Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Robert Croisot

Sur la dualité dans les algèbres d'idéaux et de sous-modules

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1959-1960), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1959-1960__13_1_A1_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

9 novembre 1959

SUR LA DUALITÉ DANS LES ALGÈBRES D'IDÉAUX ET DE SOUS-MODULES

par Robert CROISOT

1. Rappel : la notion de $(\mathcal{T})$-algèbre. (Cf. L. LESIEUR et R. CROISOT [1]).

Une $(\mathcal{T})$-algèbre (L) est constituée par deux treillis $(\mathcal{T})$ et (L), satisfaisant aux axiomes suivants :

AXIOME A. - $(\mathcal{T})$ est un demi-groupe réticulé quasi-entier complet.

$(\mathcal{T})$ est donc muni d'une structure de demi-groupe multiplicatif et d'une structure de treillis complet. Les opérations du treillis $(\mathcal{T})$ seront notées + pour l'union (ou addition) (elle correspond à l'addition dans la plupart des applications que nous avons en vue), $\cap$ pour l'intersection ; la relation d'ordre est notée $\subseteq$ et la relation d'ordre strict associée $\subset$.
La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C} \; ; \quad (\mathcal{B} + \mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{A} \quad .$$

De plus, la distributivité a lieu même pour une somme infinie :

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i \in I} \mathcal{B}_i\right) = \sum_{i \in I} \mathcal{A}\mathcal{B}_i \; ; \quad \left(\sum_{i \in I} \mathcal{B}_i\right)\mathcal{A} = \sum_{i \in I} \mathcal{B}_i \mathcal{A} \quad .$$

On a aussi $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ($\mathcal{T}$ quasi-entier).
Enfin l'élément maximum de $(\mathcal{T})$, ou élément universel, sera noté $\mathcal{E}$ et l'élément nul ou minimum $\mathcal{Z}$. Les éléments de $(\mathcal{T})$ seront notés par des majuscules de ronde.

Dans les applications, $(\mathcal{T})$ est le treillis des idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro. L'opération + représente l'addition des idéaux bilatères d'un anneau ou la réunion des idéaux bilatères d'un demi-groupe. La multiplication est celle des idéaux.

AXIOME B. - (L) est un treillis complet.

Les opérations du treillis (L) seront notées + (union ou addition) et $\cap$, la relation d'ordre $\subseteq$ et la relation d'ordre strict associée $\subset$, l'élément maximum ou universel U, l'élément nul ou minimum N. Les éléments de (L) seront notés par des majuscules d'imprimerie.

Dans les applications, (L) est le treillis des idéaux à gauche d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro ou le treillis des sous-modules d'un module. Dans le cas où on étudie les idéaux bilatères d'un anneau ou d'un demi-groupe avec zéro, on prend $(L) = (\mathcal{T})$.

AXIOME C. - Les éléments de $(\mathcal{T})$ sont opérateurs dans (L) qui est ainsi muni d'une opération externe faisant correspondre à tout $\mathcal{A} \in (\mathcal{T})$ et tout $X \in (L)$ un élément $\mathcal{A}X \in (L)$, avec les lois suivantes :

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\,X = \mathcal{A}(\mathcal{B}X) \;;\quad \mathcal{A}X \subseteq X$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\,X = \mathcal{A}X + \mathcal{B}X \,,\quad \mathcal{A}(X + Y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y$$

Ces deux dernières relations sont aussi supposées valables pour les sommes infinies :

$$\Big(\sum_{i \in I} \mathcal{A}_i\Big)\,X = \sum_{i \in I} \mathcal{A}_i\,X \;;\quad \mathcal{A}\Big(\sum_{i \in I} X_i\Big) = \sum_{i \in I} \mathcal{A}X_i$$

De plus, $\mathcal{Z}X = \dot{M}$.

Dans le cas des idéaux à gauche d'un anneau A ou d'un demi-groupe D avec zéro, $\mathcal{A}X$ représente l'idéal à gauche produit de l'idéal bilatère $\mathcal{A}$ de l'anneau A (resp. du demi-groupe D) par l'idéal à gauche X de l'anneau A (resp. du demi-groupe D). Dans le cas des sous-modules d'un A-module M , $\mathcal{A}X$ est un sous-module produit de l'idéal bilatère $\mathcal{A}$ de l'anneau A par le sous-module X du module M . Dans le cas des idéaux bilatères d'un anneau A ou d'un demi-groupe D avec zéro, $\mathcal{A}X$ est le produit des deux idéaux bilatères $\mathcal{A}$ et X .

EXEMPLE 1. - $(\mathcal{T})$ et (L) sont confondus avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau A .

