SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

MARCEL P. SCHÜTZENBERGER

Quelques remarques sur une construction de Schensted

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 15, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 15

4 mars 1963

QUELQUES REMARQUES SUR UNE CONSTRUCTION DE SCHENSTED

par Marcel P. SCHÜTZENBERGER

1. Introduction.

Soient A et B deux sous-ensembles de $\underset{\sim}{N}$ et $\alpha : A \to B$ une bijection. Dans un article récent [1], C. SCHENSTED a donné une construction remarquable associant de façon injective à $\alpha : A \to B$ une paire $(P(\alpha , A) , Q(\alpha , A))$ de tableaux standards de Young de même forme. Nous nous proposons ici d'apporter quelques précisions supplémentaires aux propriétés déjà établies par SCHENSTED en rattachant cette question au problème classique de S. NEWCOMB et en observant que la tableau $Q(\alpha , A)$ est en fait identique à $P(\alpha^{-1} , B)$. Nous supposerons que le lecteur est familier avec les définitions et les résultats fondamentaux de SCHENSTED.

Pour simplifier les notations, nous considérerons les tableaux standards de Young comme des éléments particuliers du module $\mathcal{T}$ des applications de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{Z}$ bien que, de fait, seules interviennent les structures d'ordre de ces ensembles.

Pour tout $T \in \mathcal{T}$, la <u>forme</u> (ou <u>support</u>) de T sera l'ensemble

$$|T| = \{(i , j) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N} : \ T_{i,j} \neq 0\}$$

et $\{T\}$ désignera l'image par T de $|T|$ dans $\underset{\sim}{Z}$.

Quand $T : \ |T| \to \{T\}$ est bijective (donc, en particulier quand T est standard) on dénotera par T^{-1} l'application inverse. Enfin pour $a \in \underset{\sim}{Z} \setminus \{0\}$ et $(i , j) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$, $a_{ij} \in \mathcal{T}$ sera définie de façon évidente par $|a_{i,j}| = (i , j)$, $\{a_{i,j}\} = a$.

Pour tout sous-ensemble fini A' de A et tout entier non négatif m, on posera :

$$P(\alpha , A'_m) = 0 \ \text{ si } \ m = 0$$

et, inductivement,

---

(1) SCHENSTED (C.). - Longest increasing and decreasing subsequences, Canad. J. of math., t. 13, 1961, p. 179-192.

$$P(\alpha , A'_m) = P(\alpha , A'_{m-1}) \leftarrow \alpha\, a'_m \quad \text{si} \quad 0 < m \leqslant \underline{\text{Card}}\, A' ,$$

où a'_m dénote le m-ième élément de A' par ordre croissant ;

$$P(\alpha , A'_m) = P(\alpha , A'_n) = P(\alpha , A') \quad \text{si} \quad m \geqslant \underline{\text{Card}}\, A' = n .$$

Il est logique de considérer ici $0 \leftarrow \alpha\, a'_1$ comme le tableau standard $(\alpha\, a'_1)_{1,1}$ et, par conséquent, $P(\alpha , A')$ est exactement le P-symbole de SCHENSTED de la séquence $(\alpha\, a'_1 , \alpha\, a'_2 , \dots , \alpha\, a'_n)$. De même :

$Q(\alpha , A'_0) = 0$;

$Q(\alpha , A'_m) = Q(\alpha , A'_{m-1}) + (a'_m)_{i,j}$ pour $0 < m \leqslant \underline{\text{Card}}\, A'$ avec

$$(i , j) = |P(\alpha , A'_m)| \setminus |P(\alpha , A'_{m-1})| ,$$

$Q(\alpha , A'_m) = Q(\alpha , A'_n) = Q(\alpha , A')$ pour $m \geqslant \underline{\text{Card}}\, A' = n$.

Quand $A' = [1 , n]$ ceci est la définition même du Q-symbole de SCHENSTED de $(\alpha\, a'_1 , \alpha\, a'_2 , \dots , \alpha\, a'_n)$, et pour A' quelconque, $Q(\alpha , A')$ se déduit simplement de ce Q-symbole en remplaçant dans ce dernier tableau chaque $m \in [1 , n]$ par a'_m .

Posons $\|0\| = 0$ et pour chaque $T \in \mathcal{T}\setminus\{0\}$,

$$\|T\|^{-1} = \underline{\text{Min}}(i + j - 1 : (i , j) \in |T|) .$$

Il résulte de la définition même de l'opération $\leftarrow$ que pour $A' = A$ on a

$$\lim_{m,m'\to\infty} \|P(\alpha , A_m) - P(\alpha , A_{m'})\| = \lim_{m,m'\to\infty} \|Q(\alpha , A_m) - Q(\alpha , A_{m'})\| = 0 .$$

On pourra donc toujours définir

$$P(\alpha , A) = \lim_{m\to\infty} P(\alpha , A_m) \quad \text{et} \quad Q(\alpha , A) = \lim_{m\to\infty} Q(\alpha , A_m) .$$

Toutes les notations qui viennent d'être introduites seront systématiquement utilisées dans tout ce qui suit.

