Charles Pisot

Familles normales de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, nº 2 (1962-1963), exp. nº 14, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A3_0>

FAMILLES NORMALES DE FRACTIONS RATIONNELLES ET ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Charles PISOT

En 1944, R. SALEM a démontré le résultat curieux suivant [7] :

Soit S l'ensemble des entiers algébriques réels θ vérifiant $\theta > 1$ et dont tous les conjugués autres que θ ont un module strictement inférieur à l'unité. Alors S est un ensemble fermé.

Ce résultat s'obtient en démontrant la proposition suivante :

Désignons par $Q(z)$ le polynôme irréductible primitif ayant $1/\theta$ pour zéro, et soit $A(z)$ un polynôme à coefficients entiers rationnels tel que

$$|A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = 1 \ ,$$

A étant premier à Q. Alors la famille des fractions rationnelles

$$f(z) = A(z)/Q(z)$$

pour lesquelles θ est borné supérieurement est une famille normale dans $|z| < 1$, au sens de Paul MONTEL.

La démonstration de cette proposition utilise un résultat de KRONECKER [5] :

La condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente le développement de Taylor d'une fraction rationnelle c'est que les déterminants

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \cdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

soient nuls pour n assez grand.

En majorant convenablement $|d_n|$, et en remarquant que les u_n de $f(z)$ sont entiers rationnels, donc aussi d_n, on obtient le fait que

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0 \ ,$$

donc que $f(z)$ est une fraction rationnelle.

Nous nous proposons ici de généraliser ces résultats en utilisant, en plus de la majoration de $|d_n|$, celle des diverses valeurs absolues p-adiques de d_n.

Nous commencerons par établir une majoration de $|d_n|$.

LEMME 1. - Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < 1$, ayant dans $|z| < 1$ au plus k pôles $(k \geqslant 0)$, $z = 0$ n'étant pas un pôle, et supposons que $|\varphi(z)|$ soit borné au voisinage de $|z| = 1$. La fonction $\varphi(z)$ possède alors un développement de Taylor autour de $z = 0$, soit

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

et on a la majoration suivante :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ indépendante de n telle que

$$|d_n| \leqslant C(\varepsilon)\ \varepsilon^n .$$

En effet, soit

$$\psi(z) = 1 + \psi_1 z + \dots + \psi_k z^k$$

le polynôme ayant pour zéros les pôles de $\varphi(z)$, alors

$$\varphi(z)\ \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$$

est holomorphe et borné dans $|z| < 1$ de même que

$$\varphi(z)\ \psi^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n .$$

par suite, les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2$$

sont convergentes.

D'autre part on a :

$$v_n = u_n + \psi_1 u_{n-1} + \dots + \psi_k u_{n-k} ; \qquad w_n = v_n + \psi_1 v_{n-1} + \dots + \psi_k v_{n-k}$$

d'où

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_{k-1} & v_k & \cdots & v_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ u_n & \cdots & u_{n+k-1} & v_{n+k} & \cdots & v_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_{k-1} & v_k & \cdots & v_n \\ \cdots & & & & & \\ u_{k-1} & \cdots & u_{2k-2} & v_{2k-1} & \cdots & v_{n+k-1} \\ v_k & \cdots & v_{2k-1} & w_{2k} & \cdots & w_{n+k} \\ \cdots & & & & & \\ v_n & \cdots & v_{n+k-1} & w_{n+k} & \cdots & w_{2n} \end{vmatrix}$$

La majoration de HADAMARD [4] d'un déterminant donne

$$|d_n| \leqslant \prod_{j=0}^{n} s_j \quad ,$$

où

$$s_j^2 = |u_j|^2 + \dots + |u_{j+k-1}|^2 + |v_{j+k}|^2 + |v_{j+k+1}|^2 + \dots \qquad \text{si } j = 0 , \dots , k-1$$

et

$$s_j^2 = |v_j|^2 + \dots + |v_{j+k-1}|^2 + |w_{j+k}|^2 + |w_{j+k+1}|^2 + \dots \qquad \text{si } j \geqslant k .$$

