Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Gérard Lallement

Homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 14, p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A3_0>

16 mars 1964

HOMOMORPHISMES D'UN DEMI-GROUPE SUR UN DEMI-GROUPE COMPLÈTEMENT 0-SIMPLE

par Gérard LALLEMENT

1. Introduction.

Les demi-groupes complètement simples sont apparus en théorie des demi-groupes, avec la détermination par SUŠKEVIČ de la structure du noyau (idéal bilatère minimal) d'un demi-groupe fini (voir [2], Appendice A, p. 207). A la suite des travaux de REES [15] et de CLIFFORD [1], la définition adoptée pour un demi-groupe complètement 0-simple est habituellement la suivante :

DÉFINITION A.

(a) C'est un demi-groupe D qui est 0-simple ($D^2 \neq 0$ et 0 est le seul idéal bilatère propre).

(b) D possède au moins un idempotent primitif e , c'est-à-dire tel que

$$\forall f \in D : \quad f^2 = f \ , \quad ef = fe = f \Rightarrow e = f \quad \text{ou} \quad f = 0 \ .$$

Pour les demi-groupes complètement-simples, les restrictions concernant le 0 dans la définition précédente disparaissent. Rappelons le théorème de Rees, déterminant la structure (modulo celle d'un groupe) d'un demi-groupe complètement 0-simple.

THÉORÈME B. - Un demi-groupe est complètement 0-simple, si et seulement s'il est isomorphe à un demi-groupe de matrices de Rees régulier, sur un groupe avec 0 ([2], Théorème 3.5). Donc

$$D \simeq \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P) = \{(a ; i , \lambda) ; \quad a \in G , \quad i \in I , \quad \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$$

avec

$$(a ; i , \lambda).(b ; j , \mu) = (ap_{\lambda j} b ; i , \mu) \quad \text{si} \quad p_{\lambda j} \neq 0 \ , \quad = 0 \quad \text{si} \quad p_{\lambda j} = 0$$

et

$$(a ; i , \lambda).0 = 0.(a ; i , \lambda) = 0$$

(les $p_{\lambda j}$ sont les entrées de la matrice P sur G^0 de format $\Lambda \times I$).

Outre son intérêt en théorie des représentations, la question des homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement [0]-simple, apparaît comme un cas particulier dans l'étude des homomorphismes φ suivants :

a) Cas où $\varphi(D)$ est réunion de groupes : $\varphi(D)$ est alors un demi-treillis de demi-groupes complètement simples ([2], Théorème 4.6).

b) Cas où $\varphi(D)$ est réunion de radicaux de groupes : Si $\varphi(D)$ est de plus 0-simple alors il est complètement 0-simple ([2], Théorème 2.55).

Compte tenu du fait qu'un demi-groupe complètement 0-simple vérifie une forme affaiblie de la règle de simplification (§ 2), j'ai été amené à représenter les homomorphismes envisagés, à l'aide d'intersections d'équivalences principales définies par certaines familles remarquables de complexes (§ 3 et § 4). L'une de ces familles, qu'on peut qualifier de "normale", par analogie avec le cas des homomorphismes d'un demi-groupe sur un groupe, possède des propriétés qui généralisent celles des sous-demi-groupes normaux de [5], p. 255. Une caractérisation plus commode de cette famille peut être obtenue en considérant le complexe réunion des sous-demi-groupes qui la composent (§ 6). Les § 7 et § 8 sont consacrés à des applications de l'étude générale.

2. Deux systèmes de définition des demi-groupes complètement 0-simple.

Les deux systèmes qui suivent résultent d'un affaiblissement des axiomes classiques de définition des groupes; à ces propriétés affaiblies des groupes s'ajoute une propriété convenable concernant la présence éventuelle du 0 .

DÉFINITION 2.1. - Un idéal bilatère I d'un demi-groupe D est dit premier [10] si

$$\forall\, a\,,\, b \in D\,,\ aDb \subseteq I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I\,.$$

Signalons qu'il y a équivalence entre :

(a) I est premier,

(b) $\forall\, M\,,\, N$ idéaux de D : $M.N \subseteq I \Rightarrow M \subseteq I$ ou $N \subseteq I$,

(c) $\forall\, (a)\,,\,(b)$ idéaux principaux de D : $(a)(b) \subseteq I \Rightarrow a$ ou $b \in I$.

