Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

J. C. Herz

Algèbre de commutation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. nº 18, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

19 mars 1956

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/56
-:-:-:-

Exposé n° 18

ALGÈBRE DE COMMUTATION

par J.C. HERZ

-:-:-:-

Introduction.

Un circuit de commutation est un dispositif électrique faisant correspondre à certaines grandeurs appelées variables d'entrée d'autres grandeurs appelées variables de sortie, toutes ces variables prenant leurs valeurs dans un ensemble fini $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$. (Dans le cas d'un circuit électronique, les variables sont des tensions). A tout circuit de commutation à p entrées et q sorties est donc associée une application $\underline{a}$ de E^p dans E^q, équivalent à q applications $a_1, a_2, \dots, a_q$ de E^p dans E. La synthèse d'un circuit (dont on donne la fonction $\underline{a}$) au moyen d'éléments de circuit connus se ramène par suite à la recherche de l'expression de la fonction $\underline{a}$ au moyen de "fonctions élémentaires". L'étude de l'ensemble $\mathcal{A}_{pq}(E)$ des applications $\underline{a}$ est appeléo algèbre de commutation.

Jusqu'à présent, l'algèbre de commutation a été surtout développée dans le cas $N = 2$ (1) (algèbre binaire). Nous nous bornerons ici à étudier l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des applications de E^n dans $E = \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

1.- Algèbre de Boole des fonctions binaires.

Si l'on désigne les éléments de E par 0 et 1, $\mathcal{A}_n$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions caractéristiques des parties X de E^n. A tout élément $\underline{a}$ de $\mathcal{A}_n$ correspond biunivoquement une partie X_a de E^n, l'ensemble des ξ tels que $a(\xi) = 1$. Si on appelle f_X la fonction caractéristique de X, on aura donc

$$a = f_{X_a}$$

$\mathcal{A}_n$ est isomorphe à $\mathcal{P}(E^n)$, ensemble des parties de E^n, et contient 2^{2^n} éléments. $\mathcal{P}(E^n)$ est une algèbre de Boole relativement à l'inclusion dans

(1) Pour le cas $N = 3$, voir [6].

E^n . $\mathfrak{A}_n$ devient donc une algèbre de Boole si l'on y définit $a \leq b$ par $X_a \subseteq X_b$. Si l'on pose dans E $0 \leq 1$, $a \leq b$ est équivalent à

$$a(\xi) \leq b(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in E^n \quad .$$

La complémentation, l'union et l'intersection dans $\mathfrak{A}_n$ sont définis évidemment par

$$\bar{a} = f_{\complement X_a} \qquad a \smile b = f_{X_a \cup X_b} \qquad a \frown b = f_{X_a \cap X_b} \quad .$$

Nous supprimerons désormais le signe $\frown$, et désignerons $a \frown b$ simplement par ab . Cette convention se justifie par le fait que, si on considère E comme un groupoïde multiplicatif isomorphe à celui des nombres 0 et 1 , on a

$$(a \frown b)(\xi) = a(\xi)b(\xi) \qquad \text{pour tout} \quad \xi \in E^n$$

2.- Fonctions élémentaires.

Nous appellerons fonctions coordonnées les applications x_1 , x_2 , ... , x_n définies par

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n) = \xi_i$$

On peut, à l'aide des fonctions coordonnées et de leurs compléments, représenter la fonction caractéristique d'un point α de E^n :

$$f_{\{\alpha\}} = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_n}$$

avec $\quad y_{\alpha_i} = x_i \quad$ si $\quad \alpha_i = 1$

$\qquad\quad y_{\alpha_i} = \bar{x}_i \quad$ si $\quad \alpha_i = 0$

Pour cette raison, nous appellerons $f_{\{\alpha\}}$ monôme canonique. Il y a 2^n monômes canoniques, chacun correspondant à un point de E^n .