La convergence des séries de terme général $|v_n|^2$ et $|w_n|^2$ montre que s_j tend vers zéro. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $h = h(\varepsilon)$ tel que $|s_j| \leqslant \varepsilon$ pour tout $j > h$. En posant

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{-h} \prod_{j=0}^{h} s_j \quad ,$$

on obtient

$$|d_n| \leqslant C(\varepsilon)\ \varepsilon^n .$$

Donnons maintenant quelques précisions sur le cas où $\varphi(z)$ vérifie $|\varphi(z)| \leqslant 1$ pour $|z| = 1$.

1° Si $|u_0| > 1$, $\varphi(z)$ a au moins un pôle dans $|z| < 1$. En effet, dans le cas contraire, $\varphi(z)$ serait holomorphe, et $|\varphi(z)|$ serait maximum sur $|z| = 1$, ce qui est contraire à

$$|\varphi(0)| = |u_0| > 1 .$$

2° Si $|u_0| = 1$, on voit de même que $\varphi(z)$ est ou bien constant, égal à u_0, ou bien a au moins un pôle dans $|z| < 1$.

Réciproquement, si $|u_0| = 1$ et si $\varphi(z)$ a k pôles dans $|z| < 1$, considérons l'équation

$$\varphi(z)\ \psi(z) - r u_0\ \psi(z) = 0 \ ,$$

où r est un nombre réel avec $r > 1$. Sur $|z| = 1$, on a

$$|\varphi(z)\ \psi(z)| < |r u_0\ \psi(z)| \ ,$$

donc, d'après le théorème de Ronché, l'équation a, dans $|z| \leqslant 1$, le même nombre de racines que $r u_0\ \psi(z) = 0$, c'est-à-dire k. Lorsque $r \to 1$, on voit que

$$\varphi(z)\ \psi(z) - u_0\ \psi(z) = 0$$

a au plus k racines dans $|z| < 1$. Or, soit u_h le coefficient d'indice $h \geqslant 1$, le plus petit tel que $u_h \neq 0$, alors on a $h \leqslant k$; car le développement de $\varphi(z)\ \psi(z) - u_0\ \psi(z)$ commence par $u_h\ z^h$ donc si $h > k$, l'équation aurait

h zéros en $z = 0$ ce qui contredirait notre résultat précédent. Par suite : l'un au moins des coefficients $u_1, \dots, u_k$ n'est pas nul.

Etudions maintenant le cas où $\varphi(z)$ est une fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$, où P et Q sont des polynômes à coefficients entiers rationnels.

Remarquons d'abord que si l'on pose

$$Q(0) = q$$

les nombres $u_n q^{n+1}$ sont des entiers rationnels.

En effet

$$q\varphi(qz) = qP(qz)/Q(qz)$$

est une fraction rationnelle à coefficients entiers, pour laquelle le terme constant du dénominateur peut être pris égal à 1 ; le développement de Taylor est donc à coefficients entiers rationnels.

Réciproquement, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ soit le développement de Taylor d'une fraction rationnelle $A(z)/G(z)$, où

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots , \qquad G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots$$

et supposons qu'il existe un entier rationnel q tel que $q^{n+1} u_n$ soit entier rationnel. Alors $qA(qz)/G(qz)$ a un développement à coefficients entiers ; d'après un théorème de FATOU [3] on peut donc prendre $g_0 = 1$, $g_j q^j$ entier rationnel pour $j \geqslant 1$ et $a_j q^{j+1}$ entier rationnel pour $j \geqslant 0$.