2. L'opération Δ .

Soit $Q = Q(\alpha , A_m) \neq 0$ $(m < \infty)$. On définit un autre tableau standard $Q' = \Delta Q(\alpha , A_m)$ et une séquence $|U_m| = ((i_1 , j_1) , (i_2 , j_2) , \dots , (i_p , j_p))$ d'éléments de $|Q|$ par les conditions suivantes :

(1) $$(i_1 , j_1) = (1 , 1)$$

et, pour chaque $k \in [1 , p - 1]$,

$$(i_{k+1} , j_{k+1}) = (i_k + 1 , j_k) \quad \text{ou} \quad = (i_k , j_k + 1) ;$$

(2) $$Q'_{i',j'} = Q_{i',j'} \quad \text{si} \quad (i' , j') \notin |U_m|$$
$$= Q_{i,j} \quad \text{avec} \quad (i , j) = (i_{k+1} , j_{k+1}) \in |U_m|$$

si $(i' , j') = (i_k , j_k) \in |U_m|$ et $k \in [1 , p - 1]$

$$= 0 \quad \text{si} \quad (i' , j') = (i_p , j_p)$$

le dernier élément de $|U_m|$;

(3) $$Q' \text{ est un tableau standard} .$$

De façon plus explicite, connaissant déjà $(i' , j') = (i_k , j_k) \in |U_m|$, on pose $k = p$ (c'est-à-dire que l'on considère (i' , j') comme le dernier élément de $|U_m|$) si

$$Q_{i'+1,j'} = Q_{i',j'+1} = 0 .$$

Sinon on détermine $(i_{k+1} , j_{k+1}) \in |U_m|$ par les conditions

$$(i_{k+1} , j_{k+1}) = (i' , + 1 , j')$$

si $0 < Q_{i'+1,j'} < Q_{i',j'+1}$ ou si $0 = Q_{i',j'+1} < Q_{i'+1,j'}$

$$= (i' , j' + 1)$$

si $0 < Q_{i',j'+1} < Q_{i',+1,j'}$ ou si $0 = Q_{i'+1,j'} < Q_{i',j'+1}$ qui assurent automatiquement que (3) est satisfaite.

Donc, $\{\Delta Q\}$ est l'ensemble $\{Q\}$ privé de son plus petit élément $Q_{1,1}$. D'après les définitions mêmes, $|U_m| \subset |U_{m+1}|$, et par conséquent,

$$|U| = \lim_{m\to\infty} |U_m| , \text{ ainsi que } \Delta Q(\alpha , A) = \lim_{m\to\infty} \Delta Q(\alpha , A_m)$$

sont bien définis. Plus généralement, si $\overline{Q}$ est un autre tableau standard on a

$$\|\Delta Q - \Delta\overline{Q}\|^{-1} \geqslant \|Q - \overline{Q}\|^{-1} + 1 .$$

Exemple. - Si $Q = \begin{matrix} 248 \\ 679 \end{matrix}$ avec les notations de SCHENSTED,

$$\Delta Q = \begin{matrix} 478 \\ 69 \end{matrix} , \quad \Delta^2 Q (= \Delta(\Delta Q)) = \begin{matrix} 678 \\ 9 \end{matrix} , \quad \Delta^3 Q = \begin{matrix} 78 \\ 9 \end{matrix} , \quad \Delta^4 Q = \begin{matrix} 8 \\ 9 \end{matrix} , \quad \Delta^5 Q = 9 , \quad \Delta^6 Q = 0 .$$

Remarque 1. - Si $A \neq \emptyset$, on a identiquement

$$\Delta Q(\alpha , A) = Q(\alpha , A\backslash\{a_1\}) .$$

Démonstration. - Le résultat peut être vérifié directement pour Card $A < 2$ et, dénotant pour abréger par A' l'ensemble $A\backslash\{a_1\}$, il suffit de vérifier que, pour $m > 1$, l'égalité de $\Delta Q(\alpha , A_{m-1})$ et $Q(\alpha , A'_{m-2})$ entraîne celle de $\Delta Q(\alpha , A_m)$ et $Q(\alpha , A'_{m-1})$.

Par définition il existe (i , j) et $(i' , j') \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ tels que $Q(\alpha , A'_{m-1}) = Q(\alpha , A'_{m-2}) + (a_m)_{i',j'}$ et $Q(\alpha , A_m) = \Delta Q(\alpha , A_{m-1}) + (a_m)_{i,j}$. Donc, d'après l'hypothèse d'induction,

$$\Delta Q(\alpha , A_m) = Q(\alpha , A'_{m-1}) + (a_m)_{i,j} - (a_m)_{i',j'}$$

et il ne reste qu'à vérifier $(i , j) = (i' , j')$.