Plus généralement, nous appellerons monôme toute application m_i représentable par un produit tel que

$$m_i = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} \bar{x}_{i_{p+1}} \bar{x}_{i_{p+2}} \dots \bar{x}_{i_q}$$

où les i_k sont des entiers compris entre 1 et n et tous distincts, avec éventuellement $p = 0$ ou $q-p = 0$.

m_i est la fonction caractéristique de l'ensemble X_i dont les points ξ vérifient les conditions $\xi_{i_k} = 1$ pour $1 \leq k \leq p$, $\xi_{i_k} = 0$ pour $p+1 \leq k \leq q$.(X_i possède 2^{n-q} éléments). Sa représentation est donc unique (à l'ordre des facteurs près). On voit aisément que $m_i < m_j$ si et seulement s'il existe un monôme m_k tel que $m_i = m_k m_j$

3.- Représentation par des fonctions élémentaires.

Proposition 1.- Toute application non nulle est représentable d'une manière unique comme union de monômes canoniques.

En effet, $X_a = \bigcup_{\alpha \in X_a} \{\alpha\}$, donc, d'après le paragraphe 1,

$a = f_{X_a} = \smile_{\alpha \in X_a} f_{\{\alpha\}}$. Réciproquement, une union de monômes canoniques

définit une partie X_b de E^n , donc une application b , d'où l'unicité.

On pourrait écrire par extension

$$0 = \smile_{\alpha \in \emptyset} f_{\{\alpha\}}$$, où $\emptyset$ est la partie vide de E^n .

Proposition 2.- [1] Si l'on définit dans $\mathfrak{A}_n$ l'opération

$$a \mid b = \overline{ab} \quad ,$$

le groupoïde $\mathfrak{A}_n$ admet comme générateurs les n fonctions coordonnées.

En vertu de la proposition 1 , il suffit de montrer que, si l'on appelle G le groupoïde engendré par $x_1 , x_2 , \dots , x_n$, et si a et b appartiennent à G , $\bar{a}$, $a \smile b$ et ab appartiennent aussi à G .

Or $\bar{a} = a \mid a$, d'où $ab = \overline{a \mid b} = (a \mid b) \mid (a \mid b)$, et
$a \smile b = \bar{a} \mid \bar{b} = (a \mid a) \mid (b \mid b)$, C.Q.F.D.[2]

4.- Minimisation d'une fonction.

Le problème fondamental en algèbre de commutation est de trouver la représentation la plus simple d'une fonction donnée au moyen des fonctions élémentaires ("minimisation" de la fonction). Nous nous bornerons au problème de la représentation par une union de monômes (ou forme normale). D'après la proposition 1, toute fonction $\neq 0$ admet au moins une forme normale : sa forme canonique.

Reste à définir ce qu'on entend par forme normale la plus simple ou forme normale minimale. Soit P le nombre de monômes intervenant dans une forme normale de a , Q le nombre total de lettres y figurant (somme des degrés des P monômes). Parmi toutes les formes normales de a , nous ne retiendrons que celles pour lesquelles P est minimum, et parmi celles-là nous appellerons

(2) Ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite de cet exposé. Il est intéressant en ce qu'il montre qu'un circuit de commutation peut être réalisé à l'aide d'un seul type d'élément de circuit. Effectivement, tout circuit électronique de commutation peut être réalisé avec des tubes pentodes, qui effectuent la fonction $a \mid b$.

forme minimale de $\bar{a}$ toute forme pour laquelle Q est minimum.

Il existe des méthodes géométriques de minimisation [2], [3], consistant essentiellement dans la recherche de la décomposition

$$X_a = \bigcup X_{m_i}$$

de l'ensemble X_a en ensembles dont les fonctions caractéristiques sont des monômes m_i, ensembles dont la structure présente certaines propriétés géométriques. Nous ne nous occuperons ici que d'algorithmes basés sur les propriétés générales des formes normales et réalisés avec l'aide de tables (tables de simplification ou de minimisation).

5.- Propriétés des formes normales.

Dans $\mathcal{A}_n$, appelons $\mathcal{M}$ l'ensemble des monômes, $\mathcal{N}_a$ l'ensemble des monômes appartenant aux diverses formes normales de $\underline{a}$, $\mathcal{R}_a$ l'ensemble des monômes appartenant aux diverses formes normales minimales de $\underline{a}$, $\mathcal{J}_a$ l'ensemble des monômes appartenant à toute forme normale minimale de $\underline{a}$. Si $\mathcal{F}_a$ est l'ensemble des monômes d'une forme normale minimale, on a

$$\mathcal{J}_a \subseteq \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{R}_a \subseteq \mathcal{N}_a \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}_n \quad ,$$

$$\mathcal{J}_a = \cap \mathcal{F}_a \quad , \quad \mathcal{R}_a = \cup \mathcal{F}_a$$

Proposition 3.- $\mathcal{N}_a$ est l'ensemble des monômes inférieurs ou égaux à $\underline{a}$.

