

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MONIQUE BERTRAND

## Combinaisons non-associatives

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 19,  
p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1962-1963\\_\\_16\\_2\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A8_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

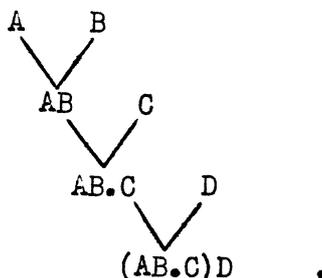
COMBINAISONS NON-ASSOCIATIVES

par Mme Monique BERTRAND

Nous allons considérer un ensemble  $E$  d'éléments, muni d'une loi de composition, que nous appellerons produit, supposée non-associative. Nous ne supposerons rien sur la commutativité, nous réservant de la préciser selon les cas.

Forme. - Les produits non-associatifs peuvent être classés suivant leurs formes, c'est-à-dire suivant la façon d'associer les facteurs sans considération de leur identité.

Ainsi, si le produit n'est pas commutatif, les produits  $(AB.C)D$  et  $(BA.C)D$  sont différents mais ont même forme, tandis que  $D(AB.C)$  a une forme différente. Un produit non-associatif peut être regardé comme un arbre généalogique :



I. Arithmétique des formes.

Tout d'abord une convention : pour éliminer les parenthèses, on convient d'utiliser des groupes de points ; ainsi

$$A \therefore BC.AD^2 : E = A\{[(BC)(A \widehat{DD})] E\} .$$

Les produits et les formes, où les facteurs sont absorbés un par un, sont dits primaires.

Exemple : les puissances successives d'un élément.

1. Commutativité.

Considérons pour l'instant le cas commutatif où une forme primaire est unique lorsque le nombre  $\delta$  de facteurs est donné :  $X^\delta$ . Toute autre puissance peut être représentée en fractionnant l'exposant par des parenthèses avec les conventions suivantes :

Pour le produit de deux puissances : on fait la somme des exposants.

Pour une puissance de puissance : on fait le produit des exposants.

Une puissance itérée se traduira par une puissance dans l'exposant. Ainsi

$$X^2 X^3 = X^{2+3} \quad X^{2 \times 3} = (X^2)^3 \quad X^{2^3} = [(X^2)^2]^2 .$$

L'addition des exposants, rendant compte de la multiplication non-associative, est commutative mais non associative. Au contraire, le produit des exposants n'est pas commutatif :

$$X^{a \times b} = (X^a)^b \neq (X^b)^a = X^{b \times a} ;$$

il est associatif, car

$$X^{ab \cdot c} = [(X^a)^b]^c = X^{a \cdot bc} = X^{abc} .$$

Etudions la distributivité :

- pré-distributivité :

$$X^{a(b+c)} = (X^a)^{b+c} = (X^a)^b (X^a)^c = X^{ab} \cdot X^{ac} = X^{ab+ac} ,$$

il y a pré-distributivité.

- post-distributivité :

$$X^{(b+c)a} = (X^{b+c})^a = (X^b \cdot X^c)^a = \underbrace{X^b X^c}_{a \text{ fois}} \underbrace{X^b X^c}_{a \text{ fois}} \dots \underbrace{X^b X^c}_{a \text{ fois}}$$

alors que

$$X^{ba+ca} = (X^b)^a \cdot (X^c)^a = \underbrace{(X^b X^b \dots X^b)}_{a \text{ fois}} \underbrace{(X^c \dots X^c)}_{a \text{ fois}}$$

il n'y a pas post-distributivité à cause de la non-associativité.

Il résulte de tout ceci que la forme  $S$  de tout produit commutatif et non-associatif peut être définie comme l'exposant de la puissance correspondante obtenue en égalant tous les facteurs.

Ainsi  $AB \cdot C^2$  :  $D$  a même forme que  $X^{2 \cdot 2 + 1}$

$$S = 2 \cdot 2 + 1 .$$

Exemple. -  $S = (2 \cdot 2 + 3) + (2 + 3)^2$  est la forme de

$$X^2 X^2 \cdot X^3 :: X^2 X^3 : X^2 X^3 : X^2 X^3 \cdot X^2 X^3 : X^2 X^3$$

car d'après ce qui précède  $(2 + 3)^2 = (2 + 3) \times 2 \times (2 + 3) \times 3 .$

Plus généralement, soient un produit  $\Pi_1$  de forme  $S_1$ , un produit  $\Pi_2$  de forme  $S_2$ ,  $S_1 + S_2$  est la forme de  $\Pi_1 \Pi_2$ , et  $S_1 S_2$  est la forme obtenue en substituant  $\Pi_1$  à chaque facteur de  $\Pi_2$ .