Rappelant le résultat fondamental de SCHENSTED (lemme 6, loco citato p. 183) :

$$P(\alpha , A_m) = (\alpha\, a_1 \to P(\alpha , A'_{m-2})) \leftarrow \alpha\, a_m$$

$$= \alpha\, a_1 \to (P(\alpha , A'_{m-2}) \leftarrow \alpha\, a_m)$$

et utilisant l'identité de forme des P-symboles et des Q-symboles on a :

$$|Q(\alpha , A_{m-1})| \setminus |Q(\alpha , A'_{m-2})| = (i'' , j'')$$

et

$$|Q(\alpha , A_m)| \supset |Q(\alpha , A'_{m-2})| \cup \{(i , j) , (i' , j') , (i'' , j'')\} .$$

Distinguons maintenant deux cas :

1° $(i'' , j'') \neq (i , j)$ et, par conséquent,

$$|Q(\alpha , A_m)| = |Q(\alpha , A'_{m-2})| \cup \{(i , j) , (i'' , j'')\} .$$

La commutativité des opérations $\to$ et $\leftarrow$ implique la relation

$$Q(\alpha , A_m) - Q(\alpha , A_{m-1}) = Q(\alpha , A'_{m-1}) - Q(\alpha , A'_{m-2}) = (a_m)_{i,j} .$$

Donc, $(i , j) = (i' , j')$ puisque le tableau obtenu en remplaçant a_m par zéro dans $\Delta Q(\alpha , A_m)$ est égal à $\Delta Q(\alpha , A_{m-1})$, c'est-à-dire à $Q(\alpha , A'_{m-2})$ par l'hypothèse d'induction.

2° $(i'' , j'') = (i , j)$ et, par conséquent,

$$|Q(\alpha , A_m)| = |Q(\alpha , A_{m-2})| \cup \{(i , j) , (\bar{i} , \bar{j})\}$$

où $(\bar{i} , \bar{j}) = |P(\alpha , A_m)| \setminus |P(\alpha , A'_{m-1})|$.

Cette dernière relation implique $(\bar{i} , \bar{j}) = (i + 1 , j)$ ou $(i , j + 1)$ et par conséquent $|Q(\alpha , A'_{m-2})| \cup \{(\bar{i} , \bar{j})\}$ n'est pas la forme d'un tableau standard. Comme $\Delta Q(\alpha , A_m)$ est un tableau standard tel que

$$|\Delta Q(\alpha , A_m)| = |Q(\alpha , A'_{m-2})| \cup \{(i' , j')\} \subset |Q(\alpha , A_m)|$$

on a donc encore $(i' , j') = (i , j)$ et la vérification est achevée.

PROPRIÉTÉ 1. - La correspondance de Schensted associant la paire $(P(\alpha , A) , Q(\alpha , A))$ à $\alpha : A \to B$ est injective.

Démonstration. - Le résultat plus fort prouvant, pour A fini, le caractère bijectif de la correspondance est dû à SCHENSTED (lemme 3, loco citato p. 182). Nous considérons le cas de A infini, et nous vérifions que la donnée de $P = P(\alpha , A)$ et de $Q = Q(\alpha , A)$ détermine de façon univoque a_1 , αa_1 , $P(\alpha , A')$ et $Q(\alpha , A')$ (avec $A' = A \setminus \{a_1\}$ comme plus haut).

Pour tout m positif fini, SCHENSTED a montré (loco citato) qu'il existe une et une seule paire (b , P'_m) telle que P'_m soit un tableau standard satisfaisant les relations

$$|P'_m| = |\Delta Q(\alpha , A_m)| \quad \text{et} \quad b \to P'_m = P(\alpha , A_m) \ ;$$

la remarque 1 montre, qu'en fait, $b = \alpha a_1$, $P'_m = P(\alpha , A'_{m-1})$ et en outre

$$\{a_1\} = \{Q(\alpha , A_m)\} \setminus \{Q(\alpha , A'_m)\} \quad (= \{Q\} \setminus \{\Delta Q\}) \ .$$

De par la définition même de l'opération $\to$, on a

$$(P(\alpha , A_m))^{-1} b = (i'_m , 1) \ ,$$

où i'_m est au moins égal au nombre i_m défini par

$$(i_m , j_m) = |Q(\alpha , A_m)| \setminus |\Delta Q(\alpha , A_m)| \ .$$

Comme $\lim_{m\to\infty} i'_m = i'^* < \infty$, il en résulte

$$\lim_{m\to\infty} i_m = i^* < \infty \ .$$

Ainsi, puisque, identiquement, $(i_m , j_m) \in |U|$ et $i_m \leq i_{m+1}$, la valeur de i^* est déterminée de façon unique par Q . Plus précisément

$$i^* = \max_{d>0} \{i : \ (i , j) \in |U| , \ i + j = d\}$$

et les inégalités qui viennent d'être écrites montrent que ce nombre i^* est fini pour tout tableau standard qui est un Q-symbole.

