Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

L. Lesieur

Treillis géométriques, II

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. nº 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1953-1954__7__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-
Séminaire d'ALGÈBRE
Année 1953/1954
-:-:-:-

TREILLIS GÉOMÉTRIQUES, II.

-:-:-:-:-

Conférence faite par L. LESIEUR, le 30 novembre 1953

-:-:-:-:-

Supposant connues les définitions et propriétés générales des treillis géométriques (voir conférence I), je vais étudier maintenant les treillis géométriques distributifs, les treillis géométriques modulaires et les treillis géométriques affines.

1.- TREILLIS GÉOMÉTRIQUES DISTRIBUTIFS.

E étant un ensemble quelconque, le treillis $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un treillis géométrique distributif. En effet $\mathcal{P}(E)$ est un treillis avec élément nul $\emptyset$ et élément universel E. Les points sont les parties de E réduites à un seul élément, et toute partie A de E est l'union des points qu'elle contient. Si un point P est situé dans l'union des points P_α il coïncide avec l'un d'eux. Enfin $\mathcal{P}(E)$ satisfait à la loi de couverture puisqu'il est distributif. Les propriétés I , II , III_1 et IV qui définissent un treillis géométrique de dimension infinie (Conf. I) sont donc vérifiées si E est infini, tandis que, si E est fini, les propriétés I , II et III montrent que $\mathcal{P}(E)$ est un treillis géométrique (distributif) de dimension finie.

Réciproquement, soit T un treillis géométrique distributif. Notons d'abord le lemme suivant :

<u>LEMME 1</u> : <u>Si</u> P <u>est situé dans l'union de points</u> P_α , <u>il coïncide avec l'un d'eux</u>.

En effet, P est situé, d'après la propriété IV , dans l'union d'un nombre fini d'entre eux, soit $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$. On a donc, en vertu de la distributivité :

$$P = P \cap (P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n) = \bigcup_{i=1}^{i=n} (P \cap P_i)$$

Ce qui exclut l'hypothèse $P \neq P_i$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$.

Soit E l'ensemble des points du treillis T, supposé distributif et géométrique. Faisons correspondre à chaque élément $S \in \mathcal{P}(E)$, l'union $\overline{S} \in T$ des points qui constituent S. L'application $S \to \overline{S}$ est un isomorphisme de $\mathcal{P}(E)$ sur T, car la relation $\overline{S} = \overline{S'}$ exige, d'après le lemme 1, $S = S'$; c'est donc une application biunivoque de $\mathcal{P}(E)$ sur T. D'autre part c'est évidemment un $\cup$-homomorphisme. Il en résulte que c'est un isomorphisme (Leçons sur les treillis, chap. IV, paragraphe 4). On obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 1 - Pour qu'un treillis géométrique T soit distributif, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe au treillis des parties d'un ensemble E.

L'ensemble E est fini ou infini suivant que T est de dimension finie ou infinie.

Les propriétés caractéristiques d'un treillis géométriques données dans I, 5 (Théorème 5) se simplifient en tenant compte de la distributivité. En effet, un treillis géométrique et distributif doit être en particulier relativement complémenté, donc complémenté. Par suite, c'est en particulier un treillis de Boole complet(1). Mais on sait (G. Birkhoff, Lattice Theory, p. 165) qu'un treillis de Boole complet vérifie la loi de $\cap$-distributivité générale

$$X \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (X \cap Y_\alpha)$$

et par suite qu'il est $\cap$-continu. On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 2 - Pour qu'un treillis T soit géométrique et distributif, il faut et il suffit que ce soit un treillis de Boole complet et atomique.

CONSÉQUENCE : Tout treillis de Boole de longueur finie n est isomorphe au treillis des parties d'un ensemble E de n éléments.

Cette propriété est due à M. Stone.

2 - TREILLIS GÉOMÉTRIQUES MODULAIRES.

DÉFINITION 1 - On appelle treillis géométrique projectif, ou géométrie projective, un treillis géométrique vérifiant la propriété duale de la loi de couverture :

PROPRIÉTÉ II' - H étant un hyperplan, $A \nleq H$ entraîne $A \succ A \cap H$.

---

(1) - Un treillis de Boole est un treillis distributif avec O et U, complémenté.