Désignons par $\mathcal{Q}_p$ la complétion du corps des rationnels pour la valeur absolue p-adique définie par $|p|_p = p^{-1}$ et $|p'|_p = 1$ si p' est un nombre premier différent de p. Soient Ω_p la clôture algébrique de $\mathcal{Q}_p$ et $\hat{\Omega}_p$ le complété de Ω_p. Dans Ω_p nous posons

$$Q(z) = q \prod_{j=1}^{s} (1 - \alpha_j z)$$

et nous supposons

$$|\alpha_1|_p \geqslant |\alpha_2|_p \geqslant \dots \geqslant |\alpha_m|_p > 1 \geqslant |\alpha_{m+1}|_p \geqslant \dots \geqslant |\alpha_s|_p$$

où $0 \leqslant m \leqslant s$. Posons

$$Q_h(z) = q \prod_{j=h+1}^{s} (1 - \alpha_j z) \quad \text{et} \quad P(z)/Q_h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{h,n} z^n .$$

On a alors

$$u_{h,n} = u_n + \beta_{h,1} u_{n-1} + \dots + \beta_{h,h} u_{n-h}$$

où

$$1 + \beta_{h,1} z + \dots + \beta_{h,h} z^h = \prod_{j=1}^{h} (1 - \alpha_j z) .$$

D'autre part la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_{h,n} z^n$ converge pour $|z|_p < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$. Pour

$$|z|_p = \rho < |\alpha_{h+1}|_p^{-1}$$

on a

$$|Q_h(z)|_p = |q|_p \quad .$$

D'autre part, pour $h < m$, on a $\rho < 1$ et pour $h = m$ prenons $\rho \leqslant 1$, alors $|P(z)|_p \leqslant 1$, donc

$$|P(z)/Q_h(z)|_p \leqslant |q|_p^{-1} \qquad \text{pour} \quad |z|_p = \rho \ .$$

Les inégalités de Cauchy [2] dans Ω_p montrent alors que

$$|u_{h,n}|_p \leqslant |q|_p^{-1} \rho^{-n} .$$

Faisant tendre ρ vers $|\alpha_{h+1}|_p^{-1}$ si $h < m$, vers 1 si $h = m$, on obtient

$$|u_{h,n}|_p \leqslant |q|_p^{-1} |\alpha_{k+1}|_p^{n} \qquad \text{si} \quad h < m$$

et

$$|u_{m,n}|_p \leqslant |q|_p^{-1} \qquad \text{si} \quad h = m ,$$

Or, si $m \leqslant n$, on a

$$d_n = \begin{vmatrix} u_{0,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{m,m} & u_{m,m+1} & \cdots & u_{m,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{0,n} & u_{1,n+1} & \cdots & u_{m,n+m} & u_{m,n+m+1} & \cdots & u_{m,2n} \end{vmatrix}$$

Par suite :

$$|d_n|_p \leqslant |q|_p^{-(n+1)} |\alpha_1|_p^{n} |\alpha_2|_p^{n+1} \cdots |\alpha_m|_p^{n+m-1} .$$

Si $n < m$, on a

$$|d_n|_p \leqslant |q|_p^{-(n+1)} |\alpha_1|_p^{n} \cdots |\alpha_{n+1}|_p^{2n} .$$

La considération du polygone de Newton du polynôme $Q(z) = \sum_{j=0}^{s} q_j z^j$ montre que m est le plus petit indice tel que

$$|q_m|_p = \max_{0 \leqslant j \leqslant s} |q_j|_p$$

et que

$$|\alpha_1 \dots \alpha_m|_p = |q_m q_0^{-1}|_p \leqslant |q|_p^{-1} .$$

On a donc, dans tous les cas :

$$|d_n|_p \leqslant |q|_p^{-(3n+1)} .$$

Comme par ailleurs d_n est un nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de q, l'inégalité trouvée, appliquée à tous les nombres premiers p divisant q montre que

$$q^{3n+1}\, d_n \quad \underline{\text{est un entier rationnel.}}$$

Ce résultat, obtenu ici par des méthodes p-adiques peut s'obtenir directement, comme l'a montré F. DRESS dans une démonstration non encore publiée.

