M. Lazard

Compositeurs et analyseurs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 9 (1955-1956), exp. n° 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1955-1956__9__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1955/1956
-:-:-:-

5 décembre 1955

Exposé n° 5

COMPOSITEURS et ANALYSEURS.

par M. LAZARD.

-:-:-:-

1.- Compositeurs.

Si M est un ensemble quelconque, nous appellerons fonction de n arguments dans M une application $f : M^n \to M$, où M^n désigne le produit cartésien de n ensembles égaux à M. La valeur prise par f pour une famille d'éléments $a_1 , \dots , a_n \in M$ sera notée $f(a_1 , \dots , a_n)$. Par abus de langage, nous dirons parfois "la fonction $f(x_1 , \dots , x_n)$ " au lieu de "la fonction f ". L'ensemble des fonctions de n arguments dans M sera noté $\mathcal{F}_n(M)$.

On sait composer les fonctions de plusieurs arguments dans M : si $f \in \mathcal{F}_m(M)$ et $g_1 , \dots , g_m \in \mathcal{F}_n(M)$, la fonction composée sera notée $f(g_1 , \dots , g_m)$.

Nous noterons $e^{(M)}_{n,i}$, ou plus simplement, $e_{n,i}$, les éléments de $\mathcal{F}_n$ définis par $e_{n,i}(a_1 , \dots , a_n) = a_i$ pour tous $a_1 , \dots , a_n \in M$. L'entier i doit vérifier $1 \leq i \leq n$.

Une généralisation naturelle de la notion de demi-groupe d'applications d'un ensemble M dans lui-même est la suivante ; on prend dans chaque $\mathcal{F}_n(M)$ une partie E_n, et on considère la suite d'ensembles $(E_n)_{n=1,2,\dots}$ à laquelle on impose deux conditions : 1°) chaque E_n contient les $e_{n,i}$ $(1 \leq i \leq n)$; 2°) si $f \in E_m$, $g_1 , \dots , g_m \in E_n$, alors $f(g_1 , \dots , g_m) \in E_n$.

Par abstraction, on parvient à la notion de compositeur (tout comme à celle de demi-groupe "abstrait"). Il faut alors un axiome pour assurer "l'associativité de la composition".

Définition : Un compositeur E est constitué par la donnée :

1°) d'une suite d'ensembles (E_n), $n = 1, 2, \dots$;

2°) d'une famille d'éléments distingués $e_{n,i} \in E_n$, pour $1 \leq i \leq n < \infty$;

3°) d'une famille d'applications $T_{m,n} : E_m \to \mathcal{F}_m(E_n)$, définies pour $1 \leq m$, $n < \infty$,

assujettis à vérifier les deux axiomes suivants :

(C1) $$((T_{m,n}f)(g_1 , \dots , g_m))(h_1 , \dots , h_n) =$$
$$= (T_{m,p}f)((T_{n,p}g_1)(h_1 , \dots , h_n) , \dots , (T_{n,p}g_m)(h_1 , \dots , h_n)) ,$$
pour tous $f \in E_m$, $g_1 , \dots , g_m \in E_n$ et $h_1 , \dots , h_n \in E_p$.

(C2) $(T_{m,n}\, e_{m,i})(f_1 , \dots , f_m) = f_i$, pour tous $f_1 , \dots , f_m \in E_n$, et $(T_{n,n}f)(e_{n,1} , \dots , e_{n,n}) = f$, pour tout $f \in E_n$.

L'axiome (C1) est l'axiome d'associativité ; l'axiome (C2) est l'axiome des "éléments neutres". Dorénavant, nous supprimerons les signes $T_{m,n}$, c'est-à-dire que nous écrirons $f(g_1 , \dots , g_m)$ au lieu de $(T_{m,n}f)(g_1 , \dots , g_m)$.

Nous dirons qu'un compositeur $E = (E_n)$ opère sur un ensemble M si l'on a une famille d'application $\tau_n : E_n \longrightarrow \mathcal{F}_n(M)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1°) à la composition dans E correspond la composition des fonctions dans M ; 2°) aux éléments distingués $e_{n,i}$ de E correspondent les fonctions de même nom dans M . Plus précisément : si $f \in E_m$ et $g_1 , \dots , g_m \in E_n$, alors $\tau_n(f(g_1 , \dots , g_m)) = (\tau_m f)(\tau_n\, g_1 , \dots , \tau_n\, g_m)$, et $\tau_n\, e_{n,i} = e^{(M)}_{n,i}$. Nous nous permettrons de ne plus expliciter les définitions aussi naturelles.

