Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paul Jaffard

Structure des groupes préordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 5-6 (1951-1953), exp. nº 4, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1951-1953__5-6__A4_0>

IV. STRUCTURE DES GROUPES PRÉORDONNÉS

par Paul JAFFARD

INTRODUCTION. - Cet exposé fait suite au précédent (La théorie des idéaux d'Artin, Prüfer et Lorenzen) que nous désignerons par T.I.A.

Etant donnés le groupe préordonné $\mathfrak{g}$, O (ou $\mathfrak{g}_+$) l'ensemble des entiers de $\mathfrak{g}$, et G le groupe ordonné associé, nous rappelons que O est dit <u>semi-groupe de valuation</u> si G est totalement ordonné. L'application canonique correspondante v de $\mathfrak{g}$ sur G est dite <u>valuation</u> de $\mathfrak{g}$.

Si G n'est pas totalement ordonné, nous allons chercher dans ce qui suit à le plonger dans un produit direct ordonné de groupes totalement ordonnés. (Etant donné un ensemble $(\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ de groupes totalement ordonnés, le <u>produit direct ordonné de ces groupes</u> est le produit direct Γ au sens habituel ordonné par la relation $x \geqslant y \rightleftarrows (x_\iota \geqslant y_\iota$ pour tout $\iota \in I)$, Γ est un groupe réticulé). Si G est plongé dans un tel groupe Γ, si φ_ι désigne l'application canonique de G dans Γ_ι et si on pose $\Gamma'_\iota = \varphi_\iota(G)$, on voit que G est encore plongé dans le produit direct des groupes Γ'_ι $(\iota \in I)$ et que cette fois pour tout ι, G s'applique canoniquement <u>sur</u> Γ'_ι. Nous supposerons toujours désormais qu'il en soit ainsi (on aura donc $\Gamma_\iota = \Gamma'_\iota = \varphi_\iota(G)$). On voit alors que l'application canonique v_ι de $\mathfrak{g}$ sur Γ_ι (produit des applications canoniques de $\mathfrak{g}$ sur G et de G sur Γ_ι) est une valuation de $\mathfrak{g}$. De plus si $x , y \in \mathfrak{g}$:

$$(1) \qquad x \geqslant y \rightleftarrows (v_\iota(x) \geqslant v_\iota(y) \text{ pour tout } \iota \in I).$$

Réciproquement si on se donne un ensemble $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations de $\mathfrak{g}$ tel que la relation (1) se trouve vérifiée, et si Γ_ι est le groupe totalement ordonné associé à la valuation v_ι, on voit que le groupe ordonné G associé à $\mathfrak{g}$ se trouve plongé dans le produit direct ordonné $\prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$. Le problème que nous posons se ramène donc à trouver un ensemble de valuation $(v_\iota)_{\iota \in I}$ tel que la relation (1) se trouve satisfaite.

1. Homomorphismes croissants.

Etant donnés deux groupes préordonnés $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$, un homomorphisme φ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}'$ sera dit croissant si pour $x , y \in \mathfrak{G}$:

$$(2) \qquad x \geq y \quad \text{entraîne} \quad \varphi(x) \geq \varphi(y) .$$

Si $\mathfrak{G}'$ est un groupe ordonné on voit facilement que l'homomorphisme croissant φ se factorise en l'application canonique de $\mathfrak{G}$ sur le groupe ordonné associé G et en un homomorphisme croissant de G dans $\mathfrak{G}'$.

Si G' est le groupe ordonné associé à $\mathfrak{G}'$, le produit de φ et de l'application canonique de $\mathfrak{G}'$ sur G' est encore un homomorphisme croissant de $\mathfrak{G}$ dans G'. On en déduit le diagramme de compatibilité :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathfrak{G}' \arrow[d] \\ G \arrow[r, dash] & G' \end{tikzcd}$$

Soit φ un homomorphisme croissant du groupe préordonné $\mathfrak{G}$ sur le groupe préordonné $\mathfrak{G}'$. Soit O' l'ensemble des entiers de $\mathfrak{G}'$. $O_1 = \varphi^{-1}(O')$ est un certain sous-semi-groupe de $\mathfrak{G}$ qui contient O. Ce semi-groupe O_1 définit sur $\mathfrak{G}$ une nouvelle structure de groupe préordonné $\mathfrak{G}_1$ dont le groupe ordonné associé est $G_1 \cong \mathfrak{G}_1/(O_1 \cap O_1^{-1})$. On voit facilement que G_1 est un groupe ordonné isomorphe au groupe ordonné associé à $\mathfrak{G}'$.

Réciproquement, si on se donne un semi-groupe O_1 de $\mathfrak{G}$ qui contient O ce semi-groupe définit sur $\mathfrak{G}$ une nouvelle structure de groupe préordonné $\mathfrak{G}_1$ et l'application identique de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}_1$ est croissante. On en déduit un homomorphisme croissant de $\mathfrak{G}$ sur G_1.

THÉORÈME 1. - Les homomorphismes croissants de $\mathfrak{G}$ sur des groupes ordonnés correspondant biunivoquement aux sous-semi-groupes de $\mathfrak{G}$ qui contiennent O.

A l'homomorphisme croissant φ de $\mathfrak{G}$ sur le groupe ordonné G' correspond le semi-groupe $\varphi^{-1}(G'_+)$. Au semi-groupe O_1 contenant O correspond l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{G}$ sur le groupe ordonné $\mathfrak{G}/(O_1 \cap O_1^{-1})$.

Dans le cas où $\mathfrak{G} = G$ est un groupe ordonné, on voit que le noyau de φ est nul si et seulement si $O_1 \cap O_1^{-1} = \{1\}$. En ce cas G' sera le groupe G lui-même, mais muni d'une structure d'ordre plus fine. G' sera dit alors un affinement de G. Une étude systématique des affinements d'un groupe ordonné permet d'arriver au théorème 12 sans se servir de la notion de système de r-idéaux (on pourra consulter à ce sujet le mémoire de DIEUDONNÉ).

Etant donné un groupe préordonné $\mathcal{G}$, une valuation v de $\mathcal{G}$ sera dite compatible avec sa structure d'ordre si et seulement si elle définit un homomorphisme croissant de $\mathcal{G}$ sur un groupe totalement ordonné. On a alors :

THÉORÈME 2. - Les valuations de $\mathcal{G}$ compatibles avec sa structure d'ordre correspondent biunivoquement aux sous-semi-groupes de valuation de $\mathcal{G}$ qui contiennent O.