Définissons maintenant pour chaque $d > i^*$ le tableau standard $P^{(d)}$ par les relations

$$P^{(d)}_{i,j} = P_{i,j} \ \text{ si } \ i + j \leq d \ ; \ = 0 \ \text{ si } \ i + j > d \ .$$

D'après le résultat de SCHENSTED rappelé plus haut, il existe pour chaque $d > i^*$ une et une seule paire $(b^{(d)} , P'^{(d)})$ satisfaisant

$$P^{(d)} = b^{(d)} \to P'^{(d)} \quad \text{et} \quad |P^{(d)}| \setminus |P'^{(d)}| = \{(i^* , d - i^*)\} \ .$$

C'est une propriété élémentaire de $\to$ que $b^{(d)} \leq b$, identiquement. Par conséquent $b = \lim_{d\to\infty} b^{(d)}$ et trivialement

$$P(\alpha\ ,\ A') = \lim_{d\to\infty} P'^{(d)}$$

ce qui achève la vérification.

Il est utile de noter que si $P = Q$, on a $b = P_{1,1}$ (et, par conséquent, $b = \{Q\}\setminus\{\Delta Q\}$) si et seulement si $i^* = 1$. Ceci résulte immédiatement de la remarque plus générale que S étant un tableau standard quelconque et $0 < s < S_{1,1}$, on a l'identité

$$\Delta(s \to S) = \Delta(S \leftarrow s) = S \ .$$

3. Relation avec le problème de Newcomb.

Soit $Q = Q(\alpha\ ,\ A)$ et pour m positif

$$\eta_m = \underline{\mathrm{sgn}}(i' + j' - i - j) \quad \text{où} \quad (i\ ,\ j) = Q^{-1}\, a_m \quad \text{et} \quad (i'\ ,\ j') = Q^{-1}\, a_{m+1} \ .$$

Par exemple, pour $Q = \begin{matrix} 248 \\ 679 \end{matrix}$ on trouve que la suite η_1, η_2, ..., η_5 est égale à $+1$, -1, $+1$, $+1$, -1, les paires $(2\ ,\ 4)$, $(6\ ,\ 8)$, $(8\ ,\ 9)$ et $(4\ ,\ 6)$ illustrant respectivement les cas (1), (2), (3) et (4) énumérés plus bas. Le lien entre les Q-symboles de Schensted et le problème de Newcomb est fourni par la

Remarque 2. - Pour chaque m positif, $\eta_m = +1$ ou -1 selon que $\alpha\, a_m < \alpha\, a_{m+1}$ ou $> \alpha\, a_{m+1}$.

Démonstration. - Pour $a_m > a_1$ fixe, définissons

$$\overline{\eta}_m = \underline{\mathrm{sgn}}(\overline{i}' + \overline{j}' - \overline{i} - \overline{j}) \quad \text{où} \quad (\overline{i}\ ,\ \overline{j}) = (\Delta Q)^{-1}\, a_m\ , \quad (\overline{i}'\ ,\ \overline{j}') = (\Delta Q)^{-1}\, a_{m+1}$$

et vérifions d'abord que $\eta_m = \overline{\eta}_m$ identiquement. Pour cela, il est commode de distinguer quatre cas :

1° $i = i'$, $j = j' - 1$;

2° $i > i'$, $j < j'$;

3° $i = i' - 1$, $j = j'$;

4° $i < i'$, $j > j'$.

Ce sont les seuls possibles, car le fait que Q est standard et que $a_m < a_{m+1}$ exclut $i' \leq i$ et $j' \leq j$, et, d'autre part, le fait que a_m et a_{m+1} sont deux éléments consécutifs de $\{Q\}$ exclut les cas $i = i'$ et $j < j' - 1$, $i < i'$ et $j < j'$ ou $i < i' - 1$ et $j = j'$ qui entraîneraient l'existence d'un élément $a = Q_{i,j'-1}$, $= Q_{i,j'}$, ou $= Q_{i'-1,j}$, respectivement, tel que $a_m < a < a_{m+1}$.

Dans les cas (2) et (4) puisque $(\Delta Q)^{-1} a_m = (i , j)$, $= (i - 1 , j)$ ou $= (i , j - 1)$ et $(\Delta Q)^{-1} a_{m+1} = (i' , j')$, $= (i' - 1 , j')$ ou $= (i' , j' - 1)$ et puisque ΔQ est standard, on obtient directement l'égalité $\eta_m = \overline{\eta}_m$ cherchée.

Traitons en détails les sous-cas suivants du cas (1) :

(11) $i > 1$ et $(i - 1 , j + 1)(=(i - 1 , j')) \in |U|$. Dans ce cas

$$(\Delta Q)^{-1} a_m = Q^{-1} a_m \quad \text{et} \quad (\Delta Q)^{-1} a_{m+1} = (i - 1 , j') \quad \text{ou} \quad = (i, j')$$

selon que (i , j') appartient ou non à $|U|$. Donc $\eta_m = \overline{\eta}_m$.

(12) $i > 1$ et $(i - 1 , j) \notin |U|$. Puisqu'il n'existe aucun élément de $\{Q\}$ entre a_m et a_{m+1} on a $Q_{i-1, j+1} < a_m$. Donc $(i - 1 , j + 1) \in |U|$ et on est ramené au cas précédent.

