Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

Pierre Lefebvre

Demi-groupes admettant des complexes minimaux pour un résidu à droite ou bilatère donné

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1961-1962), exp. n° 5, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 5
18 décembre 1961

DEMI-GROUPES ADMETTANT DES COMPLEXES MINIMAUX POUR UN RÉSIDU À DROITE OU BILATÈRE DONNÉ

par Pierre LEFEBVRE

Introduction. - Cet exposé est celui de certains résultats du Chapitre I de ma thèse (à paraître aux Annali di Matematica). Laissant de côté le détail de l'enchaînement des théorèmes, ainsi que celui de démonstrations parfois assez longues, j'ai cherché ici à mettre en évidence les résultats les plus importants, et surtout à montrer comment ces derniers généralisaient des résultats obtenus antérieurement dans un cas très particulier. À cet égard, on pourra comparer le présent exposé avec le premier qui ait été fait sur ce sujet [7].

1. Problèmes et résultats antérieurs.

1° Dans toute la suite de cet exposé, D désigne un demi-groupe quelconque, non commutatif, non unitaire, avec ou sans zéro.

2° Dans un précédent mémoire [6], P. DUBREIL proposait d'étudier les demi-groupes admettant des complexes nets minimaux. Rappelons qu'une partie H de D est dite nette à droite, par exemple, si : $\forall\ a \in D\ ,\ \exists\ x \in D$ tel que $ax \in H$. Un complexe est dit net s'il est net à droite et net à gauche. L'hypothèse de minimalité concerne d'abord des complexes nets d'un côté. La même étude dans le cas des complexes nets au sens précédent ne paraît pas pouvoir se faire aussi facilement ; par contre, j'ai obtenu des résultats tout à fait analogues en utilisant la définition des complexes bilatèrement nets due à R. CROISOT [3] : un complexe H est net bilatère si $\forall\ a \in D\ ,\ \exists\ (x\ ,\ y) \in D \times D$ tel que $xay \in H$.

3° Dans un mémoire déjà ancien [2], CLIFFORD et MILLER avaient étudié les demi-groupes admettant des éléments nets d'un côté (ou éléments zéroïdes) ; ceux-ci sont évidemment des complexes nets d'un côté minimaux. Lorsqu'il y a à la fois des éléments nets à gauche et des éléments nets à droite, les ensembles des éléments de chaque type sont égaux et l'ensemble commun est un groupe, idéal bilatère minimum de D. Les demi-groupes admettant un groupe comme idéal bilatère, nécessairement minimum, furent appelés homogroupes et étudiés dans sa thèse par G. THIERRIN [10].

4° Dans un premier travail, nous avions donc étudié cette généralisation des homogroupes qu'étaient les demi-groupes admettant à la fois des complexes nets à gauche minimaux et des complexes nets à droite minimaux. En considérant d'abord le cas où il existe des complexes nets à droite minimaux, par exemple, nous avions obtenu les principaux résultats suivants [7][8].

a. Entre deux complexes nets à droite minimaux K et K', on peut établir une correspondance biunivoque définie par l'application $f : K \xrightarrow{f} K'$, $k \in K$, $k' \in K'$, $k' = f(k)$ si et seulement s'il existe $x \in D$ tel que $k' = kx$, ou ce qui est équivalent, s'il existe $x' \in D$ tel que $k = k' x'$.

b. Pour qu'un demi-groupe admette des complexes nets à droite minimaux, il est nécessaire et suffisant qu'une des conditions suivantes soit satisfaite :

- D admet des idéaux à droite minimaux.
- D admet un idéal bilatère N, N étant un demi-groupe à idéaux à droite minimaux et étant somme de ces idéaux (N est alors somme des idéaux à droite minimaux de D et c'est l'idéal bilatère minimum, ou noyau, de D).

c. Si un demi-groupe admet à la fois des complexes nets à droite minimaux, dont on désigne la réunion par R, et des complexes nets à gauche minimaux, dont la réunion est R', on a $R = R'$ et l'ensemble commun N est un idéal bilatère complètement simple. Réciproquement, un demi-groupe admettant un idéal bilatère complètement simple est un demi-groupe possédant à la fois des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux.

5° Malheureusement, ces résultats s'avèrent triviaux dans le cas d'un <u>demi-groupe avec zéro</u>, car alors $\{0\}$ est un complexe net, à gauche et à droite, minimal, et c'est le seul. Comme 0 appartient au résidu (à droite et à gauche) de tout complexe ne le contenant pas, il apparut alors qu'une généralisation du problème précédent susceptible de donner des résultats non triviaux dans le cas avec zéro devait faire intervenir le résidu d'un complexe. C'est ce que nous allons étudier en détails dans le paragraphe suivant.

2. <u>Problèmes récents. Définitions et hypothèses.</u>

1° <u>Définitions.</u> – Le <u>résidu à droite</u> W_H d'un complexe H de D est l'ensemble des éléments w de D tels que $H \cdot\!\!\cdot w = \emptyset$. C'est un idéal à droite [5]. Si on désigne par $H \cdot\cdot a$ l'ensemble des couples $(x, y) \in D \times D$ tels que $xay \in H$, on définit de même le <u>résidu bilatère</u> W'_H de H comme l'ensemble des éléments w de D tels que $H \cdot\cdot w = \emptyset$. C'est un idéal bilatère [3].

2° Problème. - Le problème posé est donc le suivant : un idéal à droite W de D étant donné, existe-t-il des complexes K admettant W pour résidu à droite, et minimaux pour cette condition ? (Notons que si $K' \subset K$, on a $W_K \subseteq W_{K'}$; par conséquent, si K est minimal, $W_K \subset W_{K'}$). Quelles sont alors les propriétés de ces complexes et la structure des demi-groupes en contenant ? Le même problème peut être abordé en partant d'un idéal bilatère W', pour des complexes admettant W' pour résidu bilatère. Disons tout de suite que les méthodes d'étude et les résultats sont tout à fait semblables à ceux du cas monolatère. Nous nous bornerons à donner un théorème de structure pour ce cas à la fin de l'exposé.

Tel qu'il est posé, le problème ne paraît pas facile à résoudre : nous avons dû, pour progresser, faire certains sacrifices, c'est-à-dire introduire des hypothèses supplémentaires. Certaines d'entre elles sont d'ailleurs imposées par la nature même des choses ; d'autres, au contraire, laissent la porte ouverte à des recherches ultérieures. Par exemple, nous n'avons considéré que des complexes ne coupant pas leur résidu. Il serait intéressant d'examiner ce qui se passe lorsque $K \cap W \neq \emptyset$.

3° Hypothèses supplémentaires. - Tout d'abord, un idéal à droite donné W n'est résidu à droite de complexes de D que s'il vérifie la condition $WD \cdot . D = W$ (idéaux fermés à droite [4]) ; un idéal bilatère W' n'est résidu bilatère que s'il est bilatèrement fermé : $(DW'D \cdot . D) . \cdot D = (DW'D . \cdot D) \cdot . D = W'$ [3].

Ensuite (pour éviter que les complexes W-minimaux ne coupent W) nous avons imposé aux complexes H admettant W pour résidu d'être dégagés de leur résidu [4], c'est-à-dire de vérifier la condition $H \cap D^2 \cap W = \emptyset$ dans le cas monolatère ou $H \cap D^3 \cap W = \emptyset$ dans le cas bilatère (complexes faiblement dégagés de W).

4° Problème traité. - Finalement, nous avons étudié les points ou éléments minimaux de l'ensemble $\mathcal{H}$, ordonné par inclusion, des complexes admettant un idéal à droite fermé W pour résidu à droite et dégagés de W (ainsi que les points de l'ensemble $\mathcal{H}'$ des complexes admettant un idéal bilatère bilatèrement fermé W' pour résidu bilatère faiblement dégagés de W').

Dans la suite, les points de $\mathcal{H}$ sont appelés complexes W-minimaux à droite et ceux de $\mathcal{H}'$ complexes W'-minimaux bilatères.