EXEMPLE 2. - $(\mathcal{T})$ et (L) sont confondus avec l'ensemble des idéaux bilatères d'un demi-groupe D avec zéro.

EXEMPLE 3. - $(\mathcal{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau A et (L) l'ensemble de ses idéaux à gauche.

EXEMPLE 4. - $(\mathcal{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un demi-groupe D avec zéro et (L) l'ensemble de ses idéaux à gauche.

EXEMPLE 5. - $(\mathcal{T})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau A et (L) l'ensemble des sous-modules d'un A-module M .

Des axiomes précédents résultent les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. - X <u>et</u> Y <u>étant donnés dans</u> (L) , <u>l'ensemble des éléments</u> $\mathcal{A} \in (\mathcal{T})$ <u>tels que</u> $\mathcal{A}Y \subseteq X$ <u>possède un élément maximum noté</u> $X^{\cdot}.Y$ <u>et appelé résiduel à gauche de</u> X <u>par</u> Y .

<u>Pour</u> $Y \nsubseteq X$, <u>on dit que</u> $X^{\cdot}.Y$ <u>est un résiduel à gauche propre de</u> X .

PROPRIÉTÉ 2. - X et $\mathcal{A}$ étant donnés ($X \in (L)$, $\mathcal{A} \in (\mathcal{T})$), l'ensemble des éléments $Y \in (L)$ tels que $\mathcal{A}Y \subseteq X$ possède un élément maximum noté $X.\cdot\mathcal{A}$ et appelé résiduel à droite de X par $\mathcal{A}$.

La théorie des $(\mathcal{T})$-algèbres est développée dans L. LESIEUR et R. CROISOT [2], [3], [4], [5] lorsque ces $(\mathcal{T})$-algèbres satisfont à l'axiome supplémentaire suivant :

AXIOME D. - L'ensemble des résiduels à gauche de tout élément $X \in (L)$ vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante.

Cet axiome est vérifié en particulier dans l'un ou l'autre des cas importants suivants :

1° Les treillis $(\mathcal{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne ascendante ;

2° Les treillis $(\mathcal{T})$ et (L) vérifient la condition de chaîne descendante ;

3° Le treillis (L) vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante ;

4° Le treillis $(\mathcal{T})$ vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante.

2. Définition de l'algèbre duale d'une $(\mathcal{T})$-algèbre (L).

Désignons maintenant par $(\overset{*}{\mathcal{T}})$ le demi-groupe opposé du demi-groupe $(\mathcal{T})$, la multiplication dans $(\overset{*}{\mathcal{T}})$ étant notée $*$. Autrement dit, nous posons $\mathcal{A} * \mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Nous munissons $(\overset{*}{\mathcal{T}})$ de la relation d'ordre de $(\mathcal{T})$. Nous notons $\overset{*}{\subseteq}$, $\overset{*}{\subset}$, $\overset{*}{+}$, et $\overset{*}{\cap}$ respectivement la relation d'ordre, la relation d'ordre strict, l'union et l'intersection dans $(\overset{*}{\mathcal{T}})$. Il est clair que ces signes ont le même sens que les signes $\subseteq$, $\subset$, $+$ et $\cap$ respectivement. L'élément universel $\overset{*}{\mathcal{E}}$ de $(\overset{*}{\mathcal{T}})$ n'est autre que $\mathcal{E}$ et son élément nul $\overset{*}{\mathcal{Z}}$ n'est autre que $\mathcal{Z}$.

Soit $(\overset{*}{L})$ le treillis dual du treillis (L). Nous notons $\overset{*}{\subseteq}$, $\overset{*}{\subset}$, $\overset{*}{+}$ et $\overset{*}{\cap}$ respectivement la relation d'ordre, la relation d'ordre strict, l'union et l'intersection dans $(\overset{*}{L})$. Ces signes ont le même sens que les signes $\supseteq$, $\supset$, $\cap$ et $+$ respectivement. L'élément universel $\overset{*}{U}$ de $(\overset{*}{L})$ est N et son élément nul $\overset{*}{N}$ est U.

Finalement, à tout $\mathcal{A} \in (\overset{*}{\mathcal{T}}) = (\mathcal{T})$ et tout $X \in (\overset{*}{L}) = (L)$, nous faisons correspondre un élément noté $\mathcal{A} * X \in (\overset{*}{L}) = (L)$ en posant $\mathcal{A} * X = X.\cdot\mathcal{A}$.

On voit alors aisément que les axiomes A, B et C sont vérifiés.

Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - $(\mathcal{T})$ et (L) satisfaisant aux axiomes A, B, et C, le demi-groupe opposé $(\overset{*}{\mathcal{T}})$ de $(\mathcal{T})$ muni de la même relation d'ordre et le treillis dual

$(\overset{*}{L})$ de (L) satisfont aussi aux axiomes A , B , et C .

DÉFINITION. - La $(\overset{*}{\mathcal{C}})$-algèbre $(\overset{*}{L})$ s'appelle l'algèbre duale de la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) .

Remarquons que le dual résiduel à gauche de X par Y que nous notons $X \overset{*}{\cdot\cdot} Y$ est $Y \cdot . X$ et que le dual résiduel à droite de X par $\mathcal{A}$ que nous notons $X \overset{*}{.\cdot} \mathcal{A}$ est $\mathcal{A}X$.

La $(\overset{*}{\mathcal{C}})$-algèbre $(\overset{*}{L})$ vérifiera l'axiome D si on a l'axiome suivant :

AXIOME $\overset{*}{D}$. - L'ensemble des duaux résiduels à gauche de tout élément $X \in (L)$ vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante.

L'axiome $\overset{*}{D}$ est notamment vérifié dans les cas suivants :

1° $(\mathcal{C})$ satisfait à la condition de chaîne ascendante et (L) à la condition de chaîne descendante ;

2° $(\mathcal{C})$ satisfait à la condition de chaîne descendante et (L) à la condition de chaîne ascendante ;

3° Toutes les chaînes de (L) sont de longueur finie ;

4° Toutes les chaînes de $(\mathcal{C})$ sont de longueur finie ;

Toutes les propriétés des $(\mathcal{C})$-algèbres satisfaisant à l'axiome $\overset{*}{D}$ fournissent grâce à la dualité des propriétés qu'il est facile de traduire à l'aide des notations primitives de $(\mathcal{C})$ et (L) .

Je vais en indiquer quelques-unes.

3. Applications.

a. Dual radical primal. Éléments duaux primaux. Théorèmes de représentation.

THÉORÈME 2. - Pour tout $X \in (L)$, l'ensemble des éléments $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$ tels que l'on ait :

$$\mathcal{A}X + \mathcal{B}X = X \Longrightarrow \mathcal{B}X = X$$

a un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X)$. Pour $X \neq N$, cet élément est l'intersection des duaux résiduels à gauche propres maximaux de X .

DÉFINITION. - $\overset{*}{\mathcal{R}}_4(X)$ se nomme le dual radical primal de X .

DÉFINITION. - Un élément $X \in (L)$ est dit dual primal si l'on a

$$\mathcal{A}X \subset X \ , \quad \mathcal{B}X \subset X \Longrightarrow \mathcal{A}X + \mathcal{B}X \subset X$$

ce qui équivaut à

$$\mathcal{A}X \subset X \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_4(X) \quad .$$

THÉORÈME 3. - Pour que X ($\neq N$) soit dual primal, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel à gauche propre maximal.

DÉFINITION. - L'élément X ($\neq N$) étant dual primal, son unique dual résiduel à gauche propre maximal $\mathfrak{M}$ est appelé l'élément premier associé à X. On dit que X est $\mathfrak{M}$-dual primal.

DÉFINITION. - Une représentation d'un élément X de (L) comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux primaux, soit $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, est dite réduite si aucun X_i n'est superflu, si les éléments premiers associés aux différents X_i sont distincts et si aucun X_i ne peut être remplacé par un élément de la forme $\mathfrak{A}X_i$ strictement plus petit que lui.

THÉORÈME 4. - Tout élément X de (L) est dual primal ou admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux primaux de la forme $\mathfrak{A}X$ (avec $\mathfrak{A} \in (\mathcal{L})$) dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux.

THÉORÈME 5. - Deux représentations réduites d'un élément X ($\neq N$) comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux primaux dont les éléments premiers associés sont incomparables deux à deux ont le même nombre d'éléments et le même ensemble d'éléments premiers associés, cet ensemble coïncidant avec l'ensemble des duaux résiduels maximaux de X.

b. Dual radical primaire. Éléments duaux primaires.

THÉORÈME 6. - Pour tout $X \in (L)$, l'ensemble des éléments $\mathfrak{A} \in (\mathcal{L})$ tels qu'il existe un entier positif m avec $\mathfrak{A}^m \subseteq N \,\dot{.}\, X$ possède un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X)$. Pour $X \neq N$, cet élément est l'intersection des éléments premiers minimaux de $(\mathcal{L})$ contenant $N \,\dot{.}\, X$.