Remarquons encore que si $|u_0|_p > |q_m|_p^{-1}$, la fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$ a, dans Ω_p, au moins un pôle effectif dans $|z|_p < 1$. En effet pour $|z|_p = \rho$ avec $|\alpha_m|_p^{-1} < \rho < 1$, on a

$$|Q(z)|_p = |q_m|_p\, \rho^m \qquad \text{et} \quad |P(z)|_p \leqslant 1 ,$$

donc

$$|P(z)/Q(z)|_p \leqslant |q_m|_p\, \rho^{-m} .$$

Si cette fraction n'avait pas de pôle dans $|z|_p < 1$, les inégalités de Cauchy [2] donneraient en particulier

$$|u_0|_p \leqslant |q_m|_p^{-1}\, \rho^{-m} .$$

En faisant tendre ρ vers 1, on obtient une contradiction.

<u>Définition</u>. - Nous désignons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fractions rationnelles

$$\varphi(z) = P(z)/Q(z) ,$$

telles que P et Q soient des polynômes à coefficients entiers rationnels, que $|\varphi(z)| \leqslant 1$ pour $|z| = 1$ avec

$$Q(z) = q + q_1 z + \dots$$

où q est un entier fixe, où q_1 est premier à q, et que $Q(z)$ a, dans $|z| < 1$, au plus k zéros, $k \geqslant 0$, tous dans une couronne fixe $0 < \delta \leqslant |z| < 1$. Nous supposons de plus que, pour tout nombre premier p divisant effectivement q, on ait

$$|P(0)|_p > |q|_p .$$

On a alors la proposition suivante :

THÉORÈME-1. - L'ensemble $\mathfrak{F}$ est une famille normale dans $|z| < 1$ au sens de Paul MONTEL.

Démonstration. - A chaque fraction $\varphi(z)$ de $\mathfrak{F}$ nous associons la fonction $b(z)$ produit des fonctions $\frac{1 - \theta z}{\theta - z}$ pour tous les θ tels que $1/\theta$ soit un pôle de $\varphi(z)$ dans $|z| < 1$. Il y a donc k au plus de tels facteurs dans $b(z)$. La fonction $b(z)\ \varphi(z)$ est holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ et, comme $|b(z)| = 1$ sur $|z| = 1$, on a

$$|b(z)\ \varphi(z)| \leqslant 1 \quad \text{dans} \quad |z| \leqslant 1 .$$

Les fonctions $b(z)\ \varphi(z)$ constituent donc une famille normale dans $|z| < 1$, c'est-à-dire un ensemble compact pour la convergence uniforme dans tout compact contenu dans $|z| < 1$.

De tout sous-ensemble infini de fonctions $b(z)\ \varphi(z)$ on peut donc extraire une suite partielle telle que, d'une part $b(z)$ tende vers une fonction limite $B(z)$ du même type que les $b(z)$, et que d'autre part $b(z)\ \varphi(z)$ tende vers une fonction limite que nous pouvons écrire $B(z)\ \Phi(z)$; alors

$$|B(z)\ \Phi(z)| \leqslant 1 \qquad \text{pour} \quad |z| < 1 .$$

Comme $b(z)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $|z| < \delta$, il en est de même pour $B(z)$, donc $\Phi(z)$ est holomorphe dans $|z| < \delta$ et y est limite de $\varphi(z)$. On a donc

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n ,$$

la série convergeant pour $|z| < \delta$ et U_n est limite des u_n de même indice n. Comme $q^{n+1} u_n$ est entier rationnel, on voit qu'il en est de même de $q^{n+1} U_n$ et u_n finit par être égal à U_n. De plus, comme $B(z)\ \Phi(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$, $\Phi(z)$ est méromorphe dans $|z| < 1$ et y a au plus k pôles, aucun de ces pôles n'est en $z = 0$.

