

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES GRAPPY

## Éléments tertiaires d'une $(\mathcal{T})$ -algèbre

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1963-1964), exp. n° 24,  
p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1963-1964\\_\\_17\\_2\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A11_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉLÉMENTS TERTIAIRES D'UNE  $(\mathcal{C})$ -ALGÈBRE

par Jacques GRAPPY

L'objet de cet exposé est de donner une nouvelle présentation de la théorie des éléments tertiaires d'une  $(\mathcal{C})$ -algèbre, généralisant celle des sous-modules primaires d'un module  $M$  sur un anneau  $A$ , commutatif unitaire, donnée par BOURBAKI [1]. Un idéal premier  $\mathcal{P}$  de  $A$  est dit associé à  $M$  si  $\mathcal{P} = \text{Ann}(x)$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \in M$ . On remarque que les idéaux premiers associés à  $M$  ne sont autres que les résiduels essentiels de  $0$ , ce qui permet de définir les idéaux associés à un module sur un anneau non nécessairement commutatif et unitaire, et plus généralement les éléments associés à une  $(\mathcal{C})$ -algèbre. Cela étant, il n'y a plus qu'à transcrire dans le langage des  $(\mathcal{C})$ -algèbres, les démonstrations de BOURBAKI.

Pour les définitions d'une  $(\mathcal{C})$ -algèbre, on se reportera au livre de L. LESIEUR et R. CROISOT [2].

1. Compléments sur les  $(\mathcal{C})$ -algèbres.

Soient  $L$  une  $(\mathcal{C})$ -algèbre, et  $N \subseteq M$  deux éléments de  $L$ . Alors l'intervalle  $[N, M]$ , si l'on pose

$$A \star X = AX + N, \quad \forall A \in \mathcal{C}, \quad \forall X \in [M, N],$$

est muni d'une structure de  $(\mathcal{C})$ -algèbre.

Supposons maintenant que  $L$  soit un treillis modulaire, et soient  $M$  et  $N$  deux éléments de  $L$ . On sait que les treillis  $[M \cap N, M]$  et  $[N, M + N]$  sont isomorphes, l'isomorphisme  $\varphi$  étant défini par

$$X \in [M \cap N, M], \quad \varphi(X) = X + N.$$

On vérifie immédiatement que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\mathcal{C})$ -algèbres.

Dans toute la suite, nous supposerons que  $L$  est une  $(\mathcal{C})$ -algèbre modulaire, c'est-à-dire que  $L$  est un treillis modulaire, faiblement  $\cap$ -continu (rappelons que  $L$  est faiblement  $\cap$ -continu si la relation

$$X \cap \left( \sum_i Y_i \right) = \sum_i (X \cap Y_i)$$

a lieu lorsque les  $Y_i$  forment un ensemble totalement ordonné). Nous supposerons

de plus que  $L$  vérifie la condition :

- (D) L'ensemble des résiduels à gauche, et l'ensemble des résiduels à droite de tout élément  $X \in L$ , vérifient la condition de chaîne ascendante.

## 2. Éléments premiers associés à une $(\mathcal{C})$ -algèbre.

Définition 1. - On appelle résiduel essentiel (de  $0$ ), un résiduel à gauche propre  $0 \cdot X$  tel que

$$0 < Y \subseteq X \implies 0 \cdot X = 0 \cdot Y .$$

PROPOSITION 1. - Tout résiduel à gauche propre maximal (de  $0$ ) est essentiel.

En effet, si  $\mathcal{P} = 0 \cdot X$  est un résiduel propre maximal,  $0 < Y \subseteq X$  implique  $0 \cdot X \subseteq 0 \cdot Y$ , d'où  $\mathcal{P} = 0 \cdot Y$ .

PROPOSITION 2. - Tout résiduel essentiel est premier.

Si  $\mathcal{P} = 0 \cdot X$  est essentiel, et  $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ , avec  $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C} X = 0$  et  $\mathcal{C} X \neq 0$ , on en déduit, puisque  $\mathcal{C} X \subseteq X$ ,

$$\mathcal{B} \subseteq 0 \cdot \mathcal{C} X = \mathcal{P} .$$

Définition. - Soit  $L$  une  $(\mathcal{C})$ -algèbre. Un élément  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$  est dit associé à  $L$  si  $\mathcal{P}$  est un résiduel essentiel. On note  $\text{Ass}(L)$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{C}$  associés à  $L$ .