Cette propriété est encore équivalente à la suivante :
H étant un hyperplan, $A \leq B$ entraine $A \cap (B \cup E) = B \cup (A \cap H)$.
On en déduit qu'un treillis géométrique modulaire est projectif. Je vais établir la réciproque :

THÉORÈME 3 - Pour qu'un treillis géométrique soit projectif, il faut et il suffit qu'il soit modulaire.

α) Prenons d'abord le cas d'un treillis géométrique de dimension finie. D'après la propriété II' et le théorème 2 (Conf. I), les propriétés duales de celles qui définissent un treillis géométrique de dimension finie sont vérifiées. Comme la dimension d vérifie

$$d[A \cup B] + d[A \cap B] \leq d[A] + d[B]$$

la codimension d' vérifie

$$d'[A \cup B] + d'[A \cap B] \leq d'[A] + d'[B]$$

Or, si n est la dimension du treillis, on a : $d' = n - d - 1$.
On en déduit :

$$d[A \cup B] + d[A \cap B] = d[A] + d[B].$$

Il en résulte (Leçons sur les treillis, p. 67), que le treillis est modulaire.

β) On démontre la modularité d'un treillis projectif de dimension infinie en se ramenant au cas fini grâce à la propriété IV.

Dans le cas d'un treillis géométrique projectif, les propriétés caractéristiques d'un treillis géométrique données dans I, 5 deviennent les suivantes :

THÉORÈME 4 - Pour qu'un treillis soit un treillis géométrique projectif, il faut et il suffit qu'il soit modulaire, complet, complémenté, atomique et $\cap$-continu.

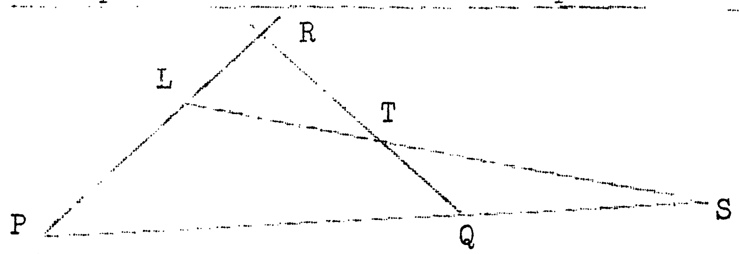
Je vais rattacher maintenant la définition d'un treillis géométrique projectif à la définition classique d'une géométrie projective au moyen de ses points et de ses droites. (Pour cette définition, voir par exemple B. Segre, Lezioni di geometria moderna, Bologne, 1948, pour le cas où la dimension est finie, et O. Frink, Trans. Amer. Math. Soc., 60, 1946, p. 452, pour le cas général).

On établit d'abord deux propriétés d'un treillis géométrique projectif quelconque, que nous énoncerons sans démonstration :

LEMME 2 - Dans un treillis géométrique projectif, tout point situé dans $B \cup C$ est situé sur une droite qui joint un point situé dans B à un point situé dans C ($B \neq 0$, $C \neq 0$, $B \neq C$).

Les notions de point et droite ont été données dans I. Pour énoncer la deuxième propriété, donnons la notion de triangle : c'est un ensemble de 3 points indépendants P, Q, R. Les points P, Q, R sont les sommets et les droites $P \cup Q$, $Q \cup R$, $R \cup P$ sont les côtés du triangle PQR.

LEMME 3 - Dans un treillis géométrique projectif, si une droite joint deux points S et T situés sur deux côtés d'un triangle et différents des sommets, elle coupe le troisième côté en un point L différent des sommets.



Soit E l'ensemble des points d'un treillis géométrique projectif G. A chaque variété $V \in G$ faisons correspondre la partie V' de E constituée par les points situés dans V ; on obtient ainsi un ensemble G' de parties de E ayant comme éléments particuliers les points eux-mêmes et les parties D' associées aux droites D de G ; nous appellerons, par abus de langage, ces parties, points, droites et variétés linéaires de G'. Elles ont les propriétés suivantes notées G_{p_1} et G_{p_2}.

G_{p_1} Il existe une droite D' et une seule contenant deux points distincts P et Q. Une droite donnée contient toujours au moins deux points distincts.

On dit que les points P et Q définissent la droite PQ, et que celle-ci joint les points P et Q.

Un triangle PQR dans G définit un triangle PQR dans G'. Le lemme 3 donne alors une propriété de ce triangle que nous appellerons :

G_{p_2} ou propriété du triangle.