(13) $j > 1$ et $(i , j - 1) \in |U|$. Ou bien $(\Delta Q)^{-1} a_m = (i , j)$ et $(\Delta Q)^{-1} a_{m+1} = (i' , j')$ ou bien $(i , j) \in |U|$. Dans ce dernier cas le fait que a_m et a_{m+1} sont consécutifs entraîne $a_{m+1} < Q_{i+1, j+1}$ ou $0 = Q_{i+1, j+1}$; donc $(i' , j') \in |U|$, $(\Delta Q)^{-1} a_{m+1} = (i , j)$, et enfin $\eta_m = \overline{\eta}_m$.

(14) Dans tous les cas restants,

$$(\Delta Q)^{-1} a_m = (i , j) \quad \text{et} \quad (\Delta Q)^{-1} a_{m+1} = (i' , j') .$$

Donc $\eta_m = \overline{\eta}_m$.

Ceci achève l'examen du cas (1) et le cas (3) pouvant être traité de façon absolument analogue, nous ne répéterons pas la discussion.

Considérons maintenant le Q-symbole Q_m relatif à α et à l'ensemble $\{a_m , a_{m+1} , \dots\}$. De par la définition même des Q-symboles on a

$$Q_m^{-1} a_m = (1 , 1) \quad \text{et} \quad Q_m^{-1} a_{m+1} = (1 , 2) \quad \text{ou} \quad = (2 , 1)$$

selon que $\alpha a_m < \alpha a_{m+1}$ ou $\alpha a_m > \alpha a_{m+1}$. Puisque, d'après la remarque 1, Q_m est égal à $\Delta^{m-1} Q$ pour chaque m positif la remarque 2 résulte directement de $\eta_m = \overline{\eta}_m$ par induction sur m .

4. La formule $Q(\alpha , A) = P(\alpha^{-1} B)$.

Soient a_p et $a_{p'}$ deux éléments d'un sous-ensemble quelconque A' de A . Nous définissons le déplacement $Dp(a_p , a_{p'} , \alpha , A')$ de $\alpha a_{p'}$ par αa_p dans (la construction de) $P(\alpha , A')$ par les règles suivantes :

$$Dp(a_p , a_{p'} , \alpha , A') = 0$$

si $p' > p$ ou si $p' < p$ et si $P(\alpha , A'_{p-1})^{-1} a_{p'} = P(\alpha , A'_p)^{-1} a_{p'}$;

$$= ((0\ ,\ 0)\ ,\ (i\ ,\ j))$$

où $(i\ ,\ j) = P(\alpha\ ,\ A'_p)^{-1}\ a_p$ si $p = p'$;

$$= ((i'\ ,\ j')\ ,\ (i\ ,\ j))$$

(où $(i'\ ,\ j') = P(\alpha\ ,\ A'_{p-1})^{-1}\ a_{p'}$ et $(i\ ,\ j) = P(\alpha\ ,\ A'_p)^{-1}\ a_{p'}$) si $p' < p$ et $i \neq i'$.

Dans les deux derniers cas on dira encore que $\alpha\ a_p$ déplace $\alpha\ a_{p'}$ de $(i'\ ,\ j')$ à $(i\ ,\ j)$, la valeur $(0\ ,\ 0)$ de $(i'\ ,\ j')$ pour $a_p = a_{p'}$ étant évidemment purement conventionnelle. De par la définition même de l'opération $\leftarrow \alpha\ a_p$ si $(i'\ ,\ j') \neq (0\ ,\ 0)$ on a nécessairement $i' = i + 1$ et $j < j'$; en outre on observera que ce déplacement se produit si et seulement s'il existe $a'' \in A'$ tel que $\alpha\ a_p \leq \alpha\ a'' < \alpha\ a_{p'}$ et que $\mathrm{Dp}(a_p\ ,\ a''\ ,\ \alpha\ ,\ A') = ((i''\ ,\ j'')\ ,\ (i'\ ,\ j'))$. Donc, dans tous les cas,

$$\mathrm{Dp}(a_p\ ,\ a'_{p'}\ ,\ \alpha\ ,\ A')$$

$$= \mathrm{Dp}(a_p\ ,\ a_{p'}\ ,\ \alpha\ ,\ \{a_{p''} \in A' :\ p'' \leq p\ ;\ \ \alpha\ a_{p''} < \alpha\ a_{p'}\ ;\ \ \alpha\ a_p \leq \alpha\ a_{p''}\}) \quad .$$

Ces notations sont étendues de façon évidente à la bijection $\alpha^{-1} :\ B \to A$ et aux sous-ensembles B' de B .

Remarque 3. - Pour tout $a\ ,\ a' \in A$, on a

$$\mathrm{Dp}(a\ ,\ a'\ ,\ \alpha\ ,\ A) = \mathrm{Dp}(\alpha\ a'\ ,\ \alpha\ a\ ,\ \alpha^{-1}\ ,\ B) \ .$$

Démonstration. - Il suffit évidemment de vérifier l'énoncé pour tous les ensembles finis et, procédant par induction, nous supposerons $A = A_n$, $B = B_n$ $(n < \infty)$ et que le résultat est déjà établi pour chacun des sous-ensembles propres de A .