DÉFINITION. - $\overset{*}{\mathcal{R}}_1(X)$ se nomme le dual radical primaire de X.

DÉFINITION. - Un élément X de (L) est dit dual primaire si l'on a $\mathfrak{A}X \subset X \Longrightarrow \exists$ k entier positif avec $\mathfrak{A}^k X = N$ ce qui équivaut à

$$\mathfrak{A}X \subset X \Longrightarrow \mathfrak{A} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_1(X)$$

THÉORÈME 7. - Pour que X ($\neq N$) soit dual primaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel à gauche propre premier qui soit élément premier minimum contenant $N \,\dot{.}\, X$.

DÉFINITION. - L'élément X ($\neq N$) étant dual primaire, son radical primaire étant $\mathfrak{P}$, on dit que X est $\mathfrak{P}$-dual primaire.

Les éléments duaux primaires permettent d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 8. - Soit A un anneau commutatif noethérien, M un A-module artinien. Tout sous-module (+)-irréductible est dual primaire, c'est-à-dire qu'il vérifie la condition : $aX \subset X \Longrightarrow \exists$ n entier positif avec $a^n X = 0$.
Tout sous-module admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini de sous-modules duaux primaires, deux représentations du même sous-module ayant même nombre d'éléments et mêmes idéaux premiers associés.

Ce théorème s'applique évidemment aux idéaux d'un anneau commutatif noethérien et artinien. Par contre, il n'est pas valable pour les demi-groupes.

c. Dual radical secondaire. Eléments duaux secondaires.

THÉORÈME 9. - Pour tout $X \in (L)$, l'ensemble des éléments $\mathfrak{a} \in (\mathcal{C})$ tels qu'il existe des entiers positifs k_i $(i = 0 , 1 , 2 , \ldots , n ; n \geq 0)$ et des éléments $\mathcal{L}_i \in (\mathcal{C})$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ vérifiant

$$\mathfrak{a}^{k_0} \mathcal{L}_1 \mathfrak{a}^{k_1} \mathcal{L}_2 \mathfrak{a}^{k_2} \ldots \mathcal{L}_n \mathfrak{a}^{k_n} X = N \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_i X = X$$

a un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X)$. Pour $X \neq N$, cet élément est l'intersection des éléments premiers minimaux de $(\mathcal{C})$ contenant $N^{\circ}. X$ et contenus dans un dual résiduel à gauche propre premier de X .

DÉFINITION. - $\overset{*}{\mathcal{R}}_2(X)$ se nomme le dual radical secondaire de X .

DÉFINITION. - Un élément X de (L) est dit dual secondaire si l'on a $\mathfrak{a}X \subset X \Longrightarrow k_i$ entiers positifs $(i = 0 , 1 , 2 , \ldots , n)$ et $\mathcal{L}_i \in (\mathcal{C})$ $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ tels que

$$\mathfrak{a}^{k_0} \mathcal{L}_1 \mathfrak{a}^{k_1} \mathcal{L}_2 \mathfrak{a}^{k_2} \ldots \mathcal{L}_n \mathfrak{a}^{k_n} X = N \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_i X = X$$

ce qui équivaut à

$$\mathfrak{a} X \subset X \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_2(X) \quad .$$

THÉORÈME 10. - Pour que X $(\neq N)$ soit dual secondaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel à gauche propre premier qui soit élément premier minimal contenant $N^{\circ}. X$.

DÉFINITION. - L'élément X $(\neq N)$ étant dual secondaire, son radical dual secondaire étant $\mathcal{P}$, on dit que X est $\mathcal{P}$-dual secondaire.

On peut utiliser les éléments duaux secondaires pour établir les résultats suivants :

THÉORÈME 11. - Soit A un anneau artinien à gauche, ayant un élément unité à gauche et, par conséquent, noethérien à gauche. Soit M un A-module. Tout sous-module dual primal est dual secondaire et tout sous-module admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini de sous-modules duaux secondaires, deux représentations du même sous-module ayant même nombre d'éléments et mêmes idéaux premiers associés.

COROLLAIRE. - Soit A un anneau artinien à gauche, ayant un élément unité à gauche. Tout idéal à gauche dual primal est dual secondaire et tout idéal à gauche admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'idéaux à gauche duaux secondaires, deux représentations du même idéal à gauche ayant même nombre d'éléments et mêmes idéaux premiers associés.

d. Dual radical tertiaire. Éléments duaux tertiaires.

DÉFINITION. - On appelle dual résiduel essentiel de $X \in (L)$ un élément $\mathcal{P} \in (\mathcal{C})$ tel qu'il existe $Y \subset X$ satisfaisant à $\mathcal{P} = Y \,\dot{.}\, X$ et à $Y \subseteq Z \subset X \Longrightarrow \mathcal{P} = Z \,\dot{.}\, X$.