5° Idéaux fortement larges. - Pour que, dans un demi-groupe donné D, pour un idéal à droite fermé à droite W, il existe des complexes W-minimaux à droite, il est d'abord nécessaire que $\mathcal{H}$ ne soit pas vide. Ceci impose à W une condition plus forte que "fermé à droite". C'est ce que montre le lemme suivant :

LEMME 2.1. - *Pour qu'un idéal à droite W $(W \neq D)$ soit le résidu d'au moins un complexe dégagé de W, il faut et il suffit que W vérifie la condition :*

$$\text{(L)} \qquad W \cdot\!\cdot D = W \quad .$$

Pour un idéal quelconque W, on a $W \subseteq WD \cdot\!\cdot D \subseteq W \cdot\!\cdot D$. La condition (L) est donc plus forte que la condition "fermé à droite" $(WD \cdot\!\cdot D = W)$.

La condition (L) est nécessaire. - Supposons que W soit résidu à droite du complexe H dégagé de W, et que $a \in D$, $aD \subseteq W$; si $a \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$, d'où puisque $aD \subseteq W$, $ax \in H \cap D^2 \cap W$, en contradiction avec l'hypothèse " H dégagé de W ".

La condition (L) est suffisante. - Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \notin W$ (car $aD \subseteq W$ entraîne $a \in W$ par hypothèse). Le complexe $H = \{ax \; ; \; ax \notin W\}$ n'est pas vide, est disjoint de W, contenu dans D^2, donc est dégagé de W. Montrons que $W_H = W$. Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$, par définition de H. Si $a \in D - W_H$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in H$, alors $a \notin W$ car sinon $ax \in H \cap W$ en contradiction avec $H \cap W = \emptyset$.

DÉFINITION 2.1. - *Un idéal à droite W de D vérifiant la condition (L) : $W \cdot\!\cdot D = W$ est dit fortement large à droite.*

D'après [4], théorèmes 6 et 8, un tel idéal à droite est bien un idéal large, car un idéal à droite large m peut se caractériser par la condition : $(m \cdot\!\cdot D) \cap (D - D^2) \subseteq m$; de plus, tout idéal à droite premier $p \neq D$ est fortement large à droite.

Le tableau suivant met en évidence les implications reliant les diverses conditions étudiées pour les idéaux à droite de D, considérés comme résidus à droite de certains complexes de D. Nous y avons fait figurer les deux cas particuliers auxquels nous nous intéresserons éventuellement par la suite : W premier et $W = \emptyset$.

Idéal $\emptyset$	$\Longrightarrow$	Idéal à droite premier	$\Longrightarrow$	Idéal à droite fortement large à droite	$\Longrightarrow$	Idéal à droite fermé à droite
$\Updownarrow$				$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
Résidu d'un complexe net à droite de D		$\Longrightarrow$		Résidu à droite d'un complexe de D dégagé de ce résidu	$\Longrightarrow$	Résidu à droite d'un complexe de D

3. Propriétés des complexes admettant un résidu à droite donné fortement large à droite W, dégagés de W, et minimaux (complexes W-minimaux à droite).

Dans toute la suite, W est un idéal à droite de D, fortement large à droite, $\mathcal{K}$ la famille, supposée non vide, des complexes W-minimaux à droite de D, et K un complexe W-minimal à droite quelconque : $K \in \mathcal{K}$.

Toutes les propriétés de ce paragraphe sont des conséquences plus ou moins directes du lemme suivant, qui généralise le lemme 1 de [6].

LEMME 3.1. - *Soient* K *un complexe dégagé de son résidu à droite* $W_K = W$, *et* k *un élément de* K. *Pour que* $K - \{k\}$ *admette* W *pour résidu à droite, il faut et il suffit que* $k(K \cdot^{\bullet} k) \neq \{k\}$.

Supposons que $K - \{k\}$ admette W pour résidu à droite. Si $K \cdot^{\bullet} k = \emptyset$, on a bien $k\emptyset = \emptyset \neq \{k\}$; si $K \cdot^{\bullet} k \neq \emptyset$, $k \notin W_K = W_{K-\{k\}} = W$. Il existe donc $x \in D$ tel que $kx \in K - \{k\}$, d'où $k(K \cdot^{\bullet} k) \neq \{k\}$.

Inversement, supposons que, pour $k \in K$, on ait $k(K \cdot^{\bullet} k) \neq \{k\}$, K étant dégagé de W. Pour démontrer l'égalité $W_K = W_{K-\{k\}}$, il suffit de prouver l'inclusion $D - W_K \subseteq D - W_{K-\{k\}}$. Soit $a \in D - W_K$ et $x \in D$ une solution de $ax \in K$; si $ax \in K - \{k\}$, $a \notin W_{K-\{k\}}$. Sinon $ax = k$, d'où $k \in D^2 \cap K$, puis $k \notin W$ puisque $K \cap D^2 \cap W = \emptyset$. Il existe alors, par hypothèse, dans le quotient non vide $K \cdot^{\bullet} k$, un élément m tel que $km = k' \neq k$, c'est-à-dire $axm = km = k' \in K - \{k\}$ d'où $a \notin W_{K-\{k\}}$, ce qui est contradictoire.

De ce lemme résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. - *Pour qu'un complexe* K *dégagé de son résidu à droite* W *soit* W-*minimal à droite, il faut et il suffit que, pour tout* $k \in K$, *on ait* $k(K \cdot^{\bullet} k) = \{k\}$.

Remarque. - La condition $\forall\ k \in K$, $k(K \mathbin{.\!\!^{\bullet}} k) = \{k\}$ entraîne $\forall\ k \in K$, $K \mathbin{.\!\!^{\bullet}} k \neq \emptyset$, c'est-à-dire K disjoint de W, conformément à la condition signalée au § 2, 2°.

Parmi les corollaires de ce théorème, l'un des plus utiles est une sorte de règle se simplification :

COROLLAIRE 3.1. - Si k_1 et k_2 sont deux éléments de K, complexe W-minimal à droite, la relation $k_1\, x_1 = k_2\, x_2 \notin W$ $(x_1\, ,\, x_2 \in D)$ entraîne $k_1 = k_2$.

On étudie ensuite certaines correspondances entre deux complexes ayant même résidu à droite et dégagés de ce résidu. Dans le cas où ces deux complexes sont deux complexes W-minimaux à droite K et K', on déduit des propriétés de cette correspondance le

THÉORÈME 3.2. - Entre deux complexes W-minimaux à droite K et K', il existe une correspondance biunivoque, définie par l'application f de la façon suivante : $k \in K$, $k' \in K'$, $k' = f(k)$ si et seulement s'il existe $x \in D$ tel que $k' = kx$ ou, ce qui est équivalent, s'il existe $x' \in D$ tel que $k = k'\, x'$.

Nous renvoyons à [9] pour l'étude complète et les démonstrations de cette partie. Par contre, nous donnerons la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.3. - Dans un demi-groupe D contenant des complexes W-minimaux à droite, tout complexe admettant W comme résidu à droite, et dégagé de celui-ci, contient au moins un complexe W-minimal à droite.

Soient K' un complexe admettant W pour résidu à droite, et dégagé de W, K un complexe W-minimal à droite arbitrairement choisi.

Si $k \in K$, $k \notin W = W_{K'}$, donc il existe $x_1 \in D$ tel que $kx_1 = k'_1 \in K'$. En choisissant pour chaque $k \in K$, un seul k'_1 pour image de k, nous définissons une application f_1 de K sur un sous-ensemble K'_1 de K'. Montrons que K'_1 est W-minimal à droite. $K'_1 \subseteq K'$ entraîne $W_{K'} = W \subseteq W_{K'_1}$. Montrons que $D - W \subseteq D - W_{K'_1}$. Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$ tel que $ax = k \in K$, d'où $axx_1 = kx_1 = k'_1 \in K'_1$, c'est-à-dire $a \notin W_{K'_1}$. Puisque K' est dégagé de W, K'_1 l'est aussi. Montrons qu'il est W-minimal à droite. Soit $k'_1\, x = k'_2$ avec $x \in D$, $k'_1\, ,\, k'_2 \in K'_1$, d'où $k'_1 = f_1(x_1)$; $k'_2 = f_1(k_2)$ pour $k_1\, ,\, k_2 \in K$. Il existe $x_1\, ,\, x_2 \in D$ tels que $k'_1 = k_1\, x_1$, $k'_2 = k_2\, x_2$, d'où $k_1\, x_1\, x = k'_2 = k_2\, x_2$ avec $k'_2 \notin W$ puisque K' est dégagé de W. K étant W-minimal à droite, on a

$k_1 = k_2$ d'après le corollaire 3.1. Finalement $f_1(k_1) = f_1(k_2)$ et $k_1' = k_2'$. La minimalité de K_1' en résulte, d'après le théorème 3.1.