Enfin $|B(z)| = 1$ pour $|z| = 1$, donc $\Phi(z)$ est borné au voisinage de $|z| = 1$. Posant alors

$$D_n = \begin{vmatrix} U_0 & \cdots & U_n \\ \cdots & & \\ U_n & \cdots & U_{2n} \end{vmatrix}$$

le lemme 1 montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $C(\varepsilon)$, indépendant de n, tel que

$$|D_n| \leqslant C(\varepsilon)\ \varepsilon^n .$$

D'autre part, comme u_n finit par être égal à U_n, le nombre $q^{3n+1} D_n$ est un entier rationnel. Or

$$|q^{3n+1} D_n| \leqslant C(\varepsilon)\ q(\varepsilon q^3)^n .$$

En choisissant $\varepsilon < q^{-3}$, on voit que pour n assez grand $|q^{3n+1} D_n| < 1$, donc $D_n = 0$ et $\Phi(z)$ est une fraction rationnelle.

La condition $(q , q_1) = 1$ montre que $|q_1|_p = 1$ pour tout p divisant q. Le polygone de Newton de $Q(z)$ montre alors que $Q(z)$ a, dans Ω_p, exactement un zéro dans $|z|_p < 1$; comme il est unique, il appartient à $\mathfrak{Q}_p$; soit $1/\alpha$ ce zéro, on aura

$$|\alpha|_p = |q|_p^{-1} .$$

Enfin $|P(0)|_p > |q|_p$, c'est-à-dire $|\varphi(0)|_p > 1 = |q_1|_p$, montre que $1/\alpha$ est effectivement un pôle de $\varphi(z)$. Comme la circonférence $|z|_p = |q|_p^{-1}$ est compacte dans $\mathfrak{Q}_p$, on peut extraire de la suite des $\varphi(z)$ convergeant vers $\Phi(z)$ une suite partielle telle que α tende vers une limite α^* telle que $|\alpha^*|_p = |q|_p^{-1}$, et cela dans chaque $\mathfrak{Q}_p$ pour lequel p divise q.

Pour $|z|_p = \rho$ avec $|q|_p < \rho < 1$, on a

$$|Q(z)|_p = \rho \quad \text{et} \quad |P(z)|_p \leqslant 1 ,$$

donc

$$|\varphi(z)|_p \leqslant \rho^{-1} .$$

La famille des fonctions $(1 - \alpha z)\ \varphi(z)$ est donc uniformément bornée par $|q|_p^{-1}$. D'autre part, comme u_n finit par être égal à U_n, les coefficients de la série

$$(1 - \alpha z)\ \varphi(z) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \alpha u_{n-1})\ z^n$$

convergent au sens de $\mathfrak{Q}_p$ vers ceux de la série

$$U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n - \alpha^*\ U_{n-1})\ z^n = (1 - \alpha^*\ z)\ \Phi(z) .$$

D'après un théorème de DWORK [2], il y a convergence uniforme de $(1 - \alpha z)\ \varphi(z)$ vers $(1 - \alpha^*\ z)\ \Phi(z)$ dans Ω_p dans tout disque

$$|z|_p \leqslant \rho' < \rho$$

et on a

$$|(1 - \alpha^*\ z)\ \Phi(z)|_p \leqslant |q|_p^{-1} .$$

Pour $|z|_p = \rho'$ avec $|q|_p < \rho' < 1$, on a

$$|1 - \alpha^*\ z|_p = \rho' |q|_p^{-1} ,$$

donc

$$|\Phi(z)|_p \leqslant \rho'^{-1}.$$

Enfin

$$|u_0|_p = |P(0)/Q(0)|_p > 1 ,$$

on a alors aussi $|U_0|_p > 1$, car les valeurs absolues p-adiques sont discrètes sur le corps des rationnels. Cette inégalité montre que $\Phi(z)$ a effectivement au moins un pôle dans $|z|_p < 1$, ce pôle ne peut être que $1/\alpha^*$. Posons