On peut définir la représentation régulière d'un compositeur par un procédé de "dédoublement" analogue à celui utilisé pour la représentation régulière des groupes et des algèbres. Soit $E = (E_n)$ un compositeur. Nous pouvons considérer des applications biunivoques $\pi^p_q : E_p \longrightarrow E_q$ pour $p \leq q$, en posant $\pi^p_q f = f(e_{q,1} , \dots , e_{q,p})$ pour $f \in E_p$ (autrement dit : on considère $f(x_1 , \dots , x_p)$ comme une fonction de $x_1 , \dots , x_p , \dots , x_q)$; nous formons alors la limite inductive M des ensembles E_p pour les applications π^p_q et nous faisons opérer E sur M d'une manière naturelle : nous obtenons ainsi la représentation régulière de E .

On définit d'une manière naturelle un homomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ de deux compositeurs : c'est une famille d'applications $\varphi_n : E_n \longrightarrow F_n$ qui sont compatibles avec la composition et mettent en correspondance les éléments distingués.

On définit la notion de sous-compositeur F d'un compositeur E : c'est la famille des ensembles $F_n = F \cap E_n$, supposée contenir les éléments distingués, et stable pour la composition.

On définit un système de générateurs A d'un compositeur E comme une famille d'ensembles $A_n \subset E_n$, tels que E soit le seul sous-compositeur de

E qui contienne A .

Soit $A = (A_n)$ une suite d'ensembles. Un compositeur libre E engendré par A est un compositeur admettant A comme système de générateurs, et tel que pour tout compositeur F et toute application $\varphi : A \longrightarrow F$ (c'est-à-dire pour toute famille $\varphi_n : A_n \longrightarrow F_n$), il existe un homomorphisme $\psi : E \longrightarrow F$ prolongeant φ . L'homomorphisme ψ est nécessairement unique.

On peut construire un compositeur libre comme un demi-groupe libre en définissant des "mots" et en introduisant la notion naturelle de "longueur" d'un mot.

Tout compositeur E peut alors être défini au moyen de générateurs et de relations entre ces générateurs : on se donne un système de générateurs, et des égalités entre "mots" en ces générateurs, qui engendrent une relation d'équivalence compatible avec la composition dans le compositeur libre engendré par les générateurs en question.

Exemple : on prend comme générateur $f \in E_2$, et comme relation $f(f(x_1 , x_2) , x_3) = f(x_1 , f(x_2 , x_3))$. On obtient ainsi le compositeur des demi-groupes.

Plus généralement, on peut considérer que les ensembles sur lesquels opère un compositeur E donné appartiennent tous à une même espèce de structure algébrique. Les opérations (lois de compositions) de l'espèce considérée correspondent à un système de générateurs du compositeur E ; les relations entre ces générateurs se traduisent par des identités génériques (c'est-à-dire valables pour un choix quelconque des arguments) dans les structures de l'espèce en question. Par exemple, pour les demi-groupes, on prend une opération (le produit) et une identité (la relation d'associativité).

Il est aisé de caractériser les espèces de structures algébriques que l'on peut définir à partir d'un compositeur : ce sont celles où les opérations sont partout définies, et ne sont assujetties qu'à vérifier des "identités génériques". Ces structures comprennent, par exemple, les demi-groupes, groupes, groupes abéliens, anneaux, anneaux de Lie, Ω-modules (Ω désignant un anneau donné), etc. Par contre elles ne comprennent pas les corps (l'inverse n'est pas partout défini), ni les p-groupes ("pour tout x , il existe un h tel que $x^{p^h} = 1$ " n'est pas une identité générique, puisque h peut varier), ni les demi-groupes avec règles de simplification ("$xy = xz$ implique $y = z$ " n'est pas une "identité"), etc. On obtient donc une classe assez restreinte de structures algébriques.

Si l'on considère un compositeur $E = (E_n)$, et l'espèce de structure algébrique qu'il définit, chaque ensemble E_n peut être identifié à la structure libre de l'espèce en question, engendrée par les générateurs $(e_{n,i})$ pour $1 \leq i \leq n$. Par exemple, le compositeur des groupes est formé d'une suite de groupes libres à 1 , 2 , ... générateurs.

La définition d'une espèce de structure algébrique à partir d'un compositeur suppose qu'on ait fait choix d'un système de générateurs et de relations. Deux systèmes différents conduisent à deux définitions distinctes de structures algébriques. Cela équivaut à dire qu'un isomorphisme entre deux compositeurs E_1 et E_2 permet de définir canoniquement une structure algébrique d'espèce E_1 sur une structure algébrique d'espèce E_2 et réciproquement. Par exemple, supposons que les structures d'espèce E_1 soient les groupes nilpotents de classe $< p$, vérifiant l'identité $x^{p^h} = 1$ (p : nombre premier, h : entier), et que les structures d'espèce E_2 soient les anneaux de Lie nilpotents de classe $< p$ vérifiant l'identité $p^h x = 0$. Alors il est possible d'identifier ces deux espèces de structures, c'est-à-dire d'établir un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

2.- Compositeurs analytiques.