Par la suite les valuations d'un groupe préordonné qui seront considérées seront toujours compatibles avec sa structure d'ordre. Nous ne le répéterons pas chaque fois et quand nous parlerons d'une valuation de $\mathcal{G}$ il faudra entendre "valuation compatible avec sa structure d'ordre". On voit aisément que si $(v_\iota)_{\iota \in I}$ est un ensemble de valuation de $\mathcal{G}$ et si pour chaque $\iota \in I$, O_ι désigne le semi-groupe de valuation correspondant à v_ι, une condition nécessaire et suffisante pour que la condition (1) se trouve réalisée est que $O = \bigcap_{\iota \in I} O_\iota$.

COROLLAIRE du théorème 2. - Plonger le groupe G dans un produit de groupes totalement ordonnés revient à représenter le semi-groupe des entiers de $\mathcal{G}$ comme intersection de semi-groupes de valuations.

S étant un ensemble multiplicativement clos de $\mathcal{G}$, on désigne par O_S le sous-ensemble de $\mathcal{G}$ ainsi défini :

$$(3) \qquad x \in O_S \iff \exists\, a \in O \text{ et } s \in S \text{ avec } x = as^{-1}$$

O_S est un sous-semi-groupe de $\mathcal{G}$ qui contient O.

THÉORÈME 3. - Si O' est un sous-semi-groupe de $\mathcal{G}$ qui contient O, il existe un sous-ensemble S multiplicativement clos de $\mathcal{G}$ tel que $O' = O_S$.

Il suffit pour le voir de prendre pour S l'ensemble des inverses des éléments de O'.

Etant donnés un système de r-idéaux défini sur $\mathcal{G}$ et un r-idéal premier $\mathfrak{p}$, si $S = O \cap \complement \mathfrak{p}$ on pose $O_S = O_{\mathfrak{p}}$.

2. Cas d'un groupe réticulé.

Etudions d'abord le cas où le groupe ordonné associé à $\mathcal{G}$ est réticulé. On dira aussi que $\mathcal{G}$ est préréticulé. Si $a, b \in \mathcal{G}$, $\inf(a, b)$ et $\sup(a, b)$ sont définis à une unité près de $\mathcal{G}$.

G étant réticulé, un sous-groupe H de G est dit <u>propre</u> ou <u>coréticulé</u> si $x , y \in H \rightarrow \inf(x , y) \in H$ (ceci entraîne également $\sup(x , y) \in H$).

<u>Un sous-groupe de G peut être réticulé sans être propre.</u>

G et G' étant deux groupes réticulés, un homomorphisme φ de G dans G' est dit <u>propre</u> ou <u>coréticulé</u> si $\varphi(\inf(x , y)) = \inf(\varphi(x) , \varphi(y))$. Un homomorphisme propre est nécessairement croissant. Définitions analogues pour $\mathcal{G}$.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que tout groupe réticulé peut être considéré comme un sous-groupe propre d'un produit de groupes totalement ordonnés. Soit $\Gamma = \prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$ un produit de groupes totalement ordonnés et G un sous-groupe réticulé de Γ. Soit v_ι la valuation de G correspondant à ι. On voit à partir des définitions que <u>la condition nécessaire et suffisante pour que G soit un sous-groupe propre de Γ est que pour tout $\iota \in I$, v_ι soit un homomorphisme propre de G</u>.

Etant donnés un groupe préréticulé $\mathcal{G}$, un sous-semi-groupe $0'$ de $\mathcal{G}$ contenant 0 et l'homomorphisme croissant φ de G sur $\mathcal{G}/0' \cap 0'^{-1}$ nous allons chercher les conditions pour que Γ soit totalement ordonné et que φ soit propre. Les théorèmes 4 et 5 répondent à ces questions :

THÉORÈME 4. – <u>La condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit réticulé et φ un homomorphisme propre est qu'il existe un sous-ensemble S de 0 qui soit multiplicativement clos et tel que $0' = 0_S$</u>.

Pour simplifier les notations on va supposer dans les démonstrations des théorèmes 4 et 5 que $\mathcal{G} = G$. Ceci ne change évidemment rien aux résultats.

<u>Nécessité</u>. – Soit H le noyau de φ. H est un sous-groupe propre de G. Soit $S = H \cap 0$. S est un sous-ensemble multiplicativement clos de 0.

Montrons que $0' = 0_S$. $0'$ est ainsi défini :

$$(4) \qquad x \in 0' \rightleftarrows \varphi(x) \geq 1 .$$

Soit $x \in 0_S$. $\exists\, a \in 0$, $s \in S$ avec $x = \frac{a}{s}$. Donc $\varphi(x) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} = \varphi(a) \geq 1$ et $x \in 0'$.

Soit $x \in 0'$. $\varphi(x) \geq 1 \rightarrow \inf(\varphi(x) , 1) = 1$. Mais φ étant propre,

$$\varphi(\inf(x , 1)) = \inf(\varphi(x) , 1) = 1$$

et

$$\inf(x , 1) \in H .$$

Comme $\inf(x , 1) \leq 1$,

$$s = (\inf(x , 1))^{-1} \in H \cap 0 = S .$$

D'autre part $a = \sup(x , 1) \in 0$. Comme $x = \inf(x , 1) \sup(x , 1)$ on en déduit $x = \frac{a}{s} \in 0_S$.

Suffisance. - Soit S un sous-ensemble multiplicativement clos de 0 . Montrons d'abord que :

$$(5) \qquad x , y \in 0_S \longrightarrow \inf(x , y) \in 0_S .$$

Si $x , y \in 0_S$, $\exists$ $a , b \in 0$, $s , t \in S$ avec $x = \frac{a}{s}$, $y = \frac{b}{t}$. Alors

$$\inf(x , y) = \frac{\inf(at , bs)}{st} .$$

Comme $S < 0$, $at , bs \in 0$ et $\inf(at , bs) \in 0$. $st \in S$ et $\inf(x , y) \in 0_S$. Mais alors

$$\varphi(z) \leq \varphi(x) , \varphi(y) \longrightarrow \frac{x}{z} , \frac{y}{z} \in 0_S$$

ce qui équivaut, d'après (5) à

$$\frac{\inf(x , y)}{z} \in 0_S$$

ou

$$\varphi(z) \leq \varphi(\inf(x , y)) .$$

On voit alors que $\inf(\varphi(x) , \varphi(y))$ existe et est égal à $\varphi(\inf(x , y))$, d'où le théorème.