En effet, si $a = \smile m_i$, $m_i \leq a$; si $m \leq a$, et si $\smile m_i$ est une forme normale de $\underline{a}$, $\smile m_i \smile m$ est encore une forme normale de $\underline{a}$.

Proposition 4.- Tout élément de $\mathcal{R}_a$ est maximal dans $\mathcal{N}_a$. En effet, soit une forme normale de a contenant un monôme m non maximal dans $\mathcal{N}_a$: il existe un monôme m' tel que $m < m' \leq a$. En remplaçant m par m' on obtient une autre forme normale de $\underline{a}$, on ne change pas P et on diminue Q (paragraphe 2, fin), et par conséquent la forme considérée n'était pas minimale.

Nous désignerons par $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des monômes maximaux dans $\mathcal{N}_a$.

Proposition 5.- Si $m \in \mathcal{N}_a$ et si $X_m \not\subseteq \bigcup_{\substack{m' \in \mathcal{S}_a \\ m' \neq m}} X_{m'}$, $m \in \mathcal{J}_a$.

En effet, il existe alors un ξ tel que $a(\xi) = m(\xi) = 1$, $m'(\xi) = 0$ pour tout m' maximal $\neq m$. Toute union de monômes maximaux $\neq m$, et par conséquent toute union d'éléments de $\mathcal{R}_a$ distincts de m est donc inférieure à $\underline{a}$, donc m figure obligatoirement dans toute forme normale minimale.

L'ensemble des monômes satisfaisant à l'hypothèse de la proposition 5 est appelé noyau [4]. Désignons-le par $\mathcal{K}_a$.

Nous aurons finalement

$$\boxed{\mathcal{K}_a \subsetneq \mathcal{J}_a \subseteq \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{R}_a \subsetneq \mathcal{S}_a \subsetneq \mathcal{N}_a \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}_n}$$

6.- Algorithme de QUINE. [4]

Pour obtenir l'ensemble $\mathcal{S}_a$, Quine constitue deux suites d'ensembles $\mathcal{B}_{n-1}$, $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{B}_{n-2}$, $\mathcal{C}_{n-1}$, $\mathcal{B}_{n-3}$, $\mathcal{C}_{n-2}$, ... à partir de la forme canonique de $\underline{a}$. $\mathcal{B}_i$ est l'ensemble des monômes de degré i qui sont unions de deux éléments de $\mathcal{B}_{i+1}$. $\mathcal{C}_{i+1}$ est l'ensemble des monômes de $\mathcal{B}_{i+1}$ qui ne sont inférieurs à aucun élément de $\mathcal{B}_i$ (donc inutilisés dans la construction de $\mathcal{B}_i$). $\mathcal{B}_n$ est l'ensemble des termes de la forme canonique. Si $\mathcal{B}_p$ est le premier ensemble vide de la suite $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_{p+1} = \mathcal{B}_{p+1}$ et

$$\mathcal{S}_a = \mathcal{C}_n \cup \mathcal{C}_{n-1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{p+1}$$

Pour le vérifier, il suffit de remarquer que tout monôme de degré i est égal à l'union de 2^{n-i} monômes canoniques, ou encore à l'union de deux monômes de degré $i + 1$.

Ayant obtenu $\mathcal{S}_a$, on dresse un tableau des relations d'ordre entre éléments de $\mathcal{B}_n$ et éléments de $\mathcal{S}_a$. On obtient immédiatement le noyau $\mathcal{K}_a$: si un élément m_n de $\mathcal{B}_n$ est inférieur ou égal à un seul élément m de $\mathcal{S}_a$, m appartient à $\mathcal{K}_a$, et réciproquement.

Soit $K_a = \bigcup_{m \in \mathcal{K}_a} X_m$. Il reste à trouver un ensemble minimal $\mathcal{L}$ d'éléments de $\mathcal{S}_a$ tels que $\bigcup_{m \in \mathcal{L}} X_m \supseteq X_a - K_a$. On le fera en général par exhaustion en utilisant le même tableau.