Si  $M \in L$ , on notera

$$\text{Ass}(M) = \text{Ass}([0, M]) .$$

Si  $N \subseteq M$ , on notera

$$\text{Ass}(M/N) = \text{Ass}([N, M]) .$$

Remarque. - Si  $\mathcal{P} = (0 \cdot X) \in \text{Ass}(L)$ , on a

$$\text{Ass}(X) = \{\mathcal{P}\} .$$

PROPOSITION 3. - Soit  $M \in L$ . On a

$$M = 0 \iff \text{Ass}(M) = \emptyset .$$

Si  $M = 0$ , on a évidemment  $\text{Ass}(M) = \emptyset$ .

Si  $M \neq 0$ , soit  $\mathcal{P}$  maximal dans la famille  $\{0 \cdot X, 0 < X \subseteq M\}$ ; d'après la proposition 1,  $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ .

PROPOSITION 4. - Soient  $N \subseteq M$  deux éléments de  $L$ , alors :

$$\text{Ass}(N) \subseteq \text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(M/N) .$$

La première inclusion est évidente.

Soit  $\rho = 0 \cdot X \in \text{Ass}(M)$ ,  $0 \subset X \subseteq M$ .

1° Si  $X \cap N \neq 0$ , alors  $\rho = 0 \cdot (X \cap N)$  et  $\rho \in \text{Ass}(N)$  ;

2° Si  $X \cap N = 0$ , on a

$$[0, X] \simeq [N, N + X] \subseteq [N, M]$$

d'où

$$\{\rho\} = \text{Ass}(X) \subseteq \text{Ass}\{M/N\}$$

PROPOSITION 5. - Si  $0 = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ,  $Q_i \subseteq M$ , alors  $\text{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}(M/Q_i)$ .

Il suffit de démontrer la proposition pour  $n = 2$ .

Si  $0 = Q_1 \cap Q_2$ , soit  $\rho \in \text{Ass}(M)$ . On sait que

$$\text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(Q_1) \cup \text{Ass}(M/Q_1) .$$

Si  $\rho = (0 \cdot X_1) \in \text{Ass}(Q_1)$ ,  $0 \subset X_1 \subseteq Q_1$ , alors  $X_1 \cap Q_2 = 0$  et

$$[0, X_1] \simeq [Q_2, Q_2 + X_1] \subseteq [Q_2, M] ,$$

d'où

$$\{\rho\} = \text{Ass}(X_1) \subseteq \text{Ass}(M/Q_2) .$$

PROPOSITION 6. - Soit  $M \in L$ , et soit  $\Phi \subseteq \text{Ass}(M)$ . Alors il existe  $N \subseteq M$  tel  
que

$$\text{Ass}(N) = \text{Ass}(M) - \Phi , \quad \text{Ass}(M/N) = \Phi .$$

Soit  $\mathcal{S} = \{N, N \subseteq M, \text{Ass } N \subseteq \text{Ass}(M) - \Phi\}$ .  $\mathcal{S}$  est inductive. Soit en effet  $\{N_i\}_{i \in I}$  une chaîne de  $\mathcal{S}$ ,

$$N = \sum_{i \in J} N_i .$$

Si  $\rho = (0 \cdot X) \in \text{Ass}(N)$ ,  $0 \subset X \subseteq N$ , on ne peut avoir  $N_i \cap X = 0$ ,  $\forall i$ , car alors

$$X = (\sum N_i) \cap X = \sum (N_i \cap X) = 0$$

d'après la propriété de faible intercontinuité. Il existe donc  $i$ ,  $X \cap N_i \neq 0$ , et  $0 \cdot (X \cap N_i) = \rho \in \text{Ass}(N_i)$ . On a donc  $\rho \in (\text{Ass } M - \Phi)$ , d'où  $N \in \mathcal{S}$ .

Soit  $N$  un élément maximal de  $\mathcal{S}$ . Soit  $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M/N)$ . Il existe donc  $F$ ,  $N \subset F \subseteq M$ ,  $\mathcal{P} = N \cdot F$ , et  $\mathcal{P} = \text{Ass}(F/N)$ . On a alors

$$\text{Ass}(F) \subseteq \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(F/N) \subseteq (\text{Ass } M - \Phi) \cup \{\mathcal{P}\}.$$

$N$  étant maximal dans  $\mathcal{S}$ , il en résulte  $\mathcal{P} \in \Phi$ , d'où  $\text{Ass}(M/N) \subseteq \Phi$ . La proposition résulte immédiatement de la proposition 4.