THÉORÈME 2.1. - Un demi-groupe est complètement 0-simple si et seulement s'il vérifie les systèmes équivalents (I) ou (II) :

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} 1^\circ \ \ D \text{ est un demi-groupe avec zéro premier,} \\ 2^\circ \ \ \forall\, a \in D\ ,\ \exists\, e\ ,\ f \in D\ :\ ea = af = a\ , \\ 3^\circ \ \ \forall\, a \neq 0\ ,\ e\ ,\ f \text{ vérifiant } 2^\circ,\ \exists\, a' \text{ unique tel que } aa' = e \text{ et} \\ \qquad a'a = f\ . \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} 1^\circ \ \ D \text{ est un demi-groupe avec zéro premier,} \\ 2^\circ \ \ \forall\, a \in D\ ,\ a \neq 0\ ,\ \exists\, x \in D \text{ tel que } ax \text{ soit un idempotent non nul,} \\ 3^\circ \ \ \forall\, a\ ,\ b\ ,\ x\ ,\ y \in D\ : \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} ax = bx \neq 0 \\ \text{et} \\ ya = yb \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = b\ .$$

Un demi-groupe est dit <u>inversé</u> s'il vérifie (II), 2°, faiblement 0-simplifiable s'il vérifie (II), 3°.

<u>Démonstration.</u> - On montrera que (I) $\Longrightarrow$ (définition A) , qu'un demi-groupe régulier de matrices de Rees vérifie (II) et enfin que (II) $\Longrightarrow$ (I) .

(a) (I) $\Longrightarrow$ A . - Pour montrer que D est 0-simple, on établit que : $\forall\, a \in D\ ,\ a \neq 0\ :\ DaD = D$ (voir [2], lemme 2.28). Soient $b \in D\ ,\ b \neq 0$, $(e\ ,\ f)$ un système d'éléments neutres pour a , $(g\ ,\ h)$ un système d'éléments neutres pour b [(I) 2°]. $e\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h$ sont des idempotents non nuls : pour e par exemple $e^2 = e.aa' = aa' = e$. Comme $g \neq 0$ et $a \neq 0$, d'après (I) 1°, il existe $x \in D$ tel que $gxa \neq 0$. En utilisant à nouveau (I) 1°, il existe $y \in D$ tel que $gxayh = A \neq 0$. On a : $gA = Ah = A$; il existe donc A' tel que $AA' = g$ et $A'A = h$. Comme $gb = b = bh$,

$$AA'b = gb = b$$

soit $uav = b$ avec $u = gx$ et $v = yhA'b$.

Montrons que D a un idempotent primitif, et même que tous les idempotents non nuls le sont. Soit $f \neq 0$ tel que $f^2 = f$, $ef = fe = f$ pour e idempotent. $ef = ff = f$: donc, d'après (I) 3°, il existe x unique, tel que $fx = e$ et $xf = f$.

Or $fxf = ef = f$ et $ffx = fx = e$; il en résulte $fx = x$, soit

$$e = x \text{ et } ef = fe = f = e\ .$$

(b) Soit $D = \mathfrak{M}^0(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ P)$ un demi-groupe régulier de matrices de Rees : il vérifie (II). En effet soit $x = (a\ ;\ i\ ,\ \lambda)$ et $y = (b\ ;\ j\ ,\ \mu)$ avec a et b

dans G . La matrice P étant régulière, on peut trouver $k \in I$ et $\varkappa \in \Lambda$ tels que $p_{\lambda k} \neq 0$ et $p_{\varkappa j} \neq 0$.

En prenant $z = (c \,;\, k \,,\, \varkappa)$ avec c quelconque dans G , on a bien $xzy \neq 0$ et le 0 est premier. En prenant maintenant ν tel que $p_{\nu i} \neq 0$ et $c = p_{\lambda k}^{-1} a^{-1} p_{\nu i}^{-1}$, et en posant $t = (c \,;\, k \,,\, \nu)$, on vérifie que xt est un idempotent non nul, donc D est inversé. Enfin si :

$$(a \,;\, i \,,\, \lambda)(u \,;\, j \,,\, \mu) = (b \,;\, i' \,,\, \lambda')(u \,;\, j \,,\, \mu) \neq 0$$

et

$$(u' \,;\, j' \,,\, \mu')(a \,,\, i \,,\, \lambda) = (u' \,;\, j' \,,\, \mu')(b \,;\, i' \,,\, \lambda') \neq 0$$

alors

$$i = i' \,, \quad \lambda = \lambda' \quad \text{et} \quad a = b \,,$$

ce qui démontre que D est faiblement 0-simplifiable.

(c) (II) $\Rightarrow$ (I) . - Pour la propriété (I) 2°, d'après (II) 2° :

$$\forall\, a \neq 0 \,, \quad \exists\, x \ \text{ tel que } \ ax = i \neq 0 \qquad (i^2 = i) \,.$$

En posant $y = xax$, on vérifie sans peine que ay et ya sont des idempotents non nuls e et f .