THÉORÈME 5. - La condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit totalement ordonné et φ un homomorphisme propre est qu'il existe un t-idéal premier $\mathfrak{p}$ de 0 tel que $0' = 0_{\mathfrak{p}}$.

Gardons les mêmes notations qu'au théorème 4.

Nécessité. - Soit S défini comme dans la nécessité du théorème 4 et soit $\mathfrak{p}$ le complémentaire de S dans 0 . Montrons que $\mathfrak{p}$ est un t-idéal : $\mathfrak{p}$ est défini simplement par :

$$(6) \qquad x \in \mathfrak{p} \rightleftarrows \varphi(x) > 1 .$$

On a :

$$(7) \qquad x , y \in \mathfrak{p} \longrightarrow \inf(x , y) \in \mathfrak{p} .$$

En effet $x , y \in \mathfrak{p} \longrightarrow \varphi(x) , \varphi(y) > 1$, et φ étant propre,

$$\varphi(\inf(x , y)) = \inf(\varphi(x) , \varphi(y)) > 1 .$$

Donc $\inf(x , y) \in \mathfrak{p}$.

(8) $$x \in \mathfrak{p} \text{ et } a \in O \longrightarrow ax \in \mathfrak{p} .$$

En effet $\varphi(x) > 1$, $\varphi(a) \geq 1$ entraînent $\varphi(ax) > 1$.

Ceci posé $\mathfrak{p}_t = \bigcup_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{p}} \mathfrak{n}_t$ où $\mathfrak{n}$ parcourt l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{n} = (a_1 , \dots , a_n)$. Puisque G est réticulé, $\mathfrak{n}_t = \inf(a_1 , \dots , a_n)$, or d'après (7), $\inf(a_1 , \dots , a_n) \in \mathfrak{p}$ et d'après (8) $\mathfrak{n}_t \subset \mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{p}_t = \mathfrak{p}$ est un t-idéal qui est premier puisque S est multiplicativement clos.

<u>Suffisance</u>. - Remarquons d'abord que :

(9) $$\varphi(x) > 1 \rightleftarrows \exists\, p \in \mathfrak{p} ,\ s \in S \text{ avec } x = ps^{-1} .$$

En effet si $x = ps^{-1}$, $\varphi(p) \geq 1$ et $\varphi(s) = 1$ entraînent $\varphi(x) \geq 1$. Si on avait $\varphi(x) = 1$, $\exists\, a \in O$, $t \in S$ avec $x = \frac{t}{a} = \frac{p}{s}$ et $st = pa$. Mais $st \in S$ et $pa \in \mathfrak{p}$ montrent que ceci n'est pas possible.

Réciproquement si $\varphi(x) > 1$, $x \in O_S$ et $a \in O$, $s \in S$ avec $x = as^{-1}$. Mais on ne peut avoir $a \in S$ sans cela $\varphi(x) = 1$, donc $a \in \mathfrak{p}$.

Ceci posé le théorème 4 montre que Γ est réticulé et que l'application φ est propre. Montrons que Γ est totalement ordonné. Si Γ n'était pas totalement ordonné il existerait deux éléments entiers α et β de Γ tels que $\gamma = \inf(\alpha , \beta) \neq \alpha , \beta$. Posons $\alpha' = \alpha\gamma^{-1}$ et $\beta' = \beta\gamma^{-1}$.. α' et β' sont deux éléments entiers de Γ , différents de 1 et tels que $\inf(\alpha' , \beta') = 1$. Or si $\alpha' = \varphi(x)$, $\beta' = \varphi(y)$, $\exists\, p , q \in \mathfrak{p}$, $s , t \in S$ avec $x = ps^{-1}$, $y = qt^{-1}$ et $\inf(\alpha' , \beta') = \varphi(\inf(x , y)) = 1$. Or

$$\inf(x , y) = \inf(ps^{-1} , qt^{-1}) = \frac{\inf(pt , qs)}{st}$$

Mais pt , $qs \in \mathfrak{p}$ entraînent puisque $\mathfrak{p}$ est un t-idéal, $\inf(pt , qs) \in \mathfrak{p}$, et en vertu de (9), $\varphi(\inf(x , y)) > 1$, d'où une contradiction. Le corollaire du théorème 2, le théorème 4 et la remarque faite au début de ce paragraphe montrent que pour qu'un groupe réticulé G soit réalisable comme sous-groupe propre d'un produit de groupes totalement ordonnés $\Gamma = \prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$, il faut et il suffit qu'a chaque indice ι corresponde un t-idéal premier $\mathfrak{p}_\iota$ tel que Γ_ι soit isomorphe à $\mathcal{G}/(O_{\mathfrak{p}_\iota} \cap O_{\mathfrak{p}_\iota}^{-1})$ et que $\bigcap_\iota O_{\mathfrak{p}_\iota} = 0$.

THÉORÈME 6. - Si G est un groupe préréticulé et $(\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in I}$ un ensemble de t-idéaux premiers de $\mathcal{G}$ (différents de 0) tel que tout élément de $\mathcal{G}$ strictement supérieur à 1 soit contenu dans un des $\mathfrak{p}_\iota$, il existe un isomorphisme propre de G dans $\Gamma = \prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$ avec

$$\Gamma_\iota \cong \mathcal{G}/(0_{\mathfrak{p}_\iota} \cap 0^{-1}_{\mathfrak{p}_\iota}) .$$

Il suffit de montrer que $\bigcap_\iota 0_{\mathfrak{p}_\iota} = 0$.

Si $x \notin 0$, soit y un plus grand commun diviseur de x et de 1. $y < 1$ donc $y^{-1} > 1$ et $\exists\ \iota \in I$ avec $\mathfrak{p}_\iota \ni y^{-1}$. Soit v_ι la valuation de $\mathcal{G}$ correspondante.

$$\inf(v_\iota(x) , v_\iota(1)) = v_\iota\ (\inf(x , 1)) = v_\iota(y) < 1 ,$$

donc $v_\iota(x) < 1$ et $x \notin 0_{\mathfrak{p}_\iota}$. On a donc bien $\bigcap_{\iota \in I} 0_{\mathfrak{p}_\iota} = 0$.