**THÉORÈME 1.** - Soit  $M \in L$ . Il existe une suite  $M_0 = (0) \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$  vérifiant

$$\text{Ass}(M_{i+1}/M_i) = \{\mathcal{P}_{i+1}\} = \{(M_i \cdot M_{i+1})\}.$$

Soit  $\mathcal{P}_1$  un résiduel à gauche propre maximal de  $0$ , et  $M_1 = 0 \cdot \mathcal{P}_1$ . On a  $\mathcal{P}_1 = 0 \cdot M_1$ , et si  $0 \subset X \subseteq M_1$ ,  $\mathcal{P}_1 = 0 \cdot M_1 = 0 \cdot X$ , car  $\mathcal{P}_1$  est maximal. Il en résulte

$$\{\mathcal{P}_1\} = \text{Ass}(M_1) = \{(0 \cdot M_1)\}.$$

$M_i$  étant supposé défini, si  $M_i \neq M$ , en considérant  $[M_i, M]$ , on construit de même  $\mathcal{P}_{i+1} = M_i \cdot M_{i+1}$  tel que  $\text{Ass}(M_{i+1}/M_i) = \{\mathcal{P}_{i+1}\}$ ,

$$M_{i+1} = M_i \cdot \mathcal{P}_{i+1} = 0 \cdot (\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{i+1}).$$

La condition (D) étant vérifiée, il existe donc un entier  $n$  tel que  $M_n = M$ .

**COROLLAIRE.** - Pour tout  $M \in L$ ,  $\text{Ass}(M)$  est fini.

En effet, avec les notations du théorème 1

$$\text{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{\text{Ass}(M_i/M_{i-1})\} = \bigcup_{i=1}^n \{\mathcal{P}_i\}.$$

### 3. Éléments tertiaires. Décomposition en éléments tertiaires.

**Définition.** - Soit  $U$  le plus grand élément de la  $(\mathcal{C})$ -algèbre  $L$ .  $Q \in L$  est tertiaire si  $\text{Ass}(U/Q) = \{\mathcal{P}\}$ .

On dit aussi que  $Q$  est  $\mathcal{P}$ -tertiaire.

**PROPOSITION 7.** - L'intersection d'un nombre fini d'éléments  $\mathcal{P}$ -tertiaires est  $\mathcal{P}$ -tertiaire.

En effet, si  $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ,

$$\text{Ass}(U/Q) \subseteq \bigcup \text{Ass}(U/Q_i) = \{\mathcal{P}\}.$$

**THÉOREME 2.** - Soit  $N \in L$ . Alors il existe des éléments  $\mathcal{P}$ -tertiaires :  $Q(\mathcal{P})$  tels que

$$N = \bigcap_{\mathcal{P} \in \text{Ass}(U/N)} Q(\mathcal{P}) .$$

On peut supposer  $N = 0$ , en considérant  $U/N$ . Alors, d'après la proposition 6, pour tout  $\mathcal{P} \in \text{Ass}(L)$ , il existe  $Q(\mathcal{P})$  vérifiant

$$\text{Ass}(U/Q(\mathcal{P})) = \{\mathcal{P}\} , \quad \text{Ass}(Q(\mathcal{P})) = \text{Ass}(L) - \{\mathcal{P}\} .$$

Soit  $S = \bigcap_{\mathcal{P} \in \text{Ass}(L)} Q(\mathcal{P})$ .  $\text{Ass}(S) \subseteq \text{Ass}(Q(\mathcal{P}))$  pour tout  $\mathcal{P}$ , d'où

$$\text{Ass}(S) = \emptyset \quad \text{et} \quad S = 0$$

d'après la proposition 3.

**Définition.** - Une décomposition  $N = \bigcap_{i=1}^n Q_i$  en éléments  $Q_i$ ,  $\mathcal{P}_i$ -tertiaires, est dite réduite si

$$1^\circ \quad i \neq j \implies \mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_j ;$$

$$2^\circ \quad \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Q_j \not\subseteq Q_i .$$

**THÉOREME 3.** - Une décomposition  $N = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ , en éléments  $Q_i$ ,  $\mathcal{P}_i$ -tertiaires est réduite si et seulement si les  $\mathcal{P}_i$  sont distincts deux à deux, et appartiennent à  $\text{Ass}(U/N)$ . On a alors :

$$(1) \quad \text{Ass}(U/N) = \bigcup_{i=1}^n \{\mathcal{P}_i\} ;$$

$$(2) \quad \text{Ass}(Q_i/N) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \{\mathcal{P}_j\} .$$

a. Conditions suffisantes. - Si l'on avait  $N = \bigcap_{j \neq i} Q_j$ , il en résulterait  $\text{Ass}(U/N) \subseteq \bigcup_{j \neq i} \{\mathcal{P}_j\}$ . Or par hypothèse  $\mathcal{P}_i \in \text{Ass}(U/N)$ . La décomposition est donc réduite.