Donc l'ensemble des produits commutatifs et non-associatifs se représente sur une arithmétique non-associative dont les entiers sont les formes commutatives avec

$$\begin{array}{lll} a + b = b + a & ab.c = abc & a(b + c) = ab + ac \\ ab \neq ba & (a + b) + c \neq a + (b + c) & (b + c) a \neq ba + ca \end{array}$$

## 2. Non-commutativité.

Mêmes conclusions avec  $a + b \neq b + a$ .

## II. Classification des formes.

### 1. Définitions.

a. Degré  $\delta$  : nombre de facteurs. C'est l'évaluation de  $S$  en tant qu'entier ordinaire.

b. Conforme : deux formes non-commutatives  $S_1$  et  $S_2$ , qui se transforment en une même forme  $S$  quand la loi est considérée comme commutative, sont dites conformes, et on note  $S_1 \sim S_2$ ; il est facile de voir qu'il y a effectivement une relation d'équivalence. Ainsi :

$$\begin{array}{llll} A.B.C : D & A.BC : D & A : BC.D & A : B.CD \\ (2 + 1) + 1 & (1 + 2) + 1 & 1 + (2 + 1) & 1 + (1 + 2) \end{array}$$

sont conformes avec  $X^4$ .

c. Altitude : nombre de générations nécessaires pour former le produit; il y a  $\delta - 1$  noeuds.

d. Noeud équilibré : si ses deux facteurs sont conformes.

e. Mutabilité : le nombre de noeuds non-équilibrés est la mutabilité de la forme.

### 2. Conséquences.

a. Etant donnée une forme  $s$ , quel est le nombre de formes conformes à  $S$  ?

Etant donnée une forme  $s$ , pour obtenir toutes ses équivalentes on écrit son expression non-commutative, et on applique la commutativité de la somme.

$$S = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta + \dots$$

Un noeud est non-équilibré lorsque les valeurs commutatives entières de chaque branche sont différentes.

D'où une démonstration par récurrence :

Soit  $\mu = 1$ . S'il y a un seul noeud non-équilibré on obtient deux formes possibles,  $s$ , et  $s_1$  obtenue en intervertissant dans  $s$  les deux termes correspondants ainsi :

$$X(X^2) \quad S = 1 + (1 + 1) \quad S_1 = (1 + 1) + 1$$

et il n'y en a pas d'autre.

Supposons que, pour  $\mu$ , on ait  $2^\mu$  formes conformes à  $s$ .

Pour  $\mu + 1$ , il y a les  $2^\mu$  précédentes, et, si l'on applique la commutativité au noeud non-équilibré supplémentaire, on obtient encore  $2^\mu$  autres formes ; d'où le résultat :  $2^{\mu+1}$ .

Donc :  $2^\mu$  formes conformes à  $s$ , si  $\mu(s) = \mu$ .

b. Comportement des définitions vis-à-vis des lois de composition.

$$- S_1 \sim S_2 \implies \delta(S_1) = \delta(S_2), \quad \alpha(S_1) = \alpha(S_2), \quad \mu(S_1) = \mu(S_2).$$

En effet :

$$- \delta(S_1) = \delta(S_2) \text{ par définition,}$$

-  $\alpha(S_1) = \alpha(S_2)$ , car on ne joue sur la commutativité que sans changer les parenthèses ; or ce sont celles-ci qui rendent compte de  $\alpha$ .

-  $\mu(S_1) = \mu(S_2)$ , car le nombre de formes conformes à  $S_1$  est  $2^\mu(S_1)$ . Le nombre de formes conformes à  $s_2$  est  $2^\mu(S_2)$ , d'où  $\mu(s_1) = \mu(s_2)$ ,

-  $\delta(r + s) = \delta(r) + \delta(s)$ ,  $\delta(r \cdot s) = \delta(r) \delta(s)$ ,  $\delta(S^\nu) = [\delta(S)]^\nu$ , cela résulte des définitions.

$$- \alpha(r + S) = \begin{cases} 1 + \alpha(r) & \alpha(r) \geq \alpha(S) & \alpha(r \cdot S) = \alpha(r) + \alpha(S) \\ 1 + \alpha(S) & \alpha(r) \leq \alpha(S) & \alpha(S^\nu) = \nu \alpha(S) \end{cases}$$

L'expression de  $\alpha(r + S)$  se déduit facilement de la définition de  $\alpha$ .