Si $\mathcal{G} \ni a > 1$, (a) est un t-idéal différent de $\mathcal{G}$. Le corollaire 1 de (T.I.A., théorème 16) montre donc qu'il existe un t-idéal premier maximal $\mathfrak{p}$ tel que $(a) \subset \mathfrak{p}$. Par suite l'ensemble de tous les t-idéaux premiers maximaux de 0 répond aux conditions du théorème 6 et on a le :

THÉORÈME 7 (Lorenzen). - Tout groupe réticulé peut être considéré comme un sous-groupe propre d'un produit de groupes totalement ordonnés.

REMARQUE. - Si G est un groupe réticulé non totalement ordonné et si Γ est un groupe totalement ordonné qui soit un affinement de G, l'application identique φ de G sur Γ ne peut être propre : Soit en effet $a , b \in G$ avec $a , b \neq \inf(a , b)$. On a par exemple

$$\varphi(a) = \inf(\varphi(a) , \varphi(b)) \neq \varphi(\inf(a , b)) .$$

La méthode des affinements, si elle permet de plonger tout groupe réticulé dans un produit de groupes totalement ordonnés, ne permet donc pasde le faire d'une manière propre.

3. Cas d'un groupe quelconque.

$\mathcal{G}$ étant un groupe préordonné quelconque et G son groupe ordonné associé, nous voulons chercher un ensemble de semi-groupes de valuation $(0_\iota)_{\iota \in I}$ de $\mathcal{G}$ tel que $0 = \bigcap_\iota 0_\iota$, 0 désignant l'ensemble des entiers de $\mathcal{G}$.

Si on se donne un système de r-idéaux de caractère fini sur $\mathcal{G}$, un sur-semi-groupe $0'$ de 0 est dit r-semi-groupe si et seulement si

$$(10) \qquad \mathfrak{a} \subset 0' \longrightarrow \mathfrak{a}_r \subset 0' .$$

Puisque le r-système est de caractère fini, cette condition équivaut à :

(10') $$a_1 , \dots , a_n \in O' \longrightarrow (a_1 , \dots , a_n)_r \subset O'$$

Une valuation vide $\mathcal{G}$ est dite une r-valuation si le semi-groupe O' associé à v est un r-semi-groupe. On voit que pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que :

(11) $$v(a_1) , \dots , v(a_n) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad x \in (a_1 , \dots , a_n)_r \longrightarrow v(x) \geqslant 1 .$$

Il est facile de voir que dans le cas où il existe un corps K et un ordre A de K tel que $K^* = \mathcal{G}$ et $A^* = 0$, les d-semi-groupes de K^* correspondent biunivoquement aux sur-anneaux de A (contenus dans K) et que les d-valuations sont les valuations au sens habituel (c'est-à-dire telles que

$$v(x + y) \geqslant \inf(v(x) , v(y))) .$$

Tout sur-semi-groupe de 0 est évidemment un s-semi-groupe.

THÉORÈME 8. - Si $\mathcal{G}$ est un groupe réticulé toute valuation propre de $\mathcal{G}$ est une t-valuation et réciproquement.

Soit v une valuation propre de $\mathcal{G}$, $v(a_1) , \dots , v(a_n) \geqslant 1$ et $x \in (a_1 , \dots , a_n)_t$.

Soit $a = \inf(a_1 , \dots , a_n)$. Puisque v est propre, $v(a) \geqslant 1$, et comme $(a_1 , \dots , a_n)_t = (a)$, $x \geqslant a$ et $v(x) \geqslant 1$. Donc v est bien une t-valuation.

Réciproquement soit v une t-valuation de $\mathcal{G}$. Soient $x , y \in \mathcal{G}$. On a par exemple $v(x) \leqslant v(y)$. Comme v est une t-valuation, $v(yx^{-1}) \geqslant 1$ et $v(1) \geqslant 1$ entraînent

$$v(\inf(1 , yx^{-1})) = 1$$

ou

$$v(\inf(x , y)) = v(x) = \inf(v(x) , v(y))$$

v est bien propre.

Nous allons chercher s'il existe un ensemble $(O'_\iota)_{\iota \in I}$ de r-semi-groupes de valuation tel que $\bigcap_\iota O'_\iota = 0$.

Dans le cas des idéaux de Dedekind on sait d'après un théorème de Krull que l'anneau A est intersection d'anneaux de valuation si et seulement si il est entièrement clos dans K, c'est-à-dire d-clos. Nous allons montrer plus généralement que si le groupe préordonné est r-clos, 0 est intersection de r-semi-groupes de valuation.

Soit G le groupe ordonné associé à $\mathfrak{g}$. Nous allons plonger G dans un groupe réticulé Θ tel que les r-semi-groupes de valuation de G correspondent biunivoquement aux valuations propres de Θ.

Soit donc $\mathfrak{g}$ r-clos. Les r-idéaux de $\mathfrak{g}$ ne forment pas en général un semi-groupe, mais on va introduire un nouveau système de caractère fini, les r_a-système, tel que les r_a-idéaux forment un semi-groupe. Soit $\mathfrak{a} = \{a_1 , \ldots , a_n\}$. On définit ainsi $\mathfrak{a}_{r_a}$:

(13) $\quad x \in \mathfrak{a}_{r_a} \rightleftarrows$ un r-idéal fini $\mathfrak{c}_r$ avec $x\,\mathfrak{c}_r \subset \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r$

Montrons qu'on définit bien ainsi un système d'idéaux finis.

1° On a évidemment $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_{r_a}$ (il suffit de prendre $\mathfrak{c}_r = 0$).

2° Soit $\mathfrak{a} = \{a_1 , \ldots , a_n\} \subset \mathfrak{b}_{r_a}$. $a_i \in \mathfrak{b}_{r_a}$ implique qu'il existe un r-idéal fini $\mathfrak{z}_r^{(i)}$ tel que $a_i\,\mathfrak{z}_r^{(i)} \subset \mathfrak{b} \times \mathfrak{z}_r^{(i)}$.

Soit $\mathfrak{z}_r$ le r-idéal fini

$$\mathfrak{z}_r = \mathfrak{z}_r^{(1)} \times \ldots \times \mathfrak{z}_r^{(n)}$$

On a $(a_i)\,\mathfrak{z}_r \subset \mathfrak{b}_r \times \mathfrak{z}_r$ donc :

(14) $$\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{z}_r \subset \mathfrak{b}_r \times \mathfrak{z}_r .$$

Soit $x \in \mathfrak{a}_{r_a}$. Par définition $\exists\ \mathfrak{c}_r$ fini avec $x\,\mathfrak{c}_r \subset \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r$.