Enfin, on démontre en s'appuyant sur le lemme 2 qu'une partie X de E est un élément V' de G' si et seulement si elle vérifie la propriété suivante, notée G_{p_3} :

G_{p_3} — . $X \in \mathcal{P}(E)$ contient, en même temps que deux points distincts, la droite qu'ils définissent.

Or les axiomes G_{p_1}, G_{p_2}, G_{p_3} sont précisément ceux qui définissent une géométrie projective classique, de dimension finie ou infinie, au moyen de ses points et de ses droites. Points et droites satisfont aux axiomes G_{p_1} et G_{p_2}, et les variétés linéaires sont alors définies par G_{p_3}.

Réciproquement, en partant d'une géométrie projective classique, on peut obtenir un treillis géométrique projectif. Il suffit d'ordonner ses éléments, qui sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant à G_{p_1}, G_{p_2}, G_{p_3}, par la relation d'inclusion des ensembles. On démontre qu'on obtient un treillis géométrique modulaire, c'est-à-dire un treillis géométrique projectif.

Il y a bien identité entre le point de vue classique et le point de vue treillis géométrique modulaire. La dimension est finie et égale à n s'il existe un nombre minimum n de points tel que la variété "engendrée" par ces n points soit égale à E.

Dans la définition classique, on caractérise une géométrie projective irréductible par la condition supplémentaire, dite condition de Fano : toute droite D contient au moins trois points distingts. Nous avons vu (I , 6 , théorème 6), que cette condition est une condition suffisante pour qu'un treillis géométrique quelconque soit irréductible. Ce résultat peut être précisé dans le cas d'un treillis géométrique projectif. On démontre en effet que la condition de Fano est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis géométrique projectif soit irréductible.

3 - TREILLIS GÉOMÉTRIQUES AFFINES.

Soit $\dot{I}$ un hyperplan d'une géométrie projective irréductible G_p. L'ensemble $(\dot{I})$ des variétés situées dans $\dot{I}$ est un idéal du treillis G_p, qui est en particulier un idéal de G_p considéré comme demi-groupe pour l'opération $\cap$. Formons l'ensemble :

$$G_a = G_p - (\dot{I}) + \{0\}$$

(C'est l'ensemble qu'on obtient en appliquant au demi-groupe G_p l'équivalence de D. Rees dans laquelle les éléments de l'idéal $(\dot{I})$ sont dans une même classe : la classe de 0, et qui est l'égalité en dehors de $(\dot{I})$).

G_a est un treillis complet avec 0 et U, qui est un sous-demi-treillis complet de G_p pour l'union, sans être un sous-treillis de G_p. Cela signifie que l'union d'une infinité d'éléments existe dans G_a et qu'elle est la même que dans G_p, l'intersection de deux éléments n'étant pas nécessairement la même dans G_a et dans G_p. On a en effet $A \cap B = 0$ dans G_a lorsque $A \cap B \leq \dot{I}$ dans G_p.

G_a <u>est un treillis géométrique de même dimension que</u> G_p.
Cette propriété utilise l'irréductibilité de G_p pour montrer dans G_p que toute variété $A \not\leq \dot{I}$ est l'union de points non situés dans $\dot{I}$, ce qui démontre la propriété III_1.

G_a vérifie la propriété suivante :

<u>PROPRIÉTÉ</u> II'_1 - H <u>étant un hyperplan, les relations</u> $A \not\leq H$ <u>et</u> $A \cap H \neq 0$ <u>entraînent</u> $A \succ A \cap H$.

De même que la propriété II' sert à montrer la modularité d'un treillis projectif, la propriété II'_1 permet d'établir que G_a est un <u>treillis modulaire affaibli</u>, c'est-à-dire vérifie la relation :

$$A \leq B \text{ et } A \cap C \neq 0 \text{ entraînent } B \cap (A \cup C) = B \cup (A \cap C)$$

Enfin G_a satisfait au <u>postulat d'Euclide</u> :

P <u>étant un point non situé sur une droite</u> D, <u>il existe une droite</u> X <u>et une seule telle que</u> $P < X < D \cup P$ <u>avec</u> $X \cap D = 0$.

Les propriétés du treillis G_a conduisent à la définition d'un treillis géométrique affine :

<u>DÉFINITION 2</u> - On appelle <u>treillis géométrique affine,</u> ou géométrie affine, un treillis géométrique vérifiant la propriété II'_1 et le postulat d'Euclide.

On peut encore dire qu'un treillis géométrique affine est un treillis géométrique modulaire affaibli vérifiant le postulat d'Euclide.