4. Étude de la réunion des complexes W-minimaux à droite d'un demi-groupe D. Structure des demi-groupes admettant des complexes W-minimaux d'un côté.

Dans ce paragraphe, nous étudions la réunion R des complexes W-minimaux de D : $R = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$. Nous déduirons de cette étude des renseignements concernant la structure des demi-groupes qui possèdent des complexes W-minimaux d'un côté, pour un idéal à droite fortement large donné W.

1° K étant un complexe W-minimal à droite, et m un élément quelconque de D, désignons par E l'ensemble des éléments e de K tels que $em \in W$: $E = \{e \; ; \; e \in K , \; em \in W\}$ et posons $F = K - E = \{f \; ; \; f \in K , \; fm \notin W\}$.

LEMME 4.1. - Le complexe $L = E \cup Fm$ est W-minimal à droite.

Puisque K est disjoint de W, il en est de même de E ; d'après la définition de F, on a $Fm \cap W = \emptyset$. L est donc disjoint de W. Montrons que $W_L = W$.

Si $a \notin W$, il existe un élément x de D tel que $ax = k \in K$. Si $k \in E$, $ax \in L$; si $k \in F$, $axm \in Fm \subseteq L$; dans les deux cas $a \notin W_L$.

Si $a \notin W_L$, il existe $x_1 \in D$ tel que $ax_1 \in L$, d'où $ax_1 \notin W$; W étant un idéal à droite, nous avons $a \notin W$, l'égalité $W_L = W$ est établie.

Montrons enfin que L est W-minimal à droite, en utilisant le théorème 3.1. Supposons que l'on ait $\ell x \in L$, pour un $\ell \in L$ et un $x \in D$.

a. Si $\ell = fm$, avec $f \in F$, on ne peut avoir $\ell x = fmx = e \in E$ car, d'après le corollaire 3.1 (applicable puisque $e \notin W$) il en résulterait $f = e$, égalité impossible puisque E et F sont par définition disjoints. Donc $\ell x = fmx = f'm$ avec $f' \in F$, d'où $f = f'$ (toujours le théorème 3.1) et finalement $\ell x = fmx = fm = \ell$.

b. Si $\ell = e \in E$, on en peut avoir $\ell x = ex = fm$ car $fm \notin W$ entraînerait encore $e = f$. Donc $\ell x = ex = e' \in E$. Le théorème 3.1 appliqué au complexe K, W-minimal à droite, donne alors $e' = e$ et par conséquent $\ell x = \ell$.

Les relations $\ell x \in L$, $\ell \in L$, entraînant $\ell x = \ell$, nous avons, pour tout $\ell \in L$, $\ell(L \cdot\!\!\cdot\, \ell) = \{\ell\}$; L étant disjoint, et a fortiori dégagé de son résidu W, est un complexe W-minimal à droite d'après le théorème 3.1.

Pour un élément quelconque k de K, désignons par $D_k = D - (W \cdot\!\cdot\, k)$ l'ensemble des éléments m de D tels que $km \notin W$.

THÉORÈME 4.1.

(1) <u>Si</u> $m \in D_k$, km <u>appartient à au moins un complexe</u> W-<u>minimal à droite</u>.
(2) <u>Si</u> $m \in \bigcap_{k\in K} D_k = T$, Km <u>est un complexe</u> W-<u>minimal à droite</u>.

(1) Si $m \in D_k$, c'est-à-dire $km \notin W$, on a, avec les notations du lemme, $km \in Fm \subseteq L$, et L est, d'après le même lemme, un complexe W-minimal à droite.

(2) Si $m \in T$, on a, pour tout $k \in K$, $km \notin W$, d'où, encore avec les notations du lemme, $E = \emptyset$, $F = K$ et enfin $Km = L$.

<u>Remarque</u>. - On trouvera dans [9] les contre-exemples qui montrent qu'on peut avoir $T = \emptyset$, et qu'on ne peut rien dire en général lorsqu'on multiplie les éléments de K à gauche par m.

2° <u>Relations entre idéaux et complexes</u> W-<u>minimaux</u>.

a. Les premiers résultats sur les demi-groupes admettant des complexes nets d'un côté minimaux ([7][8]) montraient que l'existence de ces derniers équivalent à celle d'idéaux du même côté minimaux. Nous généralisons ici cette liaison en introduisant la notion d'idéal d'un côté ou bilatère W-minimal.

b. DÉFINITION 4.1. - W <u>étant un idéal à gauche, à droite ou bilatère du demi-groupe</u> D, <u>nous disons qu'un idéal</u> I <u>de</u> D, <u>de même nature que</u> W, <u>non contenu dans</u> W, <u>est</u> W-<u>minimal, s'il couvre</u> $I \cap W$.

c. THÉORÈME 4.2. - k <u>étant un élément quelconque de</u> $R = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} K$, <u>l'idéal à droite</u> kD <u>engendré dans</u> D <u>par</u> k <u>est égal à</u> kD <u>et est</u> W-<u>minimal</u>.

L'idéal à droite engendré dans D par k est $kD \cup \{k\}$ ou encore, d'après le théorème 3.1, kD. Supposons qu'il existe un idéal à droite V tel que $kD \cap W \subset V \subset kD$. La première inclusion étant stricte $k' \in V$, $k' \notin W$; l'idéal $J' = k'D \cup \{k'\}$ engendré par k' dans D vérifie $J' \subseteq V \subset kD$; nous avons donc nécessairement $k' \neq k$. Puisque $k' \in kD$, il existe, d'après le théorème 4.1, un complexe W-minimal à droite K' contenant k' ; les propriétés de la correspondance définie au théorème 3.2 entre K et K' entraînent que $k = k'x'$ pour un $x' \in D$, donc $k \in k'D \cup \{k'\} = J'$, d'où $kD \subseteq J'$, en contradiction avec les inclusions $J' \subseteq V \subset kD$. D'après la définition 4.1, l'idéal kD $(k \in K)$ est W-minimal.

COROLLAIRE 4.1. - Si un demi-groupe admet des complexes W-minimaux d'un côté, il admet des idéaux côté W-minimaux. En particulier, si un demi-groupe contient des complexes nets d'un côté minimaux, il contient des idéaux du même côté minimaux.

Pour établir une réciproque de ce théorème, on établit les propositions suivantes, pour la démonstration desquelles on renvoie à [9].

LEMME 4.2.

a. Si le résidu à droite, W_H, d'un complexe H est contenu dans un idéal à droite W, H coupe tout idéal à droite I de D non contenu dans W : $H \cap I \neq \emptyset$, $I \nsubseteq W$.

b. Si H coupe tout idéal à droite de D non contenu dans un idéal à droite W, et si W est fortement large à droite, le résidu à droite de H est contenu dans W, $W_H \subseteq W$.

COROLLAIRE 4.2. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe H, dégagé d'un idéal à droite fortement large à droite W, ait W pour résidu à droite, est que, pour tout idéal à droite I non contenu dans W, on ait : $H \cap [I - (I \cap W)] \neq \emptyset$.

Nous dirons alors que H coupe I en dehors de W.

COROLLAIRE 4.3. - Si le demi-groupe D contient des complexes W-minimaux à droite, tout idéal à droite de D non contenu dans W contient l'idéal à droite W-minimal engendré par un élément k d'un complexe W-minimal arbitraire K.

On peut maintenant étudier les demi-groupes qui contiennent des idéaux à droite W-minimaux, pour un idéal à droite W fortement large à droite.

Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble de ces idéaux ; par définition $I \in \mathfrak{J}$ entraîne $I \nsubseteq W$; considérons la partition de $\mathfrak{J}$ définie par l'équivalence $\mathcal{S}$ suivante :

$$I \equiv J \quad (\mathcal{S}) \iff I - (I \cap W) = J - (J \cap W) \quad .$$

Si $W = \emptyset$, $\mathcal{S}$ est l'égalité dans $\mathfrak{J}$.

LEMME 4.3. - Si I et J sont deux idéaux à droite W-minimaux appartenant à des classes différentes modulo $\mathcal{S}$, I et J ne se coupent pas en dehors de W.

On a en effet : $I \cap W \subseteq (I \cap W) \cup (I \cap J) \subseteq I$. De la W-minimalité de I résulte alors soit $I \cap W = (I \cap W) \cup (I \cap J)$ c'est-à-dire $I \cap J \subseteq W$; soit $(I \cap W) \cup (I \cap J) = I$ d'où $I - (I \cap W) \subseteq J - (J \cap W)$. Ce même raisonnement fait à partir des inclusions $J \cap W \subseteq (J \cap W) \cup (I \cap J) \subseteq J$ montre qu'on a, soit $I \cap J \subseteq W$, soit $J - (J \cap W) \subseteq I - (I \cap W)$. Finalement, ou bien $I \cap J \subseteq W$, ou bien $I - (I \cap W) = J - (J \cap W)$. La propriété du lemme en résulte.

Ce lemme, et le lemme 4.2, permettent de démontrer le :

THÉORÈME 4.3. – Soient D un demi-groupe et W un idéal à droite fortement large à droite de D ; s'il existe des idéaux à droite W-minimaux et si tout idéal à droite de D , non contenu dans W , contient (au moins) un idéal à droite W-minimal, D possède des complexes W-minimaux à droite.

Choisissons dans chaque classe α modulo $\mathcal{S}$ un idéal I_α et dans cet idéal un élément et un seul i_α n'appartenant pas à W : $i_\alpha \notin W$. Considérons le complexe K ensemble des i_α . Par construction, K est disjoint, donc dégagé de W , et il coupe tout idéal à droite de D non contenu dans W en dehors de W ; d'après le corollaire 4.2, K a donc W pour résidu à droite. Il est W-minimal, puisque $K - \{i_\alpha\}$, pour une certaine classe α , ne coupe en dehors de W , ni I_α , ni les idéaux de la classe α , et n'admet donc pas, d'après le corollaire 4.2, W pour résidu à droite.

Remarque 1. – Cette démonstration fournit une démonstration de l'équipotence des complexes W-minimaux à droite de D . En effet, il résulte de leur formation à partir des classes d'idéaux à droite W-minimaux que ces complexes ont même puissance que l'ensemble $\mathcal{J}/\mathcal{S}$ des classes modulo $\mathcal{S}$. Dans le cas $W = \emptyset$, $\mathcal{S}$ étant l'égalité, la puissance d'un complexe net à droite minimal est celle de l'ensemble des idéaux à droite minimaux.

Remarque 2. – On trouvera dans [9] un contre-exemple montrant que l'hypothèse "tout idéal à droite non contenu dans W contient un idéal à droite W-minimal" n'est pas superflue.

En rassemblant les résultats obtenus, nous pouvons énoncer finalement :

THÉORÈME 4.4. – Pour qu'un demi-groupe D possède des complexes W-minimaux à droite, il faut et il suffit qu'il satisfasse simultanément aux trois conditions suivantes :

1° W est un idéal à droite fortement large à droite de D.

2° D contient des idéaux à droite W-minimaux.

3° Tout idéal à droite de D, non contenu dans W, contient au moins un idéal à droite W-minimal.

On démontre encore le théorème suivant [9] qui précise la structure des idéaux à droite W-minimaux d'un demi-groupe contenant des complexes W-minimaux à droite.

THÉORÈME 4.5. - Si un demi-groupe contient des complexes W-minimaux à droite, tous les idéaux à droite W-minimaux de D sont de la forme $I_m = kD \cup W_1$, où k est un élément quelconque d'un complexe W-minimal à droite arbitraire et W_1 un idéal à droite contenu dans W $(\emptyset \subseteq W_1 \subseteq W)$. Si Σ est la réunion de ces idéaux, on a :

$$\Sigma = R + W \quad .$$

Pour $W = \emptyset$, on retrouve la relation $\Sigma = R$ ([7][8]).

3° Propriétés supplémentaires quand W est bilatère.

Avant d'aborder l'étude de la structure de D, nous devons examiner ce qui se passe quand W est un idéal bilatère de D, fortement large à droite.

THÉORÈME 4.6. - Soit D un demi-groupe admettant des idéaux à droite W-minimaux, pour un idéal bilatère W. Si I est un idéal à droite W-minimal, et c un élément quelconque de D, cI est contenu dans W ou est un idéal à droite W-minimal.

cI est un idéal à droite ; si $cI \nsubseteq W$, supposons qu'il existe un idéal à droite V tel que $cI \cap W \subseteq V \subsetneq cI$. Soit I_1 l'ensemble des éléments i_1 de I tels que $ci_1 \in V$. Pour tout $d \in D$, $ci_1 d \in V$, donc $i_1 d \in I_1$: I_1 est un idéal à droite contenu dans I. Si $i \in I \cap W$, $ci \in W$ donc $ci \in cI \cap W \subseteq V$, c'est-à-dire que $i \in I_1$, d'où $I \cap W \subsetneq I_1$. D'après la minimalité de I, ou bien $I \cap W = I_1$, ou bien $I_1 = I$; dans le premier cas, on a $I_1 \subseteq W$, $cI_1 = V \subseteq W$, d'où $V \subseteq cI \cap W$, et finalement $V = cI \cap W$; dans le second cas $V = cI_1 = cI$; cI couvre bien $cI \cap W$.

C. Q. F. D.

Ce théorème généralise un théorème de CLIFFORD [1] : si I est un idéal à droite minimal, cI est un idéal à droite minimal.

COROLLAIRE 4.4. - *Soit* D *un demi-groupe admettant des complexes* W-*minimaux à droite, pour un idéal bilatère* W *fortement large à droite. Si* k *est un élément d'un complexe* W-*minimal à droite,* K *et* c *un élément de* D *tel que* $c \notin W^{\circ}\cdot k$ *, on a* $ck \in R = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$, $\mathcal{K}$ *désignant l'ensemble des complexes* W-*minimaux à droite de* D .

L'idéal kD est W-minimal à droite (théorème 4.2) donc le complexe ckD est, d'après le théorème précédent, un idéal à droite W-minimal (car $ckD \subseteq W$ entraîne $ck \in W$), donc $ckD = k_1 D \cup W_1$ d'après le théorème 4.5 (W_1 idéal à droite de D contenu dans W , k_1 élément de R).

Il existe $x \in D$ tel que $kx = k$, donc $ck \in k_1 D \cup W_1$ et, puisque $ck \notin W$, il existe $y \in D$ tel que $ck = k_1 y \notin W$ avec $k_1 y \in R$ d'après le théorème 4.1.

COROLLAIRE 4.5. - *Dans un demi-groupe admettant des complexes* W-*minimaux à droite, pour un idéal bilatère* W , *la réunion* $\Sigma = R + W$ *des idéaux à droite* W-*minimaux est un idéal bilatère.*

4° *Introduction de la condition* " W *réflectif". Étude dans ce cas de la structure de* R .

Nous n'avons pu étudier la structure de R dans le cas d'un idéal quelconque, même supposé bilatère. Nous avons dû introduire l'hypothèse restrictive suivante :

DÉFINITION 4.2. - *Un complexe* H *de* D *est dit réflectif si* $ab \in H$ *entraîne* $ba \in H$.

On suppose dans toute la suite de ce paragraphe que W est un idéal à droite fortement large à droite et réflectif. W est donc un idéal bilatère fortement large à gauche et à droite :

$$(aD \subseteq W) \iff (Da \subseteq W) \iff (a \in W) \quad .$$

Nous étudions dans ce cas la structure de la réunion R des complexes W-minimaux à droite de D, supposés exister. Pour cela, nous considérons d'abord l'ensemble $\overline{Z}$ des éléments de R dont le carré appartient à W. Plus généralement, on démontre facilement la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 4.1. - Si W est un idéal réflectif de D, l'ensemble Y des éléments a de D tels que $a^2 \in W$ est un idéal bilatère.