Soit $a^* = \alpha^{-1}\ b_n$ (où, comme toujours, $b_n = \max\{b :\ b \in B\}$). Si $a\ ,\ a' \in A\setminus\{a^*\}$, on a rappelé plus haut que

$$\mathrm{Dp}(a\ ,\ a'\ ,\ \alpha\ ,\ A) = \mathrm{Dp}(a\ ,\ a'\ ,\ \alpha\ ,\ A\setminus\{a^*\})$$

et

$$\mathrm{Dp}(\alpha\ a'\ ,\ \alpha\ a\ ,\ \alpha^{-1}\ ,\ B) = \mathrm{Dp}(\alpha\ a'\ ,\ \alpha\ a\ ,\ \alpha^{-1}\ ,\ B_{n-1}) \ .$$

Donc, dans ce cas, la relation cherchée se déduit immédiatement de l'hypothèse d'induction. En raison de la symétrie de l'énoncé (entre $\alpha :\ A \to B$ et $\alpha^{-1} :\ B \to A$), il ne reste à discuter que les deux cas où

1° soit $a = a^*$, $a' = a_n$;

2° soit $a = a_n$, $a' = a^*$, avec $a_n \neq a^*$.

<u>Cas (1)</u>. – D'après la définition même de $\leftarrow \alpha\ a^*$ et le fait que $\alpha\ a^*$ est plus grand que tous les éléments de $\{P(\alpha , A)\}$, l'ensemble des éléments déplacés par $\alpha\ a^*$ se réduit à $\alpha\ a^*$ lui-même. Donc, si $a^* \neq a_n$, on a

$$0 = \underset{\sim}{Dp}(a , a' , \alpha , A) = \underset{\sim}{Dp}(\alpha\ a' , \alpha\ a , \alpha^{-1} , B) .$$

Au contraire, si $a^* = a_n$, $\underset{\sim}{Dp}(a , a' , \alpha , A) = ((0 , 0) , (i , j))$ où j est le plus petit entier tel que $(1 , j) \notin |\underset{\sim}{P}(\alpha , A_{n-1})|$. La même observation vaut pour $\underset{\sim}{Dp}(\alpha\ a' , \alpha\ a , \alpha^{-1} , B)$ avec cette fois $(1 , j') \notin |P(\alpha^{-1} , B_{n-1})|$ et l'égalité des deux déplacements résulte de l'hypothèse d'induction qui implique

$$|P(\alpha , A_{n-1})| = |Q(\alpha^{-1} , \alpha^{-1} A_{n-1})| = |P(\alpha^{-1} , B_{n-1})|$$

puisque dans le cas examiné ici $\alpha\ A_{n-1} = B_{n-1}$.

<u>Cas (2)</u>. – Considérons d'abord le cas où

$$\underset{\sim}{Dp}(a , a' , \alpha , A) = ((i , j) , (i + 1 , \bar{j})) .$$

Ceci implique $P(\alpha , A_{n-1})^{-1}\ b_n = (i , j)$ et, par conséquent, l'existence de $x \in A_{n-1}$ tel que $\alpha\ x$ ait déplacé b_n de (i' , j') (qui est éventuellement $(0 , 0)$) à (i , j).

En outre il doit exister $y \in A_{n-1}$ tel que $\alpha\ a_n \leqslant \alpha\ y < b_n$ et que $\alpha\ a_n$ déplace $\alpha\ y$ de (i'' , j'') à (i , j). De fait $\alpha\ y$ est le plus grand des éléments de B_{n-1} qui soit déplacé par $\alpha\ a_n$. Appliquant l'hypothèse d'induction à $A\backslash\{a^*\} = a^{-1}\ B_{n-1}$, on en conclut que y est le dernier élément de B_{n-1} déplaçant $a = a_n$ dans $P(\alpha^{-1} , B_{n-1})$ et que par conséquent,

$$P(\alpha^{-1} , B_{n-1})^{-1}\ a = (i , j) .$$

De façon analogue, l'hypothèse d'induction appliquée à A_{n-1} montre que $a' = \alpha^{-1}\ b_n$ déplace x de (i' , j') à (i , j) dans $P(\alpha^{-1} , A_{n-1})$.

Comme $x < a_n$ il en résulte que l'opération $\leftarrow a'$ déplace $a = a_n$ de (i , j) en $(i + 1 , \bar{\bar{j}})$ ce qui achève la vérification dans ce cas puisque, trivialement, $\bar{j} = \bar{\bar{j}}$, ces deux nombres ne dépendant que des formes

$$|P(\alpha , A_{n-1}\backslash\{a^*\})| \quad \text{et} \quad |P(\alpha^{-1} , B_{n-1}\backslash\{\alpha\ a_n\})|$$

qui sont identiques d'après l'hypothèse d'induction.