b. Conditions nécessaires. - Considérons  $S_i = \bigcap_{j \neq i} Q_j$ . On a  $S_i \neq N$ ,  $S_i \cap Q_i = N$ , d'où

$$[N, S_i] \simeq [Q_i, Q_i + S_i] \subseteq \{Q_i, U\} ,$$

et

$$\text{Ass}(S_i/N) = \{\mathcal{P}_i\} = \text{Ass}(U/Q_i) \subseteq \text{Ass}(U/N) .$$

L'égalité (1) résulte alors de  $\text{Ass}(U/N) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{\rho_i\}$ . De  $N = \bigcap_{i \neq j} (Q_j \cap Q_i)$ , on déduit

$$\text{Ass}(Q_i/N) \subseteq \bigcup_{j \neq i} \text{Ass}(Q_i/Q_j \cap Q_i) = \bigcup_{j \neq i} \text{Ass}(Q_i + Q_j/Q_j) = \bigcup_{j \neq i} \{\rho_j\}.$$

L'égalité (2) résulte alors de

$$\text{Ass}(U/N) \subseteq \text{Ass}(U/Q_1) \cup \text{Ass}(Q_i/N).$$

#### 4. Radical tertiaire.

Définition. - Soit  $N \in L$ . On appelle radical tertiaire de  $N$  :

$$R_3(N) = \bigcap_{\rho \in \text{Ass}(U/N)} \rho.$$

PROPOSITION 8. - Soit  $\alpha \in \mathcal{C}$ . On a :

$$\alpha \subseteq R_3(N) \iff \forall X \not\subseteq N, \exists Y \subseteq X, Y \not\subseteq N, \alpha Y \subseteq N.$$

On peut supposer  $N = 0$ , car on peut exprimer une forme équivalente de la condition :

$$\forall X \supset N, \exists Y \subseteq X, Y \supset N, \alpha Y \subseteq N.$$

Condition nécessaire. - Soit  $X \neq 0$ , il existe  $0 \subset Y \subseteq X$  tel que  $\rho = (0 \cdot Y) \in \text{Ass}(L)$ . On a alors

$$R_3(0) \cdot Y \subseteq \rho \cdot Y = 0.$$

Condition suffisante. - Soit  $\alpha$  vérifiant la condition, et soit  $\rho = (0 \cdot X) \in \text{Ass}(L)$ . Puisque  $X \neq 0$ , il existe  $0 \subset Y \subseteq X$  avec  $\alpha Y = 0$ , soit

$$\alpha \subseteq 0 \cdot Y = 0 \cdot X.$$

On a donc  $\alpha \subseteq \rho$ ,  $\forall \rho \in \text{Ass}(L)$ , d'où  $\alpha \subseteq R_3(0)$ .

Remarque. - On peut expliciter de façons équivalentes la condition donnée à la proposition 8. On a successivement :

$$\begin{aligned} \alpha \subseteq R_3(N) &\iff \{\forall X \not\subseteq N, \exists Y \not\subseteq N, Y \not\subseteq X, Y \subseteq N \cdot \alpha\} \\ &\iff \{\forall X \not\subseteq N, \exists Y \not\subseteq N, Y \not\subseteq X, (N \cdot \alpha) \cap X \not\subseteq N\} \\ &\iff \{(N \cdot \alpha) \cap X = N \implies X = N\}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 9. - Un élément  $Q \in L$  est tertiaire si et seulement s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

$$(1) \quad \alpha X \subseteq Q, \quad X \not\subseteq Q \implies \alpha \subseteq R_3(Q);$$

$$(2) \quad (Q \cdot \alpha) \supset Q \implies \alpha \subseteq R_3(Q);$$

$$(3) \quad (Q \cdot \alpha) \supset Q, \quad (Q \cdot \alpha) \cap X = Q \implies X = Q.$$

Soit  $Q$  tertiaire, et  $\alpha X \subseteq Q$ ,  $X \not\subseteq Q$ . On peut supposer  $X \supset Q$  (en considérant  $Q + X$ ). Il existe alors  $Q \subset Y \subseteq X$  tel que  $\{\rho\} = \text{Ass}(U/Q) = \{Q \cdot Y\}$ .

On a donc

$$\alpha \subseteq Q \cdot X \subseteq Q \cdot Y = \rho = R_3(Q).$$

Supposons que  $Q$  vérifie (1), et soit  $\rho \in \text{Ass}(U/Q)$ . Il existe donc  $X \supset Q$ ,  $\rho X \subseteq Q$ . Il en résulte :

$$\rho \subseteq R_3(Q),$$

d'où

$$\rho = R_3(Q),$$

et  $Q$  est  $\rho$ -tertiaire.

(2) est trivialement équivalente à (1).

(3) équivaut à (2) d'après la caractérisation de  $R_3(Q)$  vue en remarque.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).
- [2] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémoires des Sciences mathématiques, 154).
-