. - $\inf_{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\in S_1^n} = \theta_0$, <u>où</u> θ_0 <u>est le plus petit élément de l'ensemble</u> S , <u>c'est-à-dire la racine</u> > 1 <u>du polynôme</u> $z^3 - z - 1$.

Cette propriété découle de résultats de SMYTH [5] et AMARA. De plus, ce minimum est atteint pour le n-uple $(\xi \sqrt[n]{\theta_0} , \xi^2 \sqrt[n]{\theta_0} , \ldots , \xi^n \sqrt[n]{\theta_0})$ où ξ est une racine primitive n-ième de l'unité.

On obtient une autre classification de l'ensemble Σ^n en sous-familles fermées, généralisant les sous-ensembles introduits par Marie-José BERTIN [1], en utilisant le résultat suivant :

THÉORÈME 7. - <u>Soit</u> $F(z)$ <u>un polynôme de</u> $\underset{\sim}{Q}[z]$, <u>n'ayant pas de zéro dans</u> $|z|=1$, <u>vérifiant</u> $Q(0) \neq 0$. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $F(z)$ <u>ait</u> n <u>zéros dans</u> $|z| < 1$ <u>est qu'il existe 3 polynômes</u> F_1 , F_2 , F_3 <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}[z]$ <u>véri-</u>

<u>fiant les propriétés suivantes</u> :

(i) $F_3(z)\,F(z) = z^n F_1(z) + F_2(z)$,

(ii) $F_1(z)$ et $F_3(z)$ <u>n'ont pas de zéro dans</u> $|z| \leqslant 1$,

(iii) $|F_1(z)| > |F_2(z)|$ <u>si</u> $|z| = 1$.

<u>Démonstration</u> (avec $n = 1$). - La condition <u>suffisante</u> est évidente d'après ROUCHÉ.

Démontrons la condition <u>nécessaire</u> : $F(z)$ s'écrit alors

$$F(z) = (z - \frac{1}{\theta})D(z) \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R} , \quad D(z) \in \mathbb{R}[z] , \quad |\theta| > 1 ,$$

$D(z)$ n'a pas de zéro dans $|z| \leqslant 1$.

Soit $F(z) = zD(z) - \frac{1}{\theta} D(z)$. Posons

$$F_1^* = D(z) , \quad F_2^* = - \frac{1}{\theta} D(z) , \quad F_3^* = 1 .$$

Alors, F_1^* , F_2^* , F_3^* ont toutes les propriétés requises sauf une, celle d'appartenir à $\mathbb{Q}[z]$. De façon identique au théorème 1, on approche θ et les coefficients de D , par des rationnels pour obtenir le résultat cherché.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $(\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_n)$ <u>un élément de</u> Σ^n , <u>alors il existe deux polynômes</u> $A(z)$ <u>et</u> $Q(z)$ <u>de</u> $\mathbb{Z}[z]$ <u>vérifiant</u> :

(i) $A(0) \neq 0$,

(ii) $\frac{A(z)}{Q(z)}$ <u>holomorphe dans</u> $|z| \leqslant 1$,

(iii) $|\frac{A(z)}{Q(z)}| < 1$ <u>si</u> $|z| = 1$,

(iv) $\frac{1}{\theta_1} , \frac{1}{\theta_2} , \dots , \frac{1}{\theta_n}$ <u>sont les seuls zéros de l'équation</u> $z^n Q(z) - A(z) = 0$ <u>dans</u> $|z| \leqslant 1$.

(Démonstration analogue à celle du théorème 2.)

<u>Définition</u>. - Soit $0 < h < 1$ et $q \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\Sigma^n_{q,h}$ est l'ensemble des éléments $(\theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_n)$ de Σ^n auxquels on peut associer deux polynômes de $\mathbb{Z}[z]$ vérifiant :

(i) $A(0) \neq 0$,

(ii) $\frac{A(z)}{Q(z)}$ holomorphe dans $|z| \leqslant 1$,

(iii) $|\frac{A(z)}{Q(z)}| < 1$ si $|z| = 1$,

(iv) $\frac{1}{\theta_1} , \dots , \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros du polynôme $z^n Q(z) - A(z)$ dans $|z| \leqslant 1$,

(v) $Q(0) = q$.

On peut alors facilement démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - $\bigcup_{q \in \mathbb{N}^* - \{1\}, 0<h<1} \Sigma^n_{q,h} = \Sigma^n$.

THÉORÈME 9. - $\Sigma^n_{q,h}$ est fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTIN (M.-J.). - Familles fermées de nombres et d'entiers algébriques, Thèse Sc. math.

[2] CANTOR (D. G.). - On sets of algebraic integers whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.

[3] KELLY (J. B.). - A closed set of algebraic integers, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 565-572.

[4] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[5] SMYTH (C. J.). - On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.