En raison de la symétrie, on a établi du même coup que $\underset{\sim}{Dp}(a_n , a^* , \alpha , A) = 0$ si et seulement si $\underset{\sim}{Dp}(b_n , \alpha\ a_n , \alpha^{-1} , B) = 0$ ce qui termine la vérification de la remarque.

Observons maintenant que la construction qui vient d'être discutée donne

$$P(\alpha^{-1} , \alpha A_n) = P(\alpha^{-1} , \alpha A_{n-1}) + (a_n)_{i,j}$$

où $(i , j) = |P(\alpha , A_n)|\setminus|P(\alpha , A_{n-1})|$. Donc, supposant déjà établi que $P(\alpha^{-1} , \alpha A_{n-1}) = Q(\alpha , A_{n-1})$, on a encore

$$P(\alpha^{-1} , \alpha A_n) = Q(\alpha , A_n)$$

et, par induction, dans tous les cas

$$P(\alpha^{-1} , B) = Q(\alpha , A)$$

ce qui est la formule cherchée.

Donnons une application de cette remarque au cas particulier de $A = B$.

PROPRIÉTÉ 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que $\alpha : A \to A$ soit une involution est que $P(\alpha , A) = Q(\alpha , A)$.

<u>Démonstration</u>. - Il est trivial que $A = B$ et $\alpha = \alpha^{-1}$ entraînent $P(\alpha^{-1} , B) = P(\alpha , A)$, c'est-à-dire $P(\alpha , A) = Q(\alpha , A)$ d'après la formule vérifiée dans cette section.

Réciproquement, supposons $P(\alpha , A) = Q(\alpha , A)$ et montrons qu'il en résulte $a_1 = b_1$, $\alpha a_1 = \alpha b_1$,

$$P(\alpha , A\setminus\{a_1 , \alpha a_1\}) = Q(\alpha , A\setminus\{a_1 , \alpha a_1\})$$

ce qui, par induction établit la propriété.

Revenant aux notations de la fin de la section 2, nous distinguons deux cas selon que $i^* > 1$ ou $i^* = 1$.

(1) $i^* > 1$. On a $\Delta Q(\alpha , A) = Q(\alpha , A\setminus\{a_1\})$ et l'on sait en déduire αa_1 et $P(\alpha , A\setminus\{a_1\})$. D'après la formule de la présente section

$$P(\alpha , A\setminus\{a_1\}) = Q(\alpha^{-1} , B\setminus\{\alpha a_1\}) .$$

Donc par la remarque 1 :

$$\Delta P(\alpha , A\setminus\{a\}) = \Delta Q(\alpha^{-1} , B\setminus\{\alpha a_1\}) = Q(\alpha^{-1} , B\setminus\{\alpha a_1 , b_1\}) .$$

Partons maintenant de $Q(\alpha^{-1} , B)$ qui, toujours d'après la même formule, est égal à $P(\alpha , A)$. Répétant le même calcul que plus haut, on en déduit $Q(\alpha , A\setminus\{a^{-1} b_1 , a_1\})$ qui est donc égal à $Q(\alpha^{-1} , B\setminus\{\alpha a_1 , b_1\})$ d'après l'hypothèse $P(\alpha , A) = Q(\alpha , A)$. Une troisième application de la formule donne

$$Q(\alpha^{-1} , B\setminus\{\alpha a_1 , b_1\}) = P(\alpha , A\setminus\{\alpha_1 , \alpha^{-1} b_1\})$$

et le résultat est vrai dans ce cas.

(2) $i^* = 1$. Dans ce cas les observations faites à la fin de la section 2 et la formule de la présente section donnent directement

$$\alpha\ a_1 = a_1 \quad \text{et} \quad P(\alpha\ , A\backslash\{a_1\}) = Q(\alpha\ , A\backslash\{a_1\}) .$$

La propriété est donc vérifiée dans tous les cas.

Examinons plus en détail le cas où $A = B \neq \emptyset$ est fini et $P(\alpha\ , A) = Q(\alpha\ , A)$ et, pour tout tableau standard S, dénotons par $\underset{\sim}{\mathrm{Imp}}|S|$ le nombre des $j \in N$ tels qu'il existe un nombre impair de $i \in N$ pour lesquels $(i\ , j) \in |S|$. Il résulte des définitions que, dans le cas (2) discuté plus haut,

$$|Q(\alpha\ , A)|\backslash|\Delta Q(\alpha\ , A)| = (i\ , j^*)$$

et qu'il n'existe pas d'autre $i \in N$ tels que $(i\ , j^*) \in |Q(\alpha\ , A)|$. Donc

$$\underset{\sim}{\mathrm{Imp}}|Q(\alpha\ , A\backslash\{a_1\})| = \underset{\sim}{\mathrm{Imp}}|Q(\alpha\ , A)| - 1 .$$