De $ayay = ay \neq 0$ et $yaya = ya \neq 0$ résulte, d'après (II) 3°, $aya = a$, c'est-à-dire $ea = af = a$.

Pour montrer (I) 3°, supposons que $ea = af = a \neq 0$. D'après ce qui précède pour $a \neq 0$, il existe un y tel que $ay = i = i^2 \neq 0$ et $ya = j = j^2 \neq 0$. On a

$ei = eay = ay = i$, donc $ie.i = ei = i \neq 0$ et $i.ie = ie \neq 0$, d'après (II) 3°, $ie = e$.

On démontre de même que $fj = f$. En posant $a' = fye$ on vérifie que $aa' = e$, $a'a = f$. L'unicité de a' résulte évidemment de (II) 3°.

Les propositions 1°, 2° et 3° dans chacun des systèmes (I) et (II) sont indépendantes ; en effet :

(a) Le demi-groupe multiplicatif des entiers naturels avec 0 , vérifie (I) 1° et 2°, mais non (I) 3° ;

(b) Un demi-groupe cyclique infini $\langle x \rangle$, auquel on adjoint 0 , vérifie (I) 1° et 3°, mais non (I) 2°. Remarquons que les demi-groupes sans zéro, avec un idempotent au moins, et vérifiant (I) 3°, sont des demi-groupes à noyau complètement simple d'un type particulier ;

(c) Le demi-groupe D , dont [11] la table est :

	e	f	0
e	e	0	0
f	0	f	0
0	0	0	0

vérifie (I) 2° et 3°, mais non (I) 1°, car $eDf = 0$.

(d) Soit $D = \{e , f\}$ avec $xy = e$. D^0 vérifie (II) 1° et 2°, mais non (II) 3° ;

(e) L'exemple de (a) montre que (II) 1° et 3° n'entraîne pas (II) 2° ;

(f) L'exemple de (c) montre enfin que (II) 2° et 3° n'entraîne pas (II) 1°..

Dans la suite, nous utiliserons essentiellement le système d'axiomes (II). A propos du système (I), indiquons seulement qu'il permet d'effectuer une étude élémentaire des demi-groupes complètement 0-simples, sans faire intervenir explicitement des conditions minimales ou les équivalences de Green. Dans certaines démonstrations, son utilisation évite le recours au demi-groupe de matrices de Rees associé à un demi-groupe complètement 0-simple. Comme conséquences évidentes du système (II), indiquons les corollaires suivants :

COROLLAIRE 2.1. - Un demi-groupe faiblement simplifiable, avec un seul idempotent net à droite (ou à gauche), est un groupe.

COROLLAIRE 2.2. - Un demi-groupe périodique (en particulier un demi-groupe fini) est complètement simple, si et seulement s'il est faiblement simplifiable (ou bien, ce qui est équivalent, $ax = bx$ et $xa = xb \implies a = b$, propriété facilement vérifiable sur la table).

Le tableau suivant indique la position de la simplifiabilité faible, par rapport à quelques autres formes affaiblies de la règle de simplification (R. S.) :

R. S. bilatère

R. S. à gauche R. S. à droite

Simplifiabilité faible

$a^2 = ax \implies a = x$ (complètement intègre à gauche)

$a^2 = xa \implies a = x$ (complètement intègre à droite)

Séparativité
$(xy = x^2 = y^2 \implies x = y)$

Réductivité à gauche
$(xa = xb\ ,\ \forall\, x \implies a = b)$

Réductivité à droite
$(ax = bx\ ,\ \forall\, x \implies a = b)$

Réductivité faible
$ax = bx$ et $ya = yb\ ,\ \forall\, x\ ,\ y \implies a = b$

3. Familles de complexes définissant des homomorphismes.

Dans la suite de l'exposé nous utiliserons les équivalences $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{H}$ de Green.

$a\ \mathcal{L}\ b \iff D^1 a = D^1 b$; $a\ \mathcal{R}\ b \iff aD^1 = bD^1$; $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ (voir [2], 2.1.).