Mais alors en vertu de (14), $x(\mathfrak{c}_r \times \mathfrak{z}_r) \subset \mathfrak{b}_r \times (\mathfrak{c}_r \times \mathfrak{z}_r)$ et $x \in \mathfrak{b}_{r_a}$.

Par suite $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_{r_a} \longrightarrow \mathfrak{a}_{r_a} \subset \mathfrak{b}_{r_a}$

3° $x \in (a)_{r_a} \longrightarrow \exists\ \mathfrak{c}_r$ fini avec $x\,\mathfrak{c}_r \subset (a)\,\mathfrak{c}_r$, mais puisque $\mathfrak{g}$ est r-clos, en vertu du théorème 6 de T.I.A., $x\,\mathfrak{c}_r \subset (a)\,\mathfrak{c}_r$ équivaut à $x \in (a)$ donc $(a)_{r_a} = (a)$.

4° $x \in a\,\mathfrak{a}_{r_a} \rightleftarrows xa^{-1} \in \mathfrak{a}_{r_a} \rightleftarrows \exists\ \mathfrak{c}_r$ fini

avec

$$xa^{-1}\,\mathfrak{c}_r \subset \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r \rightleftarrows \exists\,\mathfrak{c}_r \text{ fini}$$

avec

$$x\,\mathfrak{c}_r \subset (a\,\mathfrak{a})_r \times \mathfrak{c}_r \rightleftarrows x \in (a\,\mathfrak{a})_{r_a}$$

Donc

$$a\ \mathfrak{a}_{r_a} = (a\ \mathfrak{a})_{r_a} .$$

THÉORÈME 9. - Si $\mathfrak{o}$ est r-clos la r_a-opération permet de définir un système d'idéaux.

On voit à partir des définitions que le r_a-système coïncide avec le r-système si et seulement si les r-idéaux finis forment un semi-groupe (propriété r-γ). De plus on a toujours $\mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{a}_{r_a}$.

COROLLAIRE. - Le r_a-système est moins fin que le r-système.

On a en effet $(\mathfrak{a}_{r_a})_r \subset (\mathfrak{a}_{r_a})_{r_a} = \mathfrak{a}_{r_a}$.

THÉORÈME 10. - Les r_a-idéaux finis forment un semi-groupe.

Pour cela on va montrer le lemme suivant.

LEMME. - Etant donné un système de r'-idéaux finis, la propriété r'-γ est équivalente à la condition : pour tout couple $\mathfrak{b}_{r'}$, $\mathfrak{c}_{r'}$ de r'-idéaux, $\mathfrak{c}_{r'} \subset \mathfrak{b}_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'}$ entraîne $1 \in \mathfrak{b}_{r'}$.

En vertu du théorème 5 de T.I.A. on voit immédiatement que si la propriété r'- γ est vérifiée, cette dernière condition se trouve également vérifiée. En vertu de ce même théorème il suffit de montrer que si cette condition se trouve vérifiée, $\mathfrak{a}_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'} \subset \mathfrak{b}_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'}$ implique $\mathfrak{a}_{r'} \subset \mathfrak{b}_{r'}$. Soit $x \in \mathfrak{a}_{r'}$. $\mathfrak{a}_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'} \subset \mathfrak{b}_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'}$ entraîne $x\ \mathfrak{c}_{r'} \subset \mathfrak{b}_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'}$ ou $\mathfrak{c}_{r'} \subset (\mathfrak{b}\, x^{-1})_{r'} \times \mathfrak{c}_{r'}$ donc par hypothèse $1 \in (\mathfrak{b}\, x^{-1})_{r'}$ ou $x \in \mathfrak{b}_{r'}$ et $\mathfrak{a}_{r'} \subset \mathfrak{b}_{r'}$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème :

Il suffit en vertu du lemme de montrer que $\mathfrak{c}_{r_a} \subset \mathfrak{b}_{r_a} \times \mathfrak{c}_{r_a}$ entraîne $1 \in \mathfrak{b}_{r_a}$. Soit $\mathfrak{b}_{r_a} = (b_1 , \dots , b_n)_{r_a}$, $\mathfrak{c}_{r_a} = (c_1 , \dots , c_m)_{r_a}$. On a donc :

$$(c_1 , \dots , c_m)_r \subset (b_1\ c_1 , \dots , b_i\ c_j , \dots , b_n\ c_n)_{r_a} .$$

On a vu plus haut (formule (14)) qu'il existait alors un r-idéal fini ξ_r tel que :

$$(c_1 , \dots , c_n)_r \times \xi_r \subset (b_1\ c_1 , \dots , b_i\ c_j , \dots , b_n\ c_n)_r \times \xi_r . \tag{15}$$

En posant

$$\eta_r = (c_1 , \dots , c_n)_r \times \xi_{r'}$$

(15) peut encore se lire : $1\ \eta_r \subset (b_1 , \dots , b_n)_r \times \eta_r$

et comme $\mathfrak{y}_r$ est un r-idéal fini ceci entraîne par définition $1 \in (b_1 , \ldots , b_n)_{r_a} = \mathfrak{b}_{r_a}$. D'où le théorème 10.

Soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble des r_a-idéaux finis. La correspondance $a \to (a)$ permet de considérer le groupe G (groupe ordonné associé à $\mathcal{G}$) comme plongé dans le semi-groupe $\mathfrak{U}$. Le semi-groupe $\mathfrak{U}$ peut être plongé dans son groupe des quotients Θ On vérifie sans difficulté que si

$$X = \frac{\mathfrak{a}_{r_a}}{\mathfrak{b}_{r_a}} \in \Theta ,$$

la relation $X \geqslant 1 \rightleftarrows \mathfrak{b}_{r_a} \supset \mathfrak{a}_{r_a}$ définit sur Θ une structure d'ordre compatible avec sa structure de groupe qui prolonge sur Θ la structure d'ordre de G . Il est facile de voir que le <u>groupe ordonné Θ est réticulé</u>. Soient $X , X' \in \Theta$. On peut supposer X et X' réduits au même dénominateur : $X = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, $X' = \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{a} , \mathfrak{a}', \mathfrak{b} \in \mathfrak{U})$. On a alors

$$\inf(X , X') = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}} .$$

Le groupe réticulé Θ sera dit le <u>groupe fonctionnel attaché au r-système ou r-groupe de Lorenzen</u>. Le théorème 7 et la considération du groupe fonctionnel montrent déjà que si $\mathcal{G}$ est r-clos, G peut être plongé dans un produit de groupes totalement ordonnés.