L'expression de  $\alpha(r \cdot S)$  vient du fait qu'en remplaçant chaque facteur du produit de forme  $S$  par le produit de forme  $r$ ,  $\alpha(r)$  n'intervient qu'une fois.

Les générations suivantes se forment d'après  $\alpha(S)$ , d'où  $\alpha(rS) = \alpha(r) + \alpha(S)$

$$- \mu(r + S) = \begin{cases} 2\mu(S) & r \sim s & \mu(rS) = \delta(S) \mu(r) + \mu(S) \\ 1 + \mu(r) + \mu(S) & r \not\sim S & \mu(S^\nu) = (1 + \delta \dots + \delta^{\nu-1}) \mu(S) \end{cases}$$

en effet,

- pour  $\mu(r + S)$ , si  $r \sim S$ , le noeud de la somme  $r + s$  est équilibré, donc

$$\mu(r + S) = \mu(r) + \mu(S) = 2\mu(r),$$

si  $r \not\sim S$ , il y a dans  $\mu(r + S)$ ,  $\mu(r)$ ,  $\mu(S)$  et 1, le noeud de la somme :

$$\mu(r + S) = 1 + \mu(r) + \mu(S)$$

- pour  $\mu(rS)$ , on applique le fait qu'il y a prodistributivité et non-postdistributivité : dans l'expression développée de  $rS$ , il y a la forme de  $S_1$  et chaque entier y est multiplié par  $r$ , donc

$$\mu(rS) = \mu(S) + (\mu(r) \text{ multipliée par le nombre de facteurs de } S)$$

$$\mu(rs) = \delta(S) \mu(r) + \mu(S).$$

### 3. Table de formes commutatives.

$\alpha$	$\delta$	$\mu$	S	exemples
0	1	0	1	A
1	2	0	$2 = 1 + 1$	AB
2	3	1	$3 = 1 + (1 + 1)$	A.BC et les conformes
2	4	0	$2.2 = (1 + 1) + (1 + 1)$	AB.CD et les conformes
3	4	2	$4 = [(1 + 1) + 1] + 1$	A : B.CD et les conformes
3	5	1	$2.2 + 1 = [(1 + 1) + (1 + 1)] + 1$	AB.CD : E et les conformes
3	5	2	$3 + 2 = [1 + (1 + 1)] + (1 + 1)$	A.BC : DE et les conformes
3	6	1	$(2 + 2) + 2$	AB.CD : EF
3	6	2	$(1 + 2) + (1 + 2)$	A.BC : D.EF
3	7	2	$(1 + 2) + (2 + 2)$	A.BC : DE.FG
3	8	0	$2^3$	AB.CD : HE.FG

Comme le suggère cette table, on ne peut construire une forme,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\mu$ , étant donnée arbitrairement.

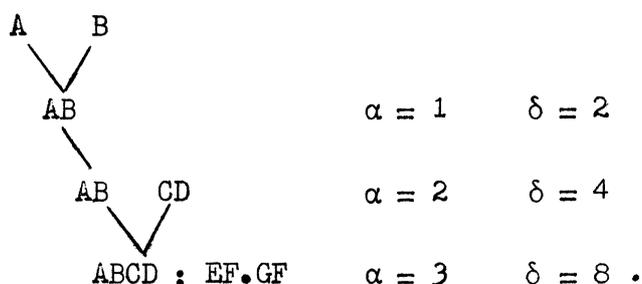
### 4. Relations entre $\alpha$ , $\delta$ , $\mu$ .

a.  $\alpha + 1 \leq \delta \leq 2^\alpha$ .

-  $\delta \geq \alpha + 1$ . En effet le nombre de facteurs est au moins égal au nombre de générations + 1. On a  $\delta = \alpha + 1$  pour une forme primaire c'est-à-dire une forme où les facteurs sont absorbés un à un.

exemple :  $\delta = 4$      $\alpha = 3$     A : B.CD

-  $\delta \leq 2^\alpha$ . Etant donné le nombre de générations  $\alpha$ , comment procéder pour obtenir l'ordre  $\delta$  maximum ?