4 - VARIÉTÉS PARALLÈLES EN GÉOMÉTRIE AFFINE.

<u>DÉFINITION 3</u> - On dit que A <u>est parralèle à</u> B $(A//B)$ lorsque $A \cup B \succ A$, avec $A \cap B = 0$.

Exemples : droites parallèles, plan parralèle à une droite.
La relation $A // B$ n'est pas symétrique : $A // B$ n'entraîne pas

B // A . Lorsqu'on a A // B et B // A , on dit que les variétés A et B sont parallèles.

La théorie du parallélisme en géométrie affine conduit aux résultats fondamentaux suivants :

THÉORÈME 5 (Existence et unicité) - Si P est un point non situé dans A, il existe une variété B et une seule passant par P , telle que A et B soient parallèles.

THÉORÈME 6 - La relation A // B ou A $\geqslant$ B définit une relation de préordre dans l'ensemble des variétés d'une géométrie affine,

c'est-à-dire qu'elle est réflexive et rtransitive.

CONSÉQUENCE - La propriété pour deux variétés d'être parralèles ou confondues est une relation d'équivalence dans l'ensemble des variétés d'une géométrie affine.

Dans cette équivalence, la classe de A s'appelle direction de A .

Les variétés parallèles permettent de résoudre le problème d'extension inverse de celui qui a été traité au paragraphe 3 quand on a construit une géométrie affine G_a à partir d'une géométrie projective irréductible G_p . Il s'agit maintenant de construire une géométrie projective irréductible G_p à partir d'une géométrie affine G_a .

Pour cela, nous allons ajouter aux éléments du treillis G_a de nouveaux éléments constitués par les directions des variétés de dimension positive, sous le nom d'éléments impropres, ou éléments à l'infini. Ce nouvel ensemble G_p , constitué par les éléments de G_a , ou éléments propres, et par les éléments impropres, est ordonné conformément aux conventions suivantes :

1°) La relation d'ordre entre éléments de G_a est conservée dans G_p ;

2°) A étant un élément propre et $\dot{I}_1$ un élément impropre, on a $A \geqslant \dot{I}_1$ s'il existe une variété α de la classe $\dot{I}_1$ telle que

$$A // \alpha \quad \text{ou} \quad A \geqslant \alpha .$$

D'après le théorème 6, cette relation est indépendante de l'élément α choisi dans la classe $\dot{I}_1$.

3°) $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ étant deux éléments impropres, on a $\dot{I}_1 \geqslant \dot{I}_2$ s'il existe une variété α de la classe $\dot{I}_1$ et une variété β de la classe $\dot{I}_2$ telles que $\alpha \geqslant \beta$ ou $\alpha // \beta$.

Cette définition est encore indépendante des représentants

α et β choisis dans les classes $\dot{I}_1$ et $\dot{I}_2$ (théorème 6)

4°) $\dot{I}_1$ étant un élément impropre, il n'existe aucun élément propre $A \neq 0$ pour lequel on ait $\dot{I}_1 \geqslant A$.

5°) On a pour tout élément impropre $\dot{I}_1 > 0$.

On démontre alors que l'ensemble G_p ainsi construit constitue une géométrie projective irréductible G_p de même dimension que G_a . Cette immersion de G_a dans G_p a pu être réalisée à l'aide du parallélisme. C'est aussi au moyen du parallélisme et par application de la 2° condition suffisante d'irréductibilité donnée dans I, 6, qu'on établit que tout treillis géométrique affine G_a est un treillis irréductible.

5 - EXEMPLES -

α) Nous avons donné (I, 1 et 2) comme exemple de treillis géométrique, le treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel quelconque. Ce treillis étant modulaire est donc un treillis projectif, d'ailleurs irréductible.

β) Appelons sous-espace affine d'un espace vectoriel E tout sous-ensemble qui contient, en même temps qu'un nombre fini de vecteurs ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), tous les vecteurs,

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n \quad \text{tels que} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 .$$

On démontre que l'ensemble des sous espaces affines de E , ordonné par la relation d'inclusion des ensembles, constitue un treillis géométrique affine.

Je renvoie au livre (Leçons sur les treillis) pour montrer comment tout treillis géométrique projectif ou affine de dimension $\geqslant 3$ s'identifie avec l'un des exemples α ou β , et comment les plans projectifs ou affines jouent à cet égard un rôle exceptionnel dont l'étude fait l'objet d'un chapitre spécial.