$$\Phi(z) = P^*(z)/Q^*(z) \qquad \text{où} \quad Q^*(z) = q + q_1^* z + q_2^* z^2 + \dots ;$$

la condition $q^{n+1} U_n$ entier montre que les coefficients de P^* et Q^* sont des nombres rationnels, n'ayant comme dénominateurs possibles que des puissances de q . Le polygone de Newton de Q^* montre que, puisque $1/\alpha^*$ est le seul zéro de Q^* dans $|z|_p < 1$ et que $|\alpha^*|_p = |q|_p^{-1}$, on a $|q_1^*|_p = 1$ et $|q_j^*|_p \leqslant 1$ pour $j \geqslant 2$. Ceci ayant lieu pour tout p divisant q , il en résulte que les nombres q_j^* sont entiers rationnels et que q_1^* est premier avec q .

Enfin, pour $|z|_p = \rho'$ avec $|q|_p < \rho' < 1$, on a

$$|\Phi(z)|_p \leqslant \rho'^{-1} ,$$

donc

$$|P^*(z)|_p \leqslant \rho'^{-1} |Q^*(z)|_p = 1 ;$$

les inégalités de Cauchy [2] montrent que le coefficient p_j^* de z^j dans P^* vérifie $|p_j^*|_p \leqslant \rho'^{-j}$, et par suite, pour ρ' tendant vers 1 , $|p_j^*|_p \leqslant 1$. Ceci ayant lieu pour tout p divisant q , on en conclut encore que les coefficients de $P^*(z)$ sont des entiers rationnels.

L'inégalité $|U_0|_p > 1$ montre que

$$|P^*(0)|_p > |q|_p .$$

Par suite $\Phi(z) \in \mathfrak{F}$ et le théorème 1 est démontré.

Nous allons donner deux applications du théorème 1.

1° Définition. - Nous désignons par S_q l'ensemble suivant de nombres algébriques réels : $\theta \in S_q$ si $1/\theta$ est zéro d'un polynôme $Q(z) = q + q_1 z + \dots$ à coefficients entiers, tels que $q \neq 0$ est fixe et que q_1 est premier à q , nous supposons que $\theta > 1$, que les autres zéros que $1/\theta$ de $Q(z)$ soient dans $|z| > 1$ et qu'il existe un polynôme à coefficients entiers $P(z)$ vérifiant

$$|P(z)| \leqslant |Q(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1 , \qquad P(1/\theta) \neq 0 ,$$

$$|P(0)| \geqslant |q| \quad \text{et} \quad |P(0)|_p > |q|_p \ .$$

pour tout nombre premier p divisant q .

L'ensemble S_q contient une infinité d'éléments. En effet, appartient à S_q tout nombre algébrique $\theta > 1$, dont l'équation irréductible est de degré $s \geqslant 3$, a pour termes de plus haut degré $qz^s + q_1 z^{s-1} + \dots$ avec q_1 premier à q , et a θ pour seul zéro dans $|z| \geqslant 1$; et de plus dont la norme $N(\theta)$ vérifie

$$|N(\theta)| \geqslant 1 \ , \quad |N(\theta)|_p > 1 \ .$$

Pour le voir, il suffit de prendre pour polynôme $P(z)$ le polynôme irréductible dont θ est zéro, et pour $Q(z)$ le polynôme réciproque

$$Q(z) = z^s P(1/z) \ .$$

On a :

THÉORÈME 2. - L'ensemble S_q est fermé.

Démonstration. - À chaque nombre $\theta \in S_q$, nous associons la fraction rationnelle

$$\varphi(z) = P(z)/Q(z) \ .$$

Alors $|\varphi(z)| \leqslant 1$ pour $|z| = 1$ et $Q(z)$ a, dans $|z| < 1$, exactement un zéro, à savoir $z = 1/\theta$. Ce zéro n'est pas zéro de $P(z)$, par suite $\varphi(z)$ a exactement un pôle dans $|z| < 1$ et ce pôle n'est pas en $z = 0$.