On voit par récurrence que c'est en rajoutant à chaque générations la forme déjà écrite

$$\delta_n = 2^n, \quad \delta^{n+1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

donc  $\delta \leq 2^\alpha$  ;  $\delta = 2^\alpha$  pour ce que l'on appelle les puissances pleines.

b.  $\delta \geq \mu + 2$  sauf pour  $\delta = 1$  .

Pour  $\delta$  donné, la mutabilité maximum est égale au nombre de signes + dans S quand tous les termes sont des 1, c'est-à-dire  $\delta - 1$ , auquel on retranche 1, car au premier produit il y a toujours équilibre :  $A \times B$  .

c.  $\delta$  est la somme de  $\mu + 1$  puissances, non toutes identiques, de 2 .

En effet procédons par récurrence sur  $\mu$  .

- Pour  $\mu = 0$  :  $\delta = 2^\alpha$ , c'est vrai.

- Pour  $\mu = 1$  : pour avoir une forme de mutabilité 1, il faut ajouter deux formes de mutabilité nulle, mais non conformes, d'où  $\delta = 2^\alpha + 2^\beta$  .

Supposons que, pour tout  $\delta$ , la proposition soit vraie pour  $\mu$  . Démonstration pour  $\mu + 1$  : pour augmenter  $\mu$  de 1, pourvu que  $\mu \neq 1$ , il faut et il suffit que l'on ajoute à la forme de mutabilité  $\mu$  une forme de mutabilité nulle, donc que l'on ajoute à  $\delta$ ,  $2^\gamma$ , et ceci d'après

$$\mu(r + S) = \begin{cases} 2\mu(S) \\ 1 + \mu(r) + \mu(S) \end{cases}$$

d.  $\mu \leq 3 \cdot 2^{\alpha-3} - 1$  .

Soit  $\mu_\alpha$  la mutabilité maximum si  $\alpha$  est donné. Considérons seulement des formes commutatives

$$\mu_0 = \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 1 \quad \mu_3 = 2 \text{ .}$$

Toute forme d'altitude  $\alpha + 1$  est somme de  $S_\alpha$  et de  $S_\beta$ ,  $\beta \leq \alpha$

$$\mu_{\alpha+1} = \begin{cases} 2\mu_\alpha \\ 1 + \mu_\alpha + \mu_\beta \end{cases}$$

comme  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu > \mu_\alpha$  pour  $\alpha > 0$  .

Soit  $\alpha$  toute altitude pour laquelle il existe au moins trois formes distinctes de mutabilité  $\mu_\alpha$ , et soient  $S_1, S_2, S_3$  ces formes.

$$\mu(S_1) = \mu(S_2) = \mu(S_3) = \mu_\alpha > \mu(S).$$

Donc pour  $\alpha + 1$ , il existe au moins trois formes différentes de mutabilité maximum :

$$S_1 + S_2 \quad S_2 + S_3 \quad S_3 + S_1$$

avec  $\mu_{\alpha+1} = 1 + 2\mu_\alpha$ ,  $\alpha \geq 3$ , ou encore  $1 + \mu_{\alpha+1} = 2(1 + \mu_\alpha)$  et  $1 + \mu_3 = 3$ , d'où

$$\mu_\alpha = 3 \cdot 2^{\alpha-3} - 1.$$

Donc

$$\mu \leq 3 \cdot 2^{\alpha-3} - 1.$$

## 5. Réciproques.

Etudions maintenant quelques réciproques.

a. On se donne  $\alpha$  et  $\delta$ .

Peut-on obtenir une forme de degré  $\delta$  donné et d'altitude  $\alpha$  pourvu que l'on ait  $\alpha + 1 \leq \delta \leq 2^\alpha$  ?

- Pour  $\delta = \alpha + 1$ , c'est possible : il suffit d'absorber les facteurs un par un. Il y aura  $\alpha$  générations et  $\alpha + 1$  facteurs.

- Pour  $\delta = 2^\alpha$ , c'est possible aussi (voir plus haut).

Prenons donc  $\alpha + 1 < \delta < 2^\alpha$ . Procédons par récurrence sur  $\delta$  et  $\alpha$  ; pour  $\delta = \alpha + 2$  il suffit d'absorber un terme à la fois sauf à la dernière génération où l'on en absorbe deux.