Dans le cas (1) soit $(i^*\ , j^*) = |Q(\alpha\ , A)|\backslash|\Delta Q(\alpha\ , A)|$ où par hypothèse $i^* > 1$. Soit $|U'|$ la séquence relative à l'opération Δ dans $P(\alpha\ , A\backslash\{a_1\})$. Il est facile de voir qu'il existe un entier k tel que $(i_{k'}\ , j_{k'}) \in |U|$ entraîne $(i_{k'}\ , j_{k'}) \in |U'|$ si $k' < k$ et $(i_{k-1}\ , j_{k'}) \in |U'|$ si $k' \geq k$. Il s'en déduit que

$$|P(\alpha\ , A\backslash\{a_1\})|\backslash|\Delta P(\alpha\ , A\backslash\{a_1\})| = (i^* - i\ , j^*)$$

et par conséquent, d'après nos remarques antérieures

$$\underset{\sim}{\mathrm{Imp}}|Q(\alpha\ , A\backslash\{a_1\ , \alpha^{-1}\ b_1\})| = \underset{\sim}{\mathrm{Imp}}|Q(\alpha\ , A)| .$$

Par induction, l'on conclut de ces deux relations que si α est une involution sur l'ensemble fini A, le nombre des éléments laissés invariants par α est précisément égal à $\underset{\sim}{\mathrm{Imp}}|Q(\alpha\ , A)|$.

5. L'opération I.

Soit Q un tableau standard tel que $0 < \underset{\sim}{\mathrm{Card}}\{Q\} = n < \infty$. On définit $Q^I \in \mathcal{T}$ par l'équation

$$Q^I = \sum \{(a_k)_{i_k, j_k} : \ k \in [1\ , n]\}$$

où a_k désigne le k-ième élément de $\{Q\}$ par ordre croissant et où, ici $(i_k\ , j_k) = |\Delta^{n-k+1}\ Q|\backslash|\Delta^{n-k}\ Q|$ (avec $\Delta^0\ Q = Q$). Trivialement, $\{Q\} = \{Q^I\}$, $|Q| = |Q^I|$ et $Q^{IT} = Q^{TI}$ où T indique la transposition. De plus si la bijection $\sigma :\ \{Q\}\backslash\{a_1\} \to \{Q\}\backslash\{a_n\}$ définie par $\sigma\ a_{k+1} = a_k$ pour $k \in [1\ , n-1]$ est étendue de façon naturelle à $\mathcal{T}$, on vérifie sans peine que

$$Q^{I} = \sigma(\Delta Q)^{I} + (a_n)_{i_n, j_n} .$$

On verra plus bas que Q^{I} est standard et $Q^{II} = Q$. Par exemple, pour $Q = \begin{smallmatrix}248\\679\end{smallmatrix}$ comme plus haut,

$$Q^{I} = \begin{smallmatrix}267\\489\end{smallmatrix} , \quad (\Delta Q)^{I} = \begin{smallmatrix}478\\69\end{smallmatrix} , \quad \sigma(\Delta Q)^{I} = \begin{smallmatrix}267\\48\end{smallmatrix} .$$

Soit maintenant $Q = Q(\alpha , A)$ où $0 < \underset{\sim}{\mathrm{Card}}\, A = n < \infty$. La bijection $\overline{\alpha} : A \to B$ étant définie par $\overline{\alpha}\, a_k = \alpha\, a_{n-k+1}$ pour $k \in [1 , n]$, il a été prouvé par SCHENSTED que

$$P(\overline{\alpha} , A) = P(\alpha , A)^{T}$$

(lemme 7 loco citato p. 186). Nous vérifions par induction sur n que $Q(\overline{\alpha} , A) = Q(\alpha , A)^{IT}$ en observant que le résultat est vrai pour $n = 1$ et en supposant qu'il est déjà établi pour $A' = A\backslash\{a_1\}$.

Compte tenu de la relation $\overline{\alpha}\sigma A' = A'$, et écrivant comme d'habitude A_{n-1} pour $A\backslash\{a_n\}$, ceci revient à supposer

$$Q(\overline{\alpha} , A_{n-1}) = \sigma\, Q(\alpha , A')^{IT} .$$

Maintenant, $Q(\overline{\alpha} , A) = Q(\overline{\alpha} , A_{n-1}) + (a_n)_{i,j}$ et, comme on l'a noté plus haut,

$$Q(\alpha , A)^{IT} = \sigma(\Delta Q(\alpha , A))^{IT} + (a_n)_{j_n, i_n} .$$

D'après la remarque 1, $\Delta Q(\alpha , A) = Q(\alpha , A')$ et par conséquent :

$$Q(\overline{\alpha} , A) = Q(\alpha , A)^{IT} - (a_n)_{j_n, i_n} + (a_n)_{i,j} .$$

Il suffit donc de vérifier $|Q(\overline{\alpha} , A)| = |Q(\alpha , A)^{IT}|$. Or ceci résulte immédiatement de $|Q(\alpha , A)^{I}| = |Q(\alpha , A)|$, de l'égalité de forme des P-symboles et des Q-symboles et de l'égalité $|P(\overline{\alpha} , A)| = |P(\alpha , A)^{T}|$ impliquée par l'identité de Schensted. La formule est donc établie.