On pose $\overline{Z} = R \cap Y$, $R^* = R - \overline{Z}$.

PROPRIÉTÉ 4.2. - Pour tout élément $k \in \overline{Z}$ $(k^2 \in W)$ et tout élément $k' \in R$, $kk' \in W$.

Si $kk' \notin W$, $k'k \notin W$ puisque W est réflectif ; d'après une conséquence immédiate du corollaire 3.1, il existe $x \in D$ tel que $k'kx = k'$, d'où $kk'kx = kk' \notin W$. Donc $kk'k \notin W$ ou $k^2 k' \notin W$ en contradiction avec $k^2 \in W$.

On peut représenter la structure de D par le schéma ci-contre analogue à une table de multiplication et exprimant des propriétés telles que $\overline{Z}W \subseteq W$, $W^2 \subseteq W$, etc.

	W	$\overline{Z}$	R^*	
W	W	W	W	W
$\overline{Z}$	W	W	W	
R^*	W	W		
	W			

PROPRIÉTÉ 4.3. - Soient K_1 et K_2 deux complexes W-minimaux à droite de D. Si l'on pose $Z_1 = K_1 \cap \overline{Z}$, $Z_2 = K_2 \cap \overline{Z}$, on a $Z_2 = f(Z_1)$, $Z_1 = f^{-1}(Z_2)$, où f désigne l'application bijective de K_1 sur K_2 définie au théorème 3.2.

Soit $k_2 \in Z_2$; il existe, d'après les propriétés de f, $x \in D$ et $k_1 \in K_1$ tels que $k_1 = k_2 x$; Y étant un idéal, $k_1 \in Z = K_1 \cap \overline{Z} = K_1 \cap Y$ donc $Z_2 \subseteq f(Z_1)$. Inversement, soit $k_1 \in Z_1$; il existe $x' \in D$ et $k_2 \in K_2$ tels que $k_2 = k_1 x'$ d'où $k_2 \in Z_2$, $f(Z_1) \subseteq Z_2$, et finalement $Z_2 = f(Z_1)$. Il en résulte $Z_1 = f^{-1}(Z_2)$.

COROLLAIRE 4.6. - L'ensemble $\overline{W}$ défini par :

$$\overline{W} = \{a \,;\; a \in D ,\; ax \in K \Longrightarrow ax \in Z = K \cap \overline{Z}\}$$

est indépendant du complexe W-minimal à droite K, et $\overline{Z} \subseteq \overline{W}$.

Nous démontrons que les ensembles $\overline{W}_1$ et $\overline{W}_2$, définis comme $\overline{W}$, pour deux complexes W-minimaux à droite K_1 et K_2 sont égaux. Prouvons par exemple l'inclusion $\overline{W}_1 \subseteq \overline{W}_2$. Soit $a \in \overline{W}_1$; s'il existe $x \in D$ tel que $ax = k_2 \in K_2$, il existe aussi $x' \in D$ tel que $k_2 x' = axx' = k_1 \in K_1$; puisque $a \in \overline{W}_1$, $k_1 \in Z_1$, d'où $k_2 = f^{-1}(k_1) \in f^{-1}(Z_1) = Z_2$; c'est-à-dire $a \in \overline{W}_2$.

L'inclusion $\overline{Z} \subsetneq \overline{W}$ se démontre facilement : si $k \in \overline{Z} = R \cap Y$, et s'il existe $x \in D$ tel que $kx \in K$, on $kx = k \in \overline{Z}$, d'où par définition $k \in \overline{W}$.

Remarque. - D'après ce qui précède, nous pouvons donner une seconde définition de $\overline{W}$:

$$\overline{W} = \{a \, ; \ a \in D \, , \ ax \in R \implies axax \in W\} \quad .$$

Nous allons montrer qu'on peut toujours remplacer le résidu W et la réunion R des complexes W-minimaux à droite par un résidu W^* et une réunion R^* de complexes W^*-minimaux à droite tels que l'ensemble Z^* correspondant soit vide.

THÉORÈME 4.7. - K étant complexe W-minimal à droite, le résidu à droite du complexe $K^* = K - Z$, où $Z = K \cap \overline{Z} = K \cap Y$, est $W^* = W \cup \overline{W}$; W^* est disjoint de $R^* = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K^*$ et c'est un idéal réflectif de D .

a. $D - W^* \subseteq D - W_{K^*}$. Si $a \notin W^*$, $a \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$; comme $a \notin \overline{W}$, $ax \notin Z$, donc $ax \in K^*$ et $a \notin W_{K^*}$.

b. $D - W_{K^*} \subseteq D - W^*$. Si $a \notin W_{K^*}$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K^*$ et $ax \notin Z$, donc $a \notin W$ et $a \notin \overline{W}$, c'est-à-dire $a \notin W^*$.

c. Si $k \in K^* \subseteq R^*$, $k \notin W^*$ puisque, d'une part, $k \notin W$ et que, d'autre part, il existe $x \in D$ tel que $kx = k \notin Z$, c'est-à-dire $k \notin \overline{W}$.

d. W^* , résidu à droite de chacun des complexes K^* , est déjà un idéal à droite. Nous allons démontrer qu'il est réflectif.

Considérons deux éléments a , b de D vérifiant $ab \in W^*$; si $ab \in W$, $ba \in W$; supposons donc $ab \in \overline{W}$.

D'après la seconde définition de $\overline{W}$, $abx \in R$ entraîne $(abx)^2 \in W$; pour démontrer que $ba \in \overline{W}$, nous devons démontrer que $bax \in R$ entraîne $(bax)^2 \in W$. Supposons que $(bax)^2 \notin W$; si $(bax)^2 a \in W$, $x(bax)^2 a \in W$; W étant réflectif, $ax(bax)^2 \in W$, d'où $(bax)^4 \in W$.

Posons $bax = k \in R$; puisque $k^2 \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $k^2 x = k$, d'où : $k^2 = k^2 xk^2 x$. Mais alors $k^2 xk^2 \notin W$ entraîne $k^2 xk^2 \notin W$, puis $k^4 x \notin W$ en contradiction avec $k^4 \in W$.

On a donc $(bax)^2 a \notin W$, d'où $a(bax)^2 \notin W$, et comme $bax \in R$, il résulte du théorème 4.1 et du corollaire 4.4 que $a(bax)^2 \in R$.

Or, $a(bax)^2 = ab(axbax)$; comme $ab \in \overline{W}$, $(ab(axbax))^2 = a.bax.bax.a.bax.bax \in W$. On a : $bax.bax.a = k^2.a \notin W$; il existe donc $x \in D$ tel que $k^2 ax = k$. Si $k^2 \notin W$, $k^2 axk^2 ax = k^2 \notin W$, donc, en utilisant toujours le fait que W est réflectif, $k^2 ak^2 a \notin W$, $ak^2 ak^2 \notin W$ en contradiction avec la conclusion précédente.

On a donc bien, finalement, $(bax)^2 \in W$, c'est-à-dire $ba \in \overline{W}$.

THÉORÈME 4.8. - <u>Tout complexe</u> $K^* = K - Z$ $(k \neq \emptyset)$ <u>est</u> W^*<u>-minimal à droite et pour tout</u> $k \in R^*$, $k^2 \notin W^*$.

Nous avons déjà démontré que K^* avait pour résidu à droite W^* ; K^* est dégagé de W^* puisqu'il en est disjoint. Montrons que : $\forall\ k \in K^*$, $k(K^* \cdot^{\cdot} k) = \{k\}$.

K^* étant W-minimal à droite, on a $k(K \cdot^{\cdot} k) = \{k\}$; or $K^* \subsetneq K$ entraîne $K^* \cdot^{\cdot} k \subsetneq K \cdot^{\cdot} k$, d'où $k(K^* \cdot^{\cdot} k) \subseteq k(K \cdot^{\cdot} k) = \{k\}$ avec $K^* \cdot^{\cdot} k \neq \emptyset$ puisque $k \in K^*$ et que K^* est disjoint de W^* ; finalement $k(K^* \cdot^{\cdot} k) = \{k\}$.