Exemple : $X_a = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,1,1),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,1,0,1),$
$(1,1,1,1)\}$

$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_2$
$\bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}$	$\boxed{\bar{x}\,\bar{y}}$ — $\mathcal{C}_2$
$\bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	
$\bar{w}\,x\,y\,z$	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	
$w\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$w\,\bar{x}\,\bar{y}$	
$w\,\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$w\,\bar{y}\,z$	
$w\,x\,\bar{y}\,z$	$x\,y\,z$	
$w\,x\,y\,z$	$w\,x\,z$ — $\mathcal{C}_3$	

$\mathcal{B}_4$ \ $\mathcal{S}_a$	$w\,\bar{y}\,z$	$x\,y\,z$	$w\,x\,z$	$\bar{x}\,\bar{y}$
$\bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$				×
$\bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}\,z$				×
$\bar{w}\,x\,y\,z$		×		
$w\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$				×
$w\,\bar{x}\,\bar{y}\,z$	×			×
$f_{X_a K_a} \rightarrow \boxed{w\,x\,\bar{y}\,z}$	×		×	
$w\,x\,y\,z$		×	×	

$_a = x\,y\,z\;,\;\bar{x}\,\bar{y}$

Deux formes minimales

$$\begin{cases} xyz \cup \bar{x}\,\bar{y} \cup w\,\bar{y}\,z \\ xyz \cup \bar{x}\,\bar{y} \cup w\,x\,z \end{cases}$$

7.- Algorithme de Harvard [5]

L'algorithme de Harvard détermine seulement $\mathcal{H}_a$, et par conséquent ne peut construire directement $\mathcal{K}_a$. Il construit un autre ensemble $\mathcal{E}_a$, celui des monômes essentiels. Remarquons que, avec les notations du paragraphe 6,

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{B}_n \cup \mathcal{B}_{n-1} \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{p+1} \, .$$

Un monôme m appartenant à $\mathcal{B}_i$ sera dit essentiel si

$$X_m \not\subseteq \bigcup_{\substack{m' \in \bigcup_{j \leq i} \mathcal{B}_j \\ m' \neq m}} X_{m'}$$

Proposition 6.- $\boxed{\mathcal{K}_a \subseteq \mathcal{E}_a \subsetneq \mathcal{S}_a}$.

En effet, si $m \in \mathcal{B}_i - \mathcal{C}_i$, il existe un $m_p \succ m$ dans une classe $\mathcal{B}_p$

$(p < i)$, et $X_m \subset X_{m_p}$, d'où $\mathcal{E}_a \subseteq \mathcal{S}_a$.

D'autre part, si $m \in \mathcal{H}_a$, il existe sur ξ tel que $a(\xi) = 1$, $m(\xi) = 1$, et $m''(\xi) = 0$ pour tout $m'' \in \mathcal{S}_a$ distinct de m . Tout élément m' de $\bigcup_{j \leq i} \mathcal{B}_j$ distinct de m est inférieur ou égal à un élément m_1 de $\mathcal{S}_a$ distinct de m , donc $m'(\xi) = 0$ et $m \in \mathcal{E}_a$.

Proposition 7.- Si $i \neq n$, m est essentiel si et seulement si

$$X_m \not\subseteq \bigcup_{\substack{m' \in \mathcal{B}_i \\ m' \neq m}} X_{m'}$$

En effet, tout monôme essentiel vérifie évidemment cette condition. Réciproquement, si m_1 est un élément de $\mathcal{B}_j$ $(j < i)$, m_1 peut être représenté de $\prod_{k=0}^{2^{n-1}-1} C^{2^{i-j}}_{2^{n-j}-k2^{i-j}}$ manières différentes comme union de 2^{i-j} éléments de $\mathcal{B}_i$. Si $i \neq n$, une au moins de ces représentations ne comporte pas m . Si $m'(\xi) = 0$ pour tout $m' \neq m$ appartenant à $\mathcal{B}_i$, on en déduira $m_1(\xi) = 0$, C.Q.F.D.

Le plus souvent, dans la pratique, $\mathcal{E}_a \subsetneq \mathcal{I}_a$. Il y a des exceptions, comme le montre l'exemple

$$X_a = \{(0,1,0,1),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

pour lequel $w\,z \in \mathcal{E}_a$ et $\mathcal{I}_a = \mathcal{R}_a = \{w\,\bar{x}\ ,\ w\,y\ ,\ x\,\bar{y}\,z\}$.