On se propose maintenant de montrer le :

THÉORÈME 11. - <u>Soit Θ le groupe fonctionnel du groupe préordonné r-clos $\mathcal{G}$. Les r-valuations de $\mathcal{G}$ et les valuations propres de Θ se correspondent biunivoquement. Une r-valuation du groupe ordonné associé G est la restriction à G de la valuation propre de Θ correspondante.</u>

Pour simplifier l'écriture nous supposerons $\mathcal{G} = G$.

<u>Soient O' un r-sur-semi-groupe de valuation de G et v la valuation correspondante, O' est également un r_a-semi-groupe.</u>

En effet soient $a_1 , \ldots , a_n \in O'$ et $x \in (a_1 , \ldots , a_n)_{r_a}$. Par définition $\exists\ c_1 , \ldots , c_n \in G$ avec

$$x(c_1 , \ldots, c_n)_r \subset (a_1 , \ldots , a_n)_r \times (c_1 , \ldots , c_n)_r .$$

On peut supposer par exemple $v(c_1) \leq v(c_2) , \ldots , v(c_n)$ ou : $c_2 c_1^{-1} , \ldots , c_n c_1^{-1} \in O'$. Par suite :

$x(1 , c_2 c_1^{-1} , \dots , c_n , c_1^{-1})_r \subseteq (a_1 , \dots , a_n)_r \times (1 , c_2 c_1^{-1} , \dots , c_m c_1^{-1})_r$

Or puisque O' est un r-semi-groupe, le r-idéal écrit au deuxième membre est contenu dans O' et $x \in O'$. Donc $\mathfrak{a}_{r_a} \subset O'$ et O' est bien un r_a-semi-groupe.

Ceci posé soit $\mathfrak{a} = a_1 , \dots , a_n$. Puisque v est une r_a-valuation, pour tout $x \in \mathfrak{a}_{r_a}$ on a $v(x) \geqslant \inf(v(a_1) \dots v(a_n))$. Supposons les notations choisies de sorte que $v(a_1) \leq v(a_2) , \dots , v(a_n)$, on a donc $x \in \mathfrak{a}_{r_a} \rightarrow v(x) \geqslant v(a_1)$.

L'ensemble $v(\mathfrak{a})$ admet donc un plus petit élément $v(a_1)$. On posera $v(\mathfrak{a}_{r_a}) = v(a_1)$ et cette valeur sera dite <u>valeurs du r_a-idéal fini</u> $\mathfrak{a}_{r_a}$.

Si $\mathfrak{a}_{r_a}$ et $\mathfrak{b}_{r_a}$ sont deux r_a-idéaux finis, vérifie immédiatement que :

$$v((a)) = v(a) \tag{16}$$

$$v(\mathfrak{a}_{r_a} \times \mathfrak{b}_{r_a}) = v(\mathfrak{a}_{r_a})\, v(\mathfrak{b}_{r_a}) \tag{17}$$

$$v(\mathfrak{a}_{r_a} + \mathfrak{b}_{r_a}) = \inf(v(\mathfrak{a}_{r_a}) , v(\mathfrak{b}_{r_a})) \tag{18}$$

Si v est une r-valuation de G par le groupe totalement ordonné Γ et si pour tout élément

$$X = \frac{\mathfrak{a}_{r_a}}{\mathfrak{a}_{r_a}} \in \mathfrak{G} ,$$

on pose $w(X) = \dfrac{v(\mathfrak{a}_{r_a})}{v(\mathfrak{a}_{r_a})}$ la formule (17) montre que w est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ sur Γ. (16) montre que w induit sur G l'application v et (18) montre que $w(\inf(X , Y)) = \inf(w(X) , w(Y))$ w est donc une valuation propre de $\mathfrak{G}$.

Toute r_a-valuation de G par Γ se prolonge donc en une valuation propre de G par Γ. Cette prolongation ne peut se faire que d'une seule manière : soit w' une valuation propre de $\mathfrak{G}$ par le groupe totalement ordonné Γ' qui induit sur G la valuation $v(\Gamma \subset \Gamma')$. Soit

$$x = \frac{\mathfrak{a}_{r_a}}{\mathfrak{b}_{r_a}} \in \mathfrak{G} .$$

On a

$$w'(X) = \frac{w'(\mathfrak{a}_{r_a})}{w'(\mathfrak{b}_{r_a})} .$$

Soit $\mathfrak{a}_{r_a} = (a_1 , \dots , a_n)_{r_a}$. Supposons $v(a_1) \leq v(a_2) , \dots , v(a_n)$. Comme w' est propre,

$$w'(\mathfrak{a}_{r_a}) = w'(\inf((a_1 , \dots , (a_n))) = \inf(w'(a_1) , \dots , w'(a_n)) = w'(a_1) = v(\mathfrak{a}_{r_a})$$

et $w'(X) = w(X)$. En particulier $\Gamma = \Gamma'$.

Montrons réciproquement qu'une valuation propre w de $\mathfrak{H}$ induit sur G une r-valuation :

Si $a_1 , \dots , a_n \in G$ sont tels que $w(a_1) , \dots , w(a_n) \geqslant 1$, et si $x \in (a_1 , \dots , a_n)_r$, $x \in (a_1 , \dots , a_n)_{r_a}$. Soit a le plus grand commun diviseur de $a_1 , \dots , a_n$ dans $\mathfrak{H}$. On a ${}^a x \geqslant a$. Donc

$$w(X) \geqslant w(a) = \inf(w(a_1) , \dots , w(a_n)) \geqslant 1 ,$$

$w(x) \geqslant 1$ montre que w induit bien sur G une r-valuation.

On a donc complètement démontré le théorème 11. Le théorème 8 montre aussi que :

COROLLAIRE 1. - Les r-sur-semi-groupes de valuation de $\mathcal{G}$ correspondent biunivoquement aux t-sur-semi-groupes de valuations de $\mathfrak{H}$.

COROLLAIRE 2. - Si $\mathcal{G}$ est r-clos, le semi-groupe des entiers de $\mathcal{G}$ est intersection de ses r-sur-semi-groupes de valuation.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 7, 8 et 11.