Exemple :  $\alpha \equiv 3$ ,  $\delta = 5$ , AB ; C ∴ DE

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \delta = \alpha + d \text{ prenons } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \delta = \delta_1 + \delta_2 \text{ avec} \\ \delta_1 = \alpha_1 + d - 1 \\ \alpha_1 + d - 1 < 2^{\alpha_1} \end{array} \right. \quad \delta_2 = \alpha_2 + 1 \quad \text{alors} \quad \delta_1 > \alpha_1, \delta_2 = \alpha_2 + 1.$$

C'est possible d'après les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\delta$  d'après l'hypothèse de récurrence, on construit la forme de degré  $\delta_1 = \alpha_1 + d - 1$  et d'altitude  $\alpha_1$ , et on absorbe les  $\alpha_2 + 1$  facteurs restants en  $\alpha_2$  générations.

b. On se donne  $\delta$  et  $\mu$ .

Peut-on obtenir une forme quand on se donne  $\delta$  et  $\mu$  ?

D'abord, il faut :  $\mu + 2 \leq \delta$  .

D'autre part, on a vu que  $\delta$  est la somme de  $\mu + 1$  puissances de 2 , non toutes identiques si  $\mu$  est  $> 0$  .

Donc, si  $n_\delta$  désigne le nombre de termes de la décomposition de  $\delta$  suivant la base 2 , on doit avoir  $\mu + 1 \geq n_\delta$  , donc enfin

$$n_\delta \leq \mu + 1 \leq \delta - 1 .$$

Pour  $\mu + 1 = n_\delta$  , on peut construire la forme correspondante : si  $\delta = 2^\beta + 2^{\beta-1} + \dots + 2^\gamma$  , la forme cherchée se construit en prenant la forme  $2^\beta$  , à laquelle on adjoint  $2^{\beta-1} \dots 2^\gamma$  ; ces différentes formes étant de mutabilité nulle, on a  $\mu = n_\delta - 1$  .

Exemple :  $AB \cdot CD : EF \quad \delta = 2^n + 2 \quad \mu = 1$  .

Pour  $\mu + 1 = \delta - 1$  , c'est la forme principale.

Pour  $\mu + 1 = n_\delta + \nu$  ,  $0 < \nu < \delta - 1 - n_\delta$  , il est possible de décomposer  $\delta$  en  $\mu + 1$  puissances de 2 , de telle façon que chaque chiffre écrit ne soit pas égal à la somme des précédents.

Voyons-le sur un exemple :

$$\delta = 7 \quad \delta = 2^2 + 2 + 1 \quad 2 \leq \mu \leq 5$$

$\mu = 2$	$\delta = 2^2 + 2 + 1$	$AB \cdot CD : EF \therefore G$
$\mu = 3$	$\delta = 2^2 + 1 + 1 + 1$	$AB \cdot CD : E \therefore F \therefore G$
$\mu = 4$	$\delta = 2 + 1 + 2 + 1 + 1$	$AB \cdot C : DE \therefore F \therefore G$
$\mu = 5$	$\delta = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$AB \cdot C : D \therefore E \therefore F \therefore G$

c. On se donne  $\alpha$  ,  $\delta$  ,  $\mu$  .

Supposons que  $\alpha$  ,  $\delta$  ,  $\mu$  vérifient toutes les conditions trouvées précédemment. Il est facile de voir qu'il n'existe pas toujours de forme répondant à la question.

Exemple : pour  $\alpha = 4$  ,  $\delta = 5$  ,  $\mu = 1$  , il n'en existe pas ; en effet :

$$\delta = 5 = 2^2 + 1 \quad \text{pour } \mu = 1 , \quad AB \cdot CD : E , \quad \alpha = 3$$

$$\delta = 5 \quad \text{pour } \alpha = 4 , \quad AB \cdot C : D \therefore E , \quad \mu = 3 .$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ETHERINGTON (I. H. M.). - On non-associative combinations, Proc. Royal Soc. Edinburgh, t. 59, 1939, p. 153-162.
- [2] ETHERINGTON (I. H. M.). - Genetiv algebras, Proc. Royal Soc. Edinburgh, t. 59, 1939, p. 242-258.

- [3] ETHERINGTON (I. H. M.). - Special train algebras, Quaterl. J. Math., Oxford series, t. 12, 1941, p. 1-8.
- [4] ETHERINGTON (I. H. M.). - Duplication of linear algebras, Proc. Edinburgh math. Soc., t. 6, 1939-1941, p. 222-230.
- [5] RAFFIN (Raymond). - Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs, Généralisations des corps gauches, Thèse Sc. math. Paris. 1951.
- [6] SCHAFER (R. D.). - Structure of genetic algebras, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 121-135.
-