L'algorithme utilise un tableau déduit du tableau de Quine relatif à $a = 1$:

ξ	$\mathcal{B}_1$			$\mathcal{B}_2$			$\mathcal{B}_3$
(0,0,0)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}$	$\bar{x}\,\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$
(0,0,1)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	z	$\bar{x}\,\bar{y}$	$\bar{x}\,z$	$\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$
(0,1,0)	$\bar{x}$	y	$\bar{z}$	$\bar{x}\,y$	$\bar{x}\,\bar{z}$	$y\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$
(0,1,1)	$\bar{x}$	y	z	$\bar{x}\,y$	$\bar{x}\,z$	$y\,z$	$\bar{x}\,y\,z$
(1,0,0)	x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\,\bar{y}$	$x\,\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$
(1,0,1)	x	$\bar{y}$	z	$x\,\bar{y}$	$x\,z$	$\bar{y}\,z$	$x\,\bar{y}\,z$
(1,1,0)	x	y	$\bar{z}$	$x\,y$	$x\,\bar{z}$	$y\,\bar{z}$	$x\,y\,\bar{z}$
(1,1,1)	x	y	z	$x\,y$	$x\,z$	$y\,z$	$x\,y\,z$

En regard de chaque point ξ se trouvent tous les monômes m tels que $m(\xi) = 1$. Tous les monômes n'appartenant pas à $\mathcal{N}_a$ s'obtiendront sur les lignes $\xi \in X_a$. Après avoir éliminé ces lignes, on élimine dans le reste du tableau ces monômes partout où ils se trouvent. On aura immédiatement les monômes essentiels en cherchant dans les tranches $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ... , $\mathcal{B}_{n-1}$ les monômes restants isolés sur leur ligne. Les monômes subsistant dans $\mathcal{B}_n$ sont essentiels s'ils sont seuls sur leur ligne entière.

On représente ξ par le nombre dont ses coordonnées représentent l'écriture binaire, et le monôme $y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_j}$ (cf. paragraphe 2) par le nombre d'écriture binaire $(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_j)$. Le tableau précédent s'écrit sous sa forme définitive.

ξ	x	y	z	x y	x z	y z	x y z
0	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	0	$\boxed{0}$	0
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
2	~~0~~	~~1~~	~~0~~	1	0	~~2~~	2
3	~~0~~	~~1~~	~~1~~	1	~~1~~	$\boxed{3}$	3
4	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~2~~	$\boxed{0}$	4
~~5~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~1~~	~~5~~
~~6~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~6~~
7	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~3~~	~~3~~	$\boxed{3}$	7

On y a traité l'exemple $X_a = \{0 , 2 , 3 , 4 , 7\}$. On a encadré les monômes essentiels, qui appartiennent d'ailleurs au noyau (c'est vrai pour tout monôme essentiel de degré n-1 ou n). On a ensuite le choix entre deux monômes pour obtenir une forme minimale :

$y\,z \cup \bar{y}\,\bar{z} \cup \bar{x}\,\bar{z}$ (numéro 0 dans la colonne x z)

ou $y\,z \cup \bar{y}\,\bar{z} \cup \bar{x}\,y$ (numéro 1 dans la colonne x y) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.M. SHEFFER.- A set of five independent operations for Boolean algebras (Trans. A.M.S., 14 (1913), p. 481-488).

[2] E.W. VEITCH.- A chart method for simplifying Truth Functions.- Proc. of the Ass. for Computing Machinery, mai 1952, p. 127-133.

[3] R. GREA, R. HIGONNET.- Etude logique des circuits électriques et des systèmes binaires, chap. V.- Paris, Borger-Levrault, 1955 .

[4] W.V. QUINE.- The problem of simplifying Truth Functions.- (Amer. Math. Monthly, vol 59, 1951, n° 8).

[5] H.H. AIKEN, etc. Synthesis of Electronic computing and control Circuits.- Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1951.

[6] C.Y. LEE, W.H. CHEN.- Several-valued combinational switching Circuits.- AIEE Transactions Paper n° 56-162, fév. 1956.