Si Ω désigne un anneau unitaire, que nous supposerons dès maintenant commutatif, il lui correspond le "compositeur des Ω -modules" que nous noterons $[\Omega]$; $[\Omega]_n$ s'identifie donc au Ω -module libre de base $e_{n,1}, \ldots, e_{n,n}$.

Par définition, un Ω -compositeur sera constitué par la donnée d'un compositeur E et d'un homomorphisme $\omega : [\Omega] \longrightarrow E$. Cela revient à exiger que, sur chaque E_n soit définie une structure de Ω-module unitaire, telle que l'opération de composition $(f , g_1 , \ldots , g_n) \longrightarrow f(g_1 , \ldots , g_n)$ dans E soit Ω -linéaire par rapport à f .

On vérifie immédiatement que la donnée d'un homomorphisme unitaire $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ d'anneaux commutatifs unitaires équivaut à la donnée d'une structure de Ω-algèbre unitaire sur Ω' , ou encore d'un homomorphisme $[\Omega] \longrightarrow [\Omega']$ que nous désignerons par la même lettre φ . Rappelons aussi que, si E_n est un Ω -module, le produit tensoriel $\Omega' \otimes_{\Omega} E_n$ défini au moyen de l'homomorphisme φ peut être considéré comme un Ω'-module. Nous noterons ce produit tensoriel $\Omega' \otimes_{\varphi} E_n$, φ désignant l'homomorphisme $\Omega \longrightarrow \Omega'$.

Si nous avons un Ω-compositeur $E = E_n$, et un homomorphisme $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$, nous pouvons toujours former la suite d'ensembles E'_n en posant $E'_n = \Omega' \otimes_{\varphi} E_n$, mais il est en général impossible de définir sur

$E' = (E'_n)$ une structure de Ω'-compositeur vérifiant certaines conditions naturelles que nous allons préciser. En postulant que cette définition est possible, nous obtenons la notion de Ω-compositeur analytique, beaucoup plus restrictive, et par conséquent plus riche, que la notion de Ω-compositeur.

Définition. Un Ω-compositeur analytique E est constitué par la donnée :

1°) d'un Ω-compositeur $E = (E_n)$.

2°) d'une "construction canonique" (ou foncteur) qui à tout homomorphisme unitaire φ de Ω dans un anneau commutatif unitaire Ω' fait correspondre un Ω'-compositeur E' et un diagramme commutatif d'homomorphismes de compositeurs :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} [\Omega] & \xrightarrow{\ \omega\ } & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ [\Omega'] & \xrightarrow{\ \omega'\ } & E' \end{array}$$

de telle sorte que les axiomes suivants soient vérifiés.

(CA1). Pour tout n , $E'_n = \Omega'_n \otimes_{\varphi} E_n$; ω' est défini par la structure naturelle de Ω'-module de E' , et l'homomorphisme ψ est défini par $\psi_n f = 1 \otimes_{\varphi} f$ pour tout $f \in E_n$.

(CA2). Si $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ et $\varphi' : \Omega' \longrightarrow \Omega''$ sont des homomorphismes unitaires d'anneaux, posons $\varphi'' = \varphi'\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega''$. Alors dans le diagramme commutatif d'homomorphismes de compositeurs :

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} {[\Omega]} \arrow[rrr, "\omega"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "\varphi''"'] & & & E \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dd, "\psi''"] \\ & {[\Omega']} \arrow[r, "\omega'"] \arrow[dl, "\varphi'"] & E' & \\ {[\Omega'']} \arrow[rrr, "\omega''"'] & & & E'' \end{tikzcd}$$

obtenu en juxtaposant deux diagrammes du type (1) , on peut introduire un homomorphisme $\psi' : E' \longrightarrow E''$ sans détruire la commutativité.

L'homomorphisme ψ' est nécessairement unique : $E''_n = \Omega'' \otimes_{\varphi''} E_n$ s'identifie en tant que module à $\Omega'' \otimes_{\varphi'} E'_n = \Omega'' \otimes_{\varphi'} (\Omega' \otimes_{\varphi} E_n)$, et ψ' est défini par $\psi'_n f' = 1 \otimes_{\varphi'} f'$ pour $f' \in E'_n$. L'axiome (CA2) est un axiome de transitivité.

Nous écrirons désormais $\Omega' \otimes_{\varphi} E$ au lieu de E' .

Exemple : Prenons pour E le compositeur des Ω-algèbres associatives et commutatives. Alors E_n s'identifie canoniquement à l'anneau de polynomes $\Omega[e_{n,1}, \dots, e_{n,n}]$, et il y a une construction naturelle de $E' = \Omega' \otimes_{\varphi} E$.