Ce corollaire donne une condition suffisante pour la résolution du problème que nous posions au début de ce paragraphe. Dans le cas où le système d'idéaux considéré est le d-système (idéaux ordinaires) KRULL a montré que c'était aussi une condition nécessaire. C'est aussi une condition nécessaire dans le cas du s-système. On voit en effet qu'un groupe ordonné plongé dans un produit de groupes totalement ordonnés est s-clos en se reportant au critère donné au théorème 11 de T.I.A. : le groupe ordonné G est s-clos si et seulement si tout élément x de G , tel qu'il existe un nombre entier $n > 0$ avec $x^n \geqslant 1$, est supérieur à 1 . D'où :

THÉORÈME 12 (Lorenzen-Dieudonné). - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe ordonné G puisse être plongé dans un produit de groupes totalement ordonnés est qu'il soit semi-clos.

4. b-idéaux.

Dans ce paragraphe nous considérons un groupe préordonné $\mathfrak{g}$ muni d'un système de r-idéaux de caractère fini et nous supposerons que $\mathfrak{g}$ soit r-clos. L'ensemble 0 des entiers de $\mathfrak{g}$ est alors intersection de r-sur-semi-groupes de valuation. Soit $(0_\iota)_{\iota\in I}$ l'ensemble de tous les r-sur-semi-groupes de valuation qui contiennent 0. Soit v_ι la valuation de $\mathfrak{g}$ correspondant au semi-groupe 0_ι.

Associons à un sous-ensemble borné $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ le sous-ensemble $\mathfrak{a}_b$ ainsi défini :

(19) $x \in \mathfrak{a}_b \iff \{\text{pour chaque } \iota\in I, \exists\ a\in\mathfrak{a} \text{ avec } v_\iota(a) \leq v_\iota(x)\}$.

Il est facile de voir que ceci définit un système d'idéaux sur $\mathfrak{g}$:

1° on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_b$

2° Si $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}_b$, on a $\mathfrak{a}_b \subset \mathfrak{b}_b$

3° Si $x \in (a)_b$ on a pour tout $\iota\in I$, $v_\iota(x) \geq v_\iota(a)$ ou $v_\iota(xa^{-1}) \geq 1$, donc $xa^{-1} \in 0$ et $x \in (a)$. Comme $(a) \prec (a)_b$, on a donc $(a)_b = (a)$.

4° On voit que $(a\,\mathfrak{a})_b = a\,\mathfrak{a}_b$.

On dit que le r-système est arithmétiquement utilisable s'il est confondu avec le b-système.

THÉORÈME 13. - Si $\mathfrak{g}$ est un groupe préréticulé le t-système est arithmétiquement utilisable.

En ce cas $(v_\iota)_{\iota\in I}$ est l'ensemble des valuations propres de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-ensemble borné de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{a}_t$, $\exists\ a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$ avec $x \in (a_1, \dots, a_n)_t$. Soit $\iota\in I$. Supposons $v_\iota(a_i) \leq v_\iota(a_1), \dots, v_\iota(a_n)$. Comme $x \geq \inf(a_1, \dots, a_n)$, $v_\iota(x) \geq v_\iota(\inf(a_1, \dots, a_n)) \geq v_\iota(a_i)$. Donc pour tout $\iota\in I$, $\exists\ x_\iota\in\mathfrak{a}$ avec $v_\iota(x) \geq v_\iota(x_\iota)$. Par suite $\mathfrak{a}_t \subset \mathfrak{a}_b$.

Si $x \notin \mathfrak{a}_t$, $1 \notin (x^{-1}\mathfrak{a})_t$. Soit $\mathfrak{b}_t$ le t-idéal $(x^{-1}\mathfrak{a})_t \cap 0$. Comme $1 \notin \mathfrak{b}_t$, le système multiplicativement clos $S = \{1\}$ est tel que $S \cap \mathfrak{b}_t = \emptyset$. Donc (T.I.A. théorème 16), il existe un t-idéal premier $\mathfrak{p}_t$ tel que $1 \notin \mathfrak{p}_t$ et $\mathfrak{b}_t \subset \mathfrak{p}_t$. Soit v la valuation propre de $\mathfrak{g}$ correspondant à $\mathfrak{p}_t$. Comme $(v_\iota)_{\iota\in I}$ contient toutes les valuations propres de $\mathfrak{g}$, $\exists\ \alpha\in I$ avec $v = v_\alpha$. S'il existait $a \in\mathfrak{a}$ avec $v_\alpha(x) \geq v_\alpha(a)$ on aurait $xa^{-1} \in 0_\mathfrak{p}$ ou $xa^{-1} = \frac{b}{s}$ avec $b \in 0$, $s \in 0 \cap \complement\mathfrak{p}$. Mais alors on aurait $s = ax^{-1}b \in x^{-1}\mathfrak{a}\cap 0$ contrairement à $\mathfrak{p} \supset x^{-1}\mathfrak{a}\cap 0$. Donc $x \notin \mathfrak{a}_b$ et on a bien $\mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_b$.

THÉORÈME 14. - Le système des b-idéaux est identique au système des r_a-idéaux.

Il suffit de le montrer pour le groupe ordonné G . Considérons G comme plongé dans le groupe fonctionnel Θ. D'après le théorème 11, l'ensemble $(w_\iota)_{\iota \in I}$ de toutes les valuations propres de Θ induit l'ensemble de toutes les r-valuations de G . On voit par suite, à partir de la définition de $\mathfrak{a}_b$, que si nous désignons par $\mathfrak{a}'_b$ le b-idéal engendré par $\mathfrak{a}$ dans Θ :

$$\mathfrak{a} \subset G \longrightarrow \mathfrak{a}_b = \mathfrak{a}'_b \cap G \tag{20}$$

Or en vertu du théorème 13, $\mathfrak{a}'_b$ est un t-idéal de Θ. Donc si $x \in \mathfrak{a}_b$, $\exists$ $a_1 , \dots , a_n \in$ avec $x \in (a_1 , \dots , a_n)'_b$ et $x \in (a_1 , \dots , a_n)'_b$ $\cap G = (a_1 , \dots , a_n)_b$. Donc le système des b-idéaux est de caractère fini. Pour démontrer le théorème 14 il suffit de montrer que si $a_1 , \dots , a_n \in G$, $(a_1 , \dots , a_n)_{r_a} = (a_1 , \dots , a_n)_b$. Or si a est le plus grand commun diviseur de $a_1 , \dots , a_n$ dans Θ,

$$x \in (a_1 , \dots , a_n)_{r_a} \rightleftarrows x \geqslant a \rightleftarrows x \in \mathfrak{a}'_b \cap G \rightleftarrows x \in \mathfrak{a}_b \quad .$$

D'où le théorème. On en déduit le :

COROLLAIRE. - Le r-système est arithmétiquement utilisable si et seulement si $\mathfrak{G}$ vérifie la propriété $r - \gamma$, c'est-à-dire si les r-idéaux finis de $\mathfrak{G}$ forment un semi-groupe.