C. Q. F. D.

Soit $k \in R^*$; supposons que $k^2 \in W^*$; si $k^2 \in W$, $k \in \overline{Z} \subsetneq \overline{W}$ en contradiction avec $R^* \cap W^* = \emptyset$; sinon, il existe $x \in D$ tel que $k^2 x = k$; comme par ailleurs $k^2 \in \overline{W}$, l'égalité précédente entraîne $k \in \overline{Z}$, en contradiction avec la définition de R^*.

<u>Remarque</u>. - Si un complexe K^* est vide, R^* l'est aussi ; R^2 est contenu dans W et $W^* = D$.

THÉORÈME 4.9. - <u>Tout complexe</u> W^*<u>-minimal à droite</u>, K^*, <u>est de la forme</u> $K^* = K - Z$, <u>où</u> $K \in \mathcal{K}$ <u>et</u> $Z = K \cap \overline{Z}$.

Soient K^* un complexe W^*-minimal à droite et K_1 un complexe W-minimal à droite quelconque, $K_1 \in \mathcal{K}$. K^* et $K_1 \cap \overline{Z}$ sont disjoints car $\overline{Z} \subsetneq \overline{W} \subsetneq W^*$ et $K^* \cap W^* = \emptyset$ par définition d'un complexe W-minimal à droite. Considérons le complexe $K = K^* + (K_1 \cap \overline{Z})$; $\overline{Z} \subsetneq W^*$ et $K^* \cap W^* = \emptyset$ entraînent $K_1 \cap \overline{Z} = K \cap \overline{Z}$. On a donc $K^* = K - (K \cap \overline{Z})$. Nous démontrons que K est W-minimal à droite, et d'abord que $W_K = W$.

Si $a \notin W$ et $a \notin W^*$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K^* \subseteq K$, donc $a \notin W_K$. Si $a \notin W$ et $a \in W^*$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K_1$. Comme $W^* = W \cup \overline{W}$, $a \in \overline{W}$, donc $ax \in \overline{Z}$ par définition de $\overline{W}$. Par suite $ax \in K_1 \cap \overline{Z} \subseteq K$ et $a \notin W_K$.

Inversement, si $a \notin W_K$, il existe $x \in D$ tel que $ax \in K$. Si $ax \in K^*$, $a \notin W^*$, donc $a \notin W$. Si $ax \in K \cap \overline{Z} = K_1 \cap \overline{Z} \subseteq K_1$, $a \notin W$.

K est disjoint, donc dégagé de W, car K_1 l'est et K^* l'est de W^* qui contient W. En vertu du théorème 3.1, nous aurons démontré que K est W-minimal à droite si nous prouvons que : $\forall\ k \in K$, $k(K \cdot^{\circ} k) = \{k\}$.

Soit $k \in K$ et $x \in D$ tel que $kx \in K$. Si $k \in K^*$ et $kx \in K_1 \cap \overline{Z}$, $k \in \overline{W} \subseteq W^*$ par définition de $\overline{W}$, ce qui est en contradiction avec $K^* \cap W^* = \emptyset$. Donc $kx \in K^*$ et puisque K^* est W^*-minimal à droite, on a $kx = k$. Si $k \in K_1 \cap \overline{Z}$ et $kx \in K^*$, $k \in W^*$ puisque $\overline{Z} \subseteq W^*$, donc $kx \in W^*$ puisque W^* est un idéal, ce qui contredit encore $K^* \cap W^* = \emptyset$. Donc $kx \in K_1 \cap \overline{Z}$ et comme K_1 est W-minimal à droite, on a encore $kx = k$.

C. Q. F. D.

L'étude que nous venons de faire montre que, dans le cas où W est un idéal réflectif, on peut remplacer, lorsque $R^2 \nsubseteq W$, l'étude de R par celle de R^*, qui possède vis-à-vis de W^*, les mêmes propriétés que R vis-à-vis de W, avec en plus, la propriété : $\forall\ k \in R^*$, $k^2 \notin W^*$.

L'ensemble $\overline{Z}$ des éléments de R dont le carré est dans W est d'ailleurs tel que $\overline{Z}^2 \subseteq W$. La structure de D peut encore être représentée par le schéma ci-contre :

		W^*		R		
		W	$\overline{W}$	$\overline{Z}$	R^*	
W^*	W	W	W	W	W	W
	$\overline{W}$	W	W^*	W^*	W^*	W^*
R	$\overline{Z}$	W	W^*	W	W	
	R	W	W^*	W		
		W	W^*			

En revenant aux anciennes notations, nous étudierons maintenant la strucutre de la réunion des complexes W-minimaux à droite d'un demi-groupe D, pour un idéal réflectif W, <u>tel que, pour tout</u> $k \in R$, <u>on ait</u> $K^2 \notin W$.

Les hypothèses précédentes sont vérifiées lorsque W est semi-premier, donc en particulier lorsque W est premier, et notamment quand $W = \emptyset$.

La propriété suivante est utilisée par la suite :

PROPRIÉTÉ 4.4. – <u>Pour que</u> $k^2 \notin W$ <u>quel que soit</u> $k \in R$, <u>il faut et il suffit que pour tout</u> $a \in D - W$, aR <u>ne soit pas contenu dans</u> W.

Supposons que, pour tout $k \in R$, on ait $k^2 \notin W$. Si $a \in D - W$, il existe $x \in D$, tel que pour un complexe W-minimal à droite quelconque K, $ax = k \in K \subseteq R$, d'où $a(xk) = k^2 \notin W$, donc $xk \notin W$ et, d'après le corollaire 4.4, $xk \in R$. Il en résulte $aR \nsubseteq W$.

Inversement, si pour tout $a \in D - W$, $aR \nsubseteq W$, et s'il existe $k \in R$ avec $k^2 \in W$, la propriété 4.2 entraîne $kR \subsetneq W$, contrairement à l'hypothèse.

Pour étudier la structure de R, nous définissons dans R une équivalence $\mathcal{R}$ par la condition $k, k' \in R$, $k\mathcal{R}k'$ si et seulement si $kk' \notin W$.

THÉORÈME 4.10. – <u>La relation</u> $\mathcal{R}$ <u>est une relation d'équivalence</u>.

$\mathcal{R}$ est réflexive puisque, $\forall\ k \in R$, $k^2 \notin W$; elle est symétrique puisque W est réflectif ; elle est transitive : si $k\mathcal{R}k'$ et $k'\mathcal{R}k''$, $k'k'' \notin W$ entraîne l'existence d'un élément x de D tel que $k'k''x = k'$, d'où $kk'k''x = kk' \notin W$, donc $kk'k'' \notin W$, où, W étant réflectif, $k'k''k \notin W$ et finalement $k''k \notin W$, c'est-à-dire $k\mathcal{R}k''$.

Cette équivalence partage R en classes C_ι $(\iota \in I)$: $R = \sum_{\iota \in I} C$.

Il résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{R}$ que, pour tout couple d'indices différents ι, λ, on a $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

THÉORÈME 4.11. – <u>Toute classe</u> C_ι <u>est un sous-demi-groupe simple de</u> D, <u>somme de ses idéaux à droite minimaux</u>.

1° C_ι est un <u>sous-demi-groupe</u> : si k, $k' \in C_\iota$, $kk' \notin W$ donc il existe $x \in D$ tel que $kk'x = k$, d'où $k \cdot kk'x = k^2$. Comme $k^2 \notin W$, $k \cdot kk' \notin W$ avec $k \in R$ et $kk' \in R$ d'après le théorème 4.1, donc $kk' \equiv k$ $(\mathcal{R})$ et $kk' \in C_\iota$.

2° Soit k un élément quelconque d'une classe C_ι et $D_k = D - (W \cdot^{\bullet} k)$. Nous allons d'abord démontrer que kD_k est un idéal à droite minimal de C_ι.