La donnée du foncteur $\otimes$ pour un Ω-compositeur E est équivalente à la donnée, sur chaque E_n d'une structure de Ω-module n-gradué vérifiant certaines conditions. Précisons les notations nécessaires : N^n désignera l'ensemble des suites de n entiers ≥ 0 ; si $T_1, \ldots, T_n$ sont des éléments d'un anneau, et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, on notera T^α le "monôme" $T_1^{\alpha_1} \ldots T_n^{\alpha_n}$.

Soit E un Ω-compositeur analytique. Prenons pour Ω' l'anneau des polynomes $\Omega[T_1, \ldots, T_n]$ et pour φ l'isomorphisme naturel de Ω dans Ω'. Soit $f \in E_n$; nous avons $1 \otimes f \in E'_n$ et $T_i \otimes e_{n,i} \in E'_n$, donc :

$$(1 \otimes f)(T_1 \otimes e_{n,1}, \ldots, T_n \otimes e_{n,n}) \in E'_n = \Omega' \otimes_\varphi E_n .$$

Or tout élément de E'_n peut s'écrire, univoquement, comme une somme finie : $\sum_{\alpha \in N^n} T^\alpha \otimes g_\alpha$. Nous définissons donc des opérateurs $(P_\alpha)_{\alpha \in N}$ dans E_n en posant :

$$(1 \otimes f)(T_1 \otimes e_{n,1}, \ldots, T_n \otimes e_{n,n}) = \sum_{\alpha \in N^n} T^\alpha \otimes (P_\alpha f) .$$

On vérifie en utilisant les axiomes (CA) que les P_α sont des projecteurs d'homogénéité, c'est-à-dire que $P_\alpha^2 = P_\alpha$ et $P_\alpha P_\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, et que, pour tout $f \in E_n$, f est égal à la somme finie $\sum_{\alpha \in N^n} P_\alpha f$.

On notera alors E_n^α la composante homogène de degré α de E_n, c'est-à-dire le Ω-module des $f \in E_n$ tels que $f = P_\alpha f$.

On a alors les propriétés suivantes :

a) Chaque E_n est somme directe des sous-modules $(E_n^\alpha)_{\alpha \in N^n}$.

b) Si $f \in E_m^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $g_1, \ldots, g_m \in E_n$, alors $f(\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_n g_m) = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_m^{\alpha_m} \cdot f(g_1, \ldots, g_m)$ pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Omega$ (il convient de poser $\lambda^0 = 1$ même si $\lambda = 0$).

c) Si $f \in E_m^\alpha$, $g_i \in E_n^{\beta_i}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in N^m$, $\beta_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,n}) \in N^n$ pour $1 \leq i \leq m$, alors $f(g_1, \ldots, g_m) \in E_n^\gamma$, avec $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_{j,i}$.

d) Soit $f \in E_n^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, posons $g = f(e_{n+1,1} + e_{n+1,2}, e_{n+1,3}, \ldots, e_{n+1,n+1})$ (1), et considérons les composantes homogènes $P_\beta g$ ($\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$). Alors $P_\beta g = 0$ sauf si

(1) Plus simplement, $g = f(x_1 + x_2, \ldots, x_{n+1})$.

$\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1$ et $\beta_i = \alpha_{i-1}$ pour $3 \leq i \leq n+1$. Si ces conditions sont remplies, $(P_\beta g)(e_{n,1}, e_{n,1}, e_{n,2}, \ldots, e_{n,n}) = \dfrac{\alpha_1!}{\beta_1!\beta_2!} f$.

Réciproquement, si toutes ces propriétés sont supposées vérifiées, on peut définir le produit tensoriel $\otimes E$. L'idée de remplacer tous les axiomes de graduations par des axiomes de produits tensoriels est due à P. CARTIER. Elle abrège sensiblement l'exposé, car une démonstration complète d'existence du produit tensoriel à partir des axiomes de graduations exige des développements assez longs, quoique faciles.

Signalons enfin le rapport des notions introduites avec celle d'analyseur.

Un Ω-analyseur incomplet E est un Ω-compositeur analytique vérifiant l'axiome supplémentaire : $f(0, \ldots, 0) = 0$ pour tout $f \in E_n$ (les "termes constants" sont nuls).

Un Ω-analyseur complet s'obtient en complétant un Ω-analyseur incomplet, de façon à considérer des éléments qui ont une infinité de composantes homogènes non nulles. Cette complétion est en tous points semblable à celle qui fait passer des polynomes aux séries formelles.

Un Ω-analyseur complet est un Ω-compositeur, mais non un Ω-compositeur analytique (il faudrait modifier la définition du produit tensoriel en le remplaçant par un "produit tensoriel complété").