Tout dual résiduel à gauche propre maximal est essentiel ; tout dual résiduel essentiel est premier.

THÉORÈME 12. - Pour tout $X \in (L)$, l'ensemble des éléments $\mathfrak{a} \in (\mathcal{C})$ tels que l'on ait

$$\mathfrak{a}X + C = X \Longrightarrow C = X$$

a un élément maximum $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(X)$. Pour $X \neq N$, cet élément est l'intersection des duaux résiduels essentiels de X.

DÉFINITION. - $\overset{*}{\mathcal{R}}_3(X)$ se nomme le dual radical tertiaire de X.

DÉFINITION. - Un élément $X \in (L)$ est dit dual tertiaire si l'on a

$$\mathfrak{a}X \subset X\ ,\ C \subset X \Longrightarrow \mathfrak{a}X + C \subset X$$

ce qui équivaut à

$$\mathfrak{a}X \subset X \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \overset{*}{\mathcal{R}}_3(X) \quad .$$

THÉORÈME 13. - Pour que X $(\neq N)$ soit dual tertiaire, il faut et il suffit qu'il possède un seul dual résiduel essentiel.

DÉFINITION. - L'élément X $(\neq N)$ étant dual tertiaire, son dual radical tertiaire étant $\mathcal{P}$, on dit que X est $\mathcal{P}$-dual tertiaire.

e. Théorèmes de représentation d'un élément comme somme finie d'éléments duaux tertiaires. - Nous supposons que le treillis (L) est dual semi-modulaire et qu'il vérifie la propriété suivante :

(1) $$X + (\bigcap_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} (X + Y_i)$$

pour tout X et tout sous-ensemble totalement ordonné $\{Y_i\}_{i \in I}$.

Nous supposons que l'axiome $\overset{*}{D}$ est renforcé par l'une ou l'autre des conditions suivantes :

1° $(\mathcal{C})$ satisfait à la condition de chaîne ascendante et (L) à la condition de chaîne descendante ;

2° $(\mathcal{C})$ satisfait à la condition de chaîne descendante et (L) à la condition de chaîne ascendante ;

3° Toutes les chaînes de (L) sont de longueur finie.
(Dans le premier et le troisième cas, la propriété (1) est trivialement vérifiée).

Moyennant ces conditions, tout élément de (L) est somme d'un nombre fini d'éléments (+)-irréductibles, c'est-à-dire d'éléments qui ne sont pas la somme de deux éléments strictement plus petits qu'eux.

THÉORÈME 14. - Tout élément X de (L) autre que N admet une représentation réduite comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux tertiaires.

THÉORÈME 15. - Deux représentations réduites d'un élément X ($\neq N$) comme somme d'un nombre fini d'éléments duaux tertiaires ont le même nombre d'éléments et le même ensemble d'éléments premiers associés, cet ensemble coïncidant avec l'ensemble des duaux résiduels essentiels de X.

Les théorèmes de représentation d'un élément comme somme finie d'éléments duaux tertiaires seront valables dans les cas suivants :

- idéaux à gauche d'un anneau artinien à gauche et noethérien bilatère ;
- idéaux à gauche d'un demi-groupe avec zéro artinien à gauche et noethérien bilatère ;
- idéaux à gauche d'un demi-groupe avec zéro noethérien à gauche et artinien bilatère ;
- idéaux bilatères d'un anneau noethérien bilatère et artinien bilatère ;
- idéaux bilatères d'un demi-groupe avec zéro noethérien bilatère et artinien bilatère ;
- sous-modules d'un module artinien sur un anneau noethérien bilatère ;
- sous-modules d'un module artinien et noethérien.

On trouvera le développement et la démonstration complète des résultats précédents dans L. LESIEUR et R. CROISOT [6].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Algèbre noethérienne non commutative, à paraître dans le Mémorial des Sciences mathématiques.

[2] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, Colloque d'Algèbre supérieure [1956. Bruxelles], p. 79-121. - Louvain, Ceuterick, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[3] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, III : Sur la notion de radical, Acad. royale Belg., Bull. Cl. Sc., 5e série, t. 44, 1958, p. 75-93.

[4] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - La notion de résidu essentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 357-360.

[5] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Une propriété caractéristique des idéaux tertiaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 517-520.

[6] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). - Sur la dualité dans les ($\mathfrak{G}$)-algèbres, Application aux anneaux, aux modules, aux demi-groupes, J. Math. pures et appl. (à paraître).