D'abord, kD_k <u>est contenu dans</u> C_ι : si $d \in D_k$, $kd \notin W$, il existe $t \in D$ tel que $kdt = k$, d'où $k^2 dt = k^2$; comme $k^2 \notin W$, $k.kd \notin W$; par suite $kd \equiv k \ (\mathcal{R})$ et $kd \in C_\iota$.

Dans C_ι, kD_k est un <u>idéal à droite</u> : si $c \in C_\iota$ et $d \in D_k$, $kdc \notin W$ sinon $c.kd \in W$ avec $c \in C_\iota$, $kd \in C_\iota$ en contradiction avec la stabilité de C_ι.

Enfin, kD_k est un idéal à droite <u>minimal</u> de C_ι. Montrons d'abord que $kD_k = kC_\iota$; il suffit de prouver $kD_k \supseteq kC_\iota$. Puisque $k^2 \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $k^2 x = k$. D'où $kd = k.kxd$; si $kd \notin W$, $kxd \notin W$ donc $kxd \in kD_k \subseteq C_\iota$ c'est-à-dire $kd = k.kxd \in kC_\iota$. Remarquons que $k \in kD_k = kC_\iota$.

Supposons alors qu'il existe un idéal à droite V de C vérifiant les **inclusions** $V \subset kC_\iota \subseteq C_\iota$. Soit k' un élément quelconque de V ; il existe $c \in C_\iota$ tel que $k' = kc$; d'après le théorème 3.2, il existe $d \in D$ tel que $k = k'd$; en appliquant l'égalité $kD_k = kC_\iota$ à l'élément k' de C_ι, il vient $k = k'd = k'c'$ pour un $c' \in C_\iota$, donc $k \in V$, idéal à droite de C_ι, d'où $kC_\iota \subseteq V$ et finalement $V = kC_\iota$. C_ι, étant somme de ses idéaux à droite minimaux, est simple.

Revenons maintenant au cas général dans lequel $R \cap W = \emptyset$ mais dans lequel il peut exister des éléments k de R tels que $k^2 \in W$.

En appliquant le théorème 4.11 à R^*, nous pouvons représenter la structure de R^* par un schéma analogue aux schémas précédents. Notons qu'on a ici, pour $\iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$, mais $C_\iota^2 = C_\iota$ car les demi-groupes C_ι étant simples sont globalement idempotents. Finalement, nous pouvons énoncer :

R^*	C_{ι_1}	C_{ι_2}	C_{ι_3}
C_{ι_1}	C_{ι_1}	W	W
C_{ι_2}	W	C_{ι_2}	W
C_{ι_3}	W	W	C_{ι_3}

THÉORÈME 4.12. - <u>Soit</u> D <u>un demi-groupe admettant des complexes</u> <u>W-minimaux à droite, pour un idéal réflectif</u> W, <u>fortement large. L'ensemble</u> R <u>de ces complexes a la structure suivante</u> : $R = \overline{Z} + \sum_{\iota \in I} C_\iota$ <u>avec</u> $R\overline{Z} \subseteq W$, $\overline{Z}R \subseteq W$, $\overline{Z}^2 \subseteq W$.

Les C_ι sont des demi-groupes simples, sommes de leurs idéaux à droite minimaux, et $\forall\ \iota, \lambda$, $\iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

On peut énoncer des réciproques de ce théorème. Nous renvoyons à [9] pour les démonstrations.

LEMME 4.4. - Soit Σ un demi-groupe, somme d'un idéal bilatère W et d'un ensemble $R = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, où les C_ι sont des demi-groupes admettant des idéaux à droite minimaux et sommes de ces idéaux, tels que $\forall\ \iota, \lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, on ait $C_\iota C_\lambda \subseteq W$. W est réflectif et Σ admet des complexes W-minimaux à droite.

THÉORÈME 4.13. - Soit D un demi-groupe possédant un idéal bilatère Σ ayant la structure décrite au lemme 4.4 ; on suppose en outre que $a \notin W$ pour un élément a de D entraîne $aR \nsubseteq W$.

D admet alors des complexes W-minimaux à droite et ces complexes sont ceux de Σ.

Dans le cas $W = \emptyset$, on retrouve les résultats signalés au paragraphe 1 (b) de cet exposé.

5. Demi-groupes admettant à la fois des complexes W-minimaux à gauche et des complexes W-minimaux à droite.

Dans ce paragraphe, W est d'abord un idéal bilatère fortement large à gauche et à droite. On suppose qu'il existe des complexes W-minimaux à droite K, dont la réunion est R, et des complexes W-minimaux à gauche K', dont la réunion est R'.

On n'a pas en général $R = R'$, même dans des cas simples, comme on le voit sur l'exemple suivant :

$D = \{z, a, b, c\}$ avec $W = (z)$

$K = R = \{a, c\}$, $K' = R' = \{a, b\}$

	z	a	b	c
z	z	z	z	z
a	z	z	z	a
b	z	a	b	a
c	z	z	z	c

PROPRIÉTÉ 5.1. - $R \cap R'$ n'est pas vide.

Si $k \in R$, $k \notin W$; W étant le résidu à gauche d'un complexe W-minimal à gauche quelconque K' , il existe $x \in D$ tel que $xk = k' \in K' \subseteq R'$; comme $xk \notin W$, $xk \in R$ d'après le corollaire 4.4, donc $k' = xk \in K \cap K' \subseteq R \cap R'$.

PROPRIÉTÉ 5.2. - Si, pour $k \in R$ et $k' \in R'$, $kk' \notin W$, k et k' appartiennent à $R \cap R'$.

Montrons par exemple que $k' \in R$; puisque $kk' \notin W$, il existe $x \in D$ tel que $xkk' = k'$; d'après le théorème 4.1 et le corollaire 4.4, $xkk' \in R$, d'où $k' \in R \cap R'$.

Nous supposons maintenant que W est réflectif. Il résulte de l'étude faite au paragraphe précédent que si R^2 n'est pas contenu dans W , on peut remplacer l'étude de R et W par celle de R^* et W^* , R^* réunion de complexes W^*-minimaux à droite étant tel que : $\forall$ $k \in R^*$, $k^2 \notin W^*$. Le théorème suivant montre que ce remplacement peut se faire pour R ou pour R' , et conduit à des réunions de complexes minimaux égales, pour des résidus à gauche et à droite égaux.

THÉORÈME 5.1. - Lorsque W est réflectif, les conditions $R^2 \not\subseteq W$ et $R'^2 \not\subseteq W$ sont satisfaites simultanément et $W^* = W'^*$, $R^* = R'^*$; W'^* et R'^* étant définis à partir de W' et R' comme W^* et R^* le sont à partir de W et de R .

Nous savons que $R^2 \subseteq W$ équivaut à $k^2 \in W$ pour tout $k \in R$.

Supposons $R^2 \not\subseteq W$; il existe $k \in R$ tel que $k^2 \notin W$. Comme pour la propriété 5.1, considérons les éléments $x \in D$ et $k' \in K'$ tels que $xk = k' \in K' \subseteq R'$. Montrons que $k'^2 \notin W$.

$k^2 \notin W$ entraîne l'existence de $y \in D$ tel que $k^2 y = k$, d'où $xk^2 y = xk = k'$, donc $xk^2 \notin W$; or $xk^2 = k'k$; donc $k'k \notin W$ ou $kk' \notin W$; il existe donc $z \in D$ tel que $kk'z = k$, d'où $xkk'z = xk = k' \notin W$, donc $xkk' = k'^2 \notin W$.

On a donc démontré que $R^2 \not\subseteq W$ entraîne $R'^2 \not\subseteq W$; l'inclusion opposée se démontre de la même façon.

On a :

$$W^* = W \cup \overline{W} , \quad \overline{W} = \{a \; ; \; a \in D , \; ax \in R \implies axax \in W\}$$

$$W'^* = W \cup \overline{W'} , \quad \overline{W'} = \{a \; ; \; a \in D , \; xa \in R' \implies xaxa \in W\} .$$

Démontrons par exemple l'inclusion $\overline{W} \subseteq \overline{W'}$.