Or

$$|u_0| = |P(0)/q| \geqslant 1 \ ;$$

l'existence du pôle $z = 1/\theta$ entraîne que si $|u_0| = 1$, on a $u_1 \neq 0$.

Considérons alors une suite de fonctions $\varphi(z)$ correspondant à des nombres θ tendant vers une limite θ^* ; pour tous ces nombres θ on aura donc

$$|\theta| \leqslant 1/\delta \ .$$

Les fonctions $\varphi(z)$ correspondantes forment donc, d'après le théorème 1, une famille normale $\mathfrak{F}$. On peut en extraire une suite partielle tendant vers une fonction limite

$$\Phi(z) = P^*(z)/Q^*(z) \ .$$

On peut supposer $Q^*(0) = q$; comme U_0 et U_1 sont limites respectivement de u_0 et u_1 , on en déduit que

$$|P^*(0)| \geqslant |Q^*(0)| = |q| \ ,$$

et que $\Phi(z)$ a effectivement un pôle dans $|z| < 1$, ce pôle étant $1/\theta^*$, donc $P^*(1/\theta) \neq 0$. Enfin

$$|P^*(z)| \leq |Q^*(z)| , \qquad \text{donc } \theta^* \in S_q$$

et le théorème 2 est démontré.

Remarque. - Pour $q = 1$, les nombres premiers p n'existent pas, l'ensemble S_1 coïncide avec l'ensemble S défini au début ; en effet θ est alors entier algébrique, donc $|N(\theta)| \geq 1$, et si le degré s de θ dépasse 2, nous obtenons la caractérisation déjà indiquée. Pour $s = 1$ ou $s = 2$ on peut montrer que $P(z) = 1$ est un polynôme qui convient. Le théorème 2 contient donc le théorème de R. SALEM [7].

Il serait intéressant d'étudier comment les propriétés diverses des nombres de S_1 peuvent éventuellement se généraliser aux nombres de S_q.

2° Définition. - Nous désignons par $\mathfrak{C}$ l'ensemble des nombres α de $\mathfrak{Q}_p$, algébriques sur le corps $\mathfrak{Q}$ des rationnels, pour lesquels il existe un exposant entier $h \geq 1$ tel que $p^h \alpha$ soit entier algébrique sur les rationnels, que l'équation irréductible dans $\mathfrak{Q}$ ayant α pour zéro ait toutes ses racines dans $|z| < 1$, et dans Ω_p ait toutes ses racines autres que α dans $|z|_p \leq 1$, tandis que $|\alpha|_p > 1$.

Alors on a :

THÉORÈME 3 (CHABAUTY [1]). - L'ensemble $\mathfrak{C}$ est fermé dans $\mathfrak{Q}_p$.

Démonstration. - Soit $Q(z)$ le polynôme irréductible dans $\mathfrak{Q}$ ayant $1/\alpha$ pour zéro dans $\mathfrak{Q}_p$. Le polygone de Newton montre que $Q(z) = p^h + q_1 z + \dots$, où q_1 est premier à p. Posons

$$P(z) = z^s Q(1/z)$$

s étant le degré de Q ; comme les zéros de $Q(z)$ sont dans $|z| > 1$, ceux de $P(z)$ sont dans $|z| < 1$, donc

$$\varphi(z) = P(z)/Q(z)$$

est une fraction irréductible.

Le produit des zéros de $P(z)$ montre que $|P(0)/Q(0)| < 1$, donc la puissance de p, qui peut diviser $P(0)$, est strictement inférieure à h, c'est-à-dire $|P(0)|_p > |Q(0)|_p$. Ainsi $\varphi(z)$ appartient à une famille $\mathfrak{F}$ avec $q = p^h$.