REMARQUES. - On voit que si $\mathfrak{G}$ est r-clos, les r_a-idéaux de G sont la trace sur G des t-idéaux de Θ . "Dans le groupe fonctionnel tout r_a-idéal fini de G devient principal".

Soient K un corps, A un ordre de ce groupe entièrement clos dans K , il est possible de trouver un sur-corps $\tilde{K}$ de K et un ordre $\tilde{A}$ de $\tilde{K}$ tel que $K \cap \tilde{A} = A$, tel que les traces sur K des d_a-idéaux de $\tilde{K}$ soient les d-idéaux de K et tel que tout d-idéal fini de $\tilde{K}$ soit principal. $\tilde{A}$ est dit anneau fonctionnel (de Kronecker) de A . Le groupe de divisibilité de $\tilde{K}$ par rapport à $\tilde{A}$ est le groupe fonctionnel relatif au d-système du groupe préordonné K^* .

Addenda à l'exposé

1. L'intersection de deux r-idéaux (faisant partie d'un système total) est encore un idéal de ce système.

Soient $\mathfrak{a}_r$ et $\mathfrak{b}_r$ deux r-idéaux, $\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r$ est borné. On peut donc considérer $(\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)_r$. Or $\mathfrak{a}_r \supset (\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)$ entraîne $\mathfrak{a}_r \supset (\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)_r$. De même $\mathfrak{b}_r \supset (\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)_r$. Donc $\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)(\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)_r$ et par suite :

$$(\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r)_r = \mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{b}_r$$

2. THÉORÈME. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe préordonné $\mathfrak{G}$ soit r-clos est que le semi-groupe des entiers de $\mathfrak{G}$ soit intersection de sur-semi-groupes de r-valuation.

On a vu (structure des groupes préordonnés, corollaire 2 du théorème 11) que cette condition était nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

Pour simplifier on va raisonner sur le groupe ordonné associé G. Soit G_+ l'ensemble des entiers de G. Supposons que G_+ soit intersection de sur-semi-groupes de r-valuations. Montrons que G est r-clos.

On peut considérer G comme plongé dans un produit $\prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$ de groupes totalement ordonnés, l'homomorphisme v_ι de G sur Γ_ι étant pour tout $\iota \in I$ une r-valuation.

Il est facile de voir que l'on peut définir de la manière suivante un ensemble d'idéaux finis sur G (ensemble des λ-idéaux) :

$$x \in (a_1 , \dots , a_n)_\lambda \rightleftarrows \{ \text{pour tout } \iota \in I , \exists \ a_i \text{ avec } v_\iota(x) , v_\iota(a_i) \}$$

On définit bien ainsi un système d'idéaux finis car :

1° $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_\lambda$ si $\mathfrak{a}$ est un sous-ensemble fini de G.

2° $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_\lambda$ entraîne $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{b}_\lambda$

3° $(a)_\lambda \ni x$ équivaut à : pour tout ι, $v_\iota(a) \leq v_\iota(x)$ ou $v_\iota(xa^{-1}) \geq 1$

Mais puisque $G \subset \Gamma$, ceci équivaut à $xa^{-1} \in G_+$ ou $x \in (a)$. On a donc $(a)_\lambda = (a)$

4° On a $a\,\mathfrak{a}_\lambda = (a\,\mathfrak{a})_\lambda$.

Montrons que le λ-système est moins fin que le r-système. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-ensemble fini de G. Il faut montrer que $\mathfrak{a}_r \subset \mathfrak{a}_\lambda$.

Soit $x \in \mathfrak{a}_r$ et $\mathfrak{a} = \{a_1 , \dots , a_n\}$. Puisque v_ι est une r-valuation on a

$$v_\iota(x) \geqslant \inf(v_\iota(a_1) , \dots , v_\iota(a_n))$$

quel que soit $\iota \in I$, donc $x \in \mathfrak{a}_\lambda$.

Montrons maintenant que G est λ-clos.

Soit $\mathfrak{a} = \{a_1 , \dots , a_n\}$ et $x \in G$ tel que $x\, \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{a}_\lambda$, il faut montrer que ceci entraîne $x \geqslant 1$. Soit $\iota \in I$ et supposons que la numérotation des indices soit choisie de telle manière que :

$$v_\iota(a_1) = \inf(v_\iota(a_1) , \dots , v_\iota(a_n)) .$$

$x\, a_1 \in \mathfrak{a}_\lambda$ permet d'écrire $v_\iota(x)\, v_\iota(a_1) \geqslant v_\iota(a_1)$ ou $v_\iota(x) \geqslant 1$. Donc quel que soit ι, $v_\iota(x) \geqslant I$. Par suite $x \in G_+$ et G est bien λ-clos. Comme on a vu que le λ-système était moins fin que le r-système il suffit donc d'appliquer le théorème de monotonie (T.I.A., théorème 7) pour voir que G est bien r-clos.

BIBLIOGRAPHIE

Outre les travaux cités dans l'exposé précédent de Paul JAFFARD sur la Théorie des idéaux d'Artin, Prüfer et Lorenzen, on pourra consulter :

[1] JAFFARD (Paul). - Contribution à la théorie des groupes ordonnés, J. Math. pures et appl., t. 32, 1953, p. 203-280 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).

[2] JAFFARD (Paul). - Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné, Publ. scient. Univ. Alger, Série A, t. 2, 1955, p. 173-203.

[3] KRULL (W.). - Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, I : Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme, Kroneckersche Funktionalringe, Math. Z., t. 41, 1936, p. 545-577 ; VIII : Multiplicativ angeschlossene Systeme von endlichen Idealen, Math. Z., t. 48, 1942, p. 533-552.

[Juillet 1958]