Soit $a \in \overline{W}$; supposons qu'il existe $x \in D$ tel que $xa = k' \in R'$ et que $k'^2 \notin W$. On démontre d'abord, comme précédemment, que, pour un $y \in D$ tel que $k'y = k \in R$, on a $kk' \notin W$; il résulte alors de la propriété 5.2 que $k' \in R$. Si $ak' = axa \in W$, $xaxa = k'^2 \in W$; sinon $ak' \in R$ (corollaire 4.4) ; puisque $a \in \overline{W}$, $ak'ak' \in W$, d'où $xak'xak' \in W$, c'est-à-dire $k'^4 \in W$. On en déduit encore $k'^2 \in W$; si $k'^2 \notin W$, il existe $t \in D$ tel que $k'^2 t = k'$, d'où $k'^3 t = k'^2$ et $k'^3 \notin W$; alors il existe $u \in D$ tel que $k'^3 u = k'$, d'où $k'^4 u = k'^2$, $k'^4 \notin W$, en contradiction avec la conclusion précédente.

Dans les deux cas, on voit que l'hypothèse $k'^2 \notin W$ entraîne une contradiction ; donc $k'^2 \in W$ et $a \in \overline{W'}$.

La première partie de cette démonstration montre encore que l'hypothèse $k'^2 \notin W$, pour un élément quelconque k' de R' entraîne $k' \in R$. L'égalité $R = R'$ en résulte, en tenant compte de la propriété correspondante pour tout élément k de R tel que $k^2 \notin W$.

COROLLAIRE 5.1. - Soit D un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux à gauche et des complexes W-minimaux à droite, pour un idéal W , réflectif et fortement large. S'il existe (au moins) un élément k d'un quelconque de ces complexes tel que $k^2 \notin W$, il existe un idéal réflectif W^*, contenant W , par rapport auquel D admet des complexes W^*-minimaux à gauche et des complexes W^*-minimaux à droite. Les réunions R^* et R'^* correspondantes sont égales et, pour tout élément k de l'ensemble commun N^* , on a $k^2 \notin W^*$.

Si nous décomposons l'ensemble commun $N^* = R^* = R'^*$ par l'équivalence $\mathcal{R}$ définie au paragraphe précédent, les classes sont des demi-groupes simples, à la fois somme de leurs idéaux à droite minimaux et de leurs idéaux à gauche minimaux. Ces classes sont donc des demi-groupes complètement simples [1], et nous avons le théorème général suivant :

THÉORÈME 5.2. - Soit D un demi-groupe admettant à la fois des complexes W-minimaux à gauche, dont la réunion est R' , et des complexes W-minimaux à droite, dont la réunion est R , pour un idéal réflectif W (fortement large). Si, pour tout élément k de R et de R' , $k^2 \notin W$, on a $R = R'$ et l'ensemble commun N a la structure suivante :

$$N = \sum_{\iota \in I} C_\iota \quad ,$$

les C_ι étant des demi-groupes complètement simples, tels que $\forall\ \iota, \lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, on ait $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

Remarque. - S'il existe des éléments k de R ou de R' tels que $k^2 \in W$, on appliquera ce théorème à l'ensemble N^* défini précédemment et qui est l'ensemble des éléments de $R \cap R'$ dont le carré n'appartient pas à W.

Ce théorème admet pour réciproque la proposition suivante, qu'on déduit immédiatement du théorème 4.13.

THÉORÈME 5.3. - Soit D un demi-groupe possédant un idéal bilatère Σ, somme d'un idéal bilatère W (W idéal de Σ) et d'un ensemble $N = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, où les C_ι sont des demi-groupes complètement simples tels que $\forall\ \iota, \lambda,\ \iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$. On suppose de plus que $\forall\ a \in D$, $a \notin W$, aN n'est pas contenu dans W.

D admet des complexes W-minimaux à droite et des complexes W-minimaux à gauche, et ces complexes sont ceux de Σ.

La proposition "Tout demi-groupe abélien fini est un homogroupe", démontrée par G. THIERRIN [10], est alors un cas particulier du théorème suivant :

THÉORÈME 5.4. - Si un demi-groupe abélien contient un complexe net minimal (ou, ce qui est équivalent, un idéal minimal), c'est un homogroupe.

Ce théorème est lui-même conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉORÈME 5.5. - Si D est un demi-groupe abélien et si D possède des complexes W-minimaux, pour un idéal W fortement large, l'ensemble des éléments k de D, tels que $k^2 \notin W$, est somme de groupes. Si W est premier, $D - W$ est un homogroupe.

Car un demi-groupe complètement simple abélien est un groupe. Si W est premier, l'équivalence $\mathcal{R}$ a une seule classe.

6. Complexes admettant un résidu bilatère donné et minimaux. Demi-groupes possédant de tels complexes.

On obtient des résultats tout à fait analogues. Nous renvoyons à [9] pour le détail et nous donnons seulement le théorème de structure. La condition "fortement large" pour W est ici

$$(W \,.^{\bullet}\, D) \,^{\bullet}.\, D = (W \,^{\bullet}.\, D) \,.^{\bullet}\, D = W \quad \text{ou} \quad DaD \subseteq W \iff a \in W \;.$$

THÉORÈME 6.1. - Soit D un demi-groupe admettant des complexes W-minimaux bilatères pour un idéal réflectif W fortement large. La réunion B de ces complexes a la structure suivante :

$$B = \overline{Z} + \sum_{\iota \in I} C_\iota \quad \text{avec} \quad B\overline{Z} \subseteq W \;,\quad \overline{Z}B \subseteq W \;,\quad \overline{Z}^2 \subseteq W \;.$$

Les classes C_ι sont des demi-groupes simples de D, et $\forall\ \iota , \lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, $C_\iota C_\lambda \subseteq W$.

THÉORÈME 6.2. - Soit Σ un demi-groupe, somme d'un idéal bilatère W et d'un ensemble $B = \sum_{\iota \in I} C_\iota$, où les C_ι sont des demi-groupes simples, tels que $\forall\ \iota , \lambda \in I$, $\iota \neq \lambda$, on ait $C_\iota C_\lambda \subseteq W$. Alors W est réflectif et Σ admet des complexes W-minimaux bilatères.

THÉORÈME 6.3. - Soit un demi-groupe D possédant un idéal bilatère Σ ayant la structure décrite au théorème précédent. On suppose en outre que D est tel que, $\forall\ a \in D$, $a \notin W$, BaB n'est pas contenu dans W (ou, ce qui est équivalent, que $aB \nsubseteq W$). D admet alors des complexes W-minimaux bilatères qui sont ceux de Σ.

Dans le cas $W = \emptyset$, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 6.4. - Pour qu'un demi-groupe admette des complexes bilatèrement nets minimaux, il faut et il suffit qu'il contienne un idéal bilatère minimum (noyau). Ces complexes sont alors réduits à des éléments bilatèrement nets, les éléments du noyau.

On trouvera enfin dans [9] une étude complète des <u>sous-demi-groupes</u> W-<u>minimaux</u> d'un demi-groupe.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE (1)

[1] CLIFFORD (A. H.). - Semigroups containing minimal ideals, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 521-526.

---

(1) Pour une bibliographie complète sur ce sujet, voir [9].

[2] CLIFFORD (A. H.) and MILLER (D. D.). - Semigroups having zeroid elements, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 117-125.

[3] CROISOT (Robert). - Équivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 373-417.

[4] DUBREIL (Paul). Contribution à la théorie des demi-groupes, III., Bull. Soc. math. France, t. 81, 1953, p. 289-306.

[5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, Tome 1 : Équivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientiques, 20).

[6] DUBREIL (Paul). - Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes, Colloque d'algèbre supérieure [1956. Bruxelles] ; p. 29-44. - Louvain, Ceuterik, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[7] LEFEBVRE (Pierre). - Sur les demi-groupes admettant des complexes nets d'un côté minimaux, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 2, 18 p.

[8] LEFEBVRE (Pierre). - Sur certains théorèmes d'isomorphisme pour les demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 249, 1959, p. 1995- 1997.

[9] LEFEBVRE (Pierre). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Annali di Matematica (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris, 1962).

[10] THIERRIN (Gabriel). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).