Soit D un demi-groupe, ayant une image homomorphe complètement 0-simple $\overline{D} = \varphi(D)$. L'équivalence $\mathcal{H}$ de Green, définie sur $\overline{D}$, le décompose en $\mathcal{H}$-classes ; certaines d'entre elles sont des sous-groupes : elles sont appelées " $\mathcal{H}$-classes-groupes " ; les autres, dans lesquelles le produit de 2 éléments est $\overline{0}$, seront dites " $\mathcal{H}$-classes-zéro " [14]. Dans $\overline{D}$, considérons un système de représentants des $\mathcal{H}$-classes-groupes . L'image inverse saturée de cet ensemble, dans D , est la réunion d'une famille de complexes. Une telle famille sera appelée "famille représentative dans D des $\mathcal{H}$-classes-groupes de $\overline{D}$" ou brièvement "famille représentative". L'objet de ce qui suit est de montrer que l'homomorphisme φ est entièrement déterminé par la donnée d'une famille représentative.

Dans un demi-groupe quelconque, soit $\mathcal{K}$ une famille de complexes K_i $(i \in I)$ non vides. Désignons par P_{K_i} (resp. ${}_{K_i}P$) l'équivalence principale [3] à droite (resp. à gauche) définie par K_i . Posons :

$$P_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i \in I} P_{K_i} \quad \text{et} \quad {}_{\mathcal{K}}P = \bigcap_{i \in I} {}_{K_i}P$$

et enfin

$$P(\mathcal{K}) = P_{\mathcal{K}} \cap {}_{\mathcal{K}}P \ .$$

THÉORÈME 3.1. - *Si* φ *est un homomorphisme de* D *sur un demi-groupe complètement 0-simple* $\overline{D}$ *, et si* $\mathcal{K}$ *est une famille représentative dans* D *des* $\mathcal{H}$*-classes-groupes de* $\overline{D}$ *, l'équivalence d'homomorphisme coïncide avec* $P(\mathcal{K})$.

Avant de démontrer ce théorème nous établirons 2 lemmes :

LEMME 3.1. - *Si* $\mathcal{K}$ *est une famille de complexes saturés pour une congruence* $\mathcal{R}$ *, alors* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{K})$.

Démonstration. - Supposons : $a \mathcal{R} b$. Si $ax \in K_i \in \mathcal{K}$, comme $ax \mathcal{R} bx$ et que K_i est saturé pour $\mathcal{R}$, $bx \in K_i$. Donc $ax \in K_i \Rightarrow bx \in K_i$. Pour l'implication réciproque, même démonstration. $\forall\, i \in I$, $K_i \,.^{\bullet}\, a = K_i \,.^{\bullet}\, b$, et de même $K_i \,^{\bullet}.\, a = K_i \,^{\bullet}.\, b$. En définitive : $a\, P(\mathcal{K})\, b$.

LEMME 3.2. - *Soit* H *un ensemble de représentants des* $\mathcal{H}$*-classes-groupes d'un demi-groupe complètement 0-simple* D *; pour tout* a *non nul dans* D *, il existe* k *(resp.* ℓ *) dans* H *, tel que l'équation* $ax = k$ *(resp.* $ya = \ell$ *) ait au moins une solution.*

Démonstration. - Pour $a \neq 0$, il existe e , a , f et a' tels que

$$ea = af = a \ , \quad aa' = e \quad \text{et} \quad a'a = f \qquad \text{(Système I)}.$$

Soit k (resp. ℓ) le représentant de la $\mathcal{H}$-classe de e (resp. f) ; l'équation $ax = k$ (resp. $ya = \ell$) a pour solution $x = a'k$ (resp. $y = \ell a'$).

Remarques :

(a). Si $a = 0$, $\forall\, k \in H$, $ax = k$ n'a pas de solution (de même $ya = \ell$);

(b). S'il existe x , y tels que $ax = k$, $ya = \ell$, $bx = k$, $yb = \ell$, alors

$$a = b \qquad \text{(Système II)}.$$

Démonstration du théorème 3.1. - Soient φ un homomorphisme de D sur $\overline{D}$ et $\mathcal{K}$ une famille représentative dans D . D'après le lemme 3.1, il suffit de démontrer que $P(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{R}_\varphi$ ($\mathcal{R}_\varphi$ est l'équivalence d'homomorphisme). Supposons donc que $a\, P(\mathcal{K})\, b$.

- Si $\overline{a} = \overline{0}$: $\forall\, i \in I$, $K_i \,.^{\bullet}\, a = \emptyset$ (remarque (a) suivant le lemme 3.2) et $K_i \,^{\bullet}.\, a = \emptyset$, donc $K_i \,.^{\bullet}\, b = \emptyset$, $K_i \,^{\bullet}.\, b = \emptyset$, et $\overline{b} = \overline{0}$.

- Si $\overline{a} \neq \overline{0}$: d'après le lemme 3.2, il existe $\overline{x}$ et $\overline{k}$ tels que $\overline{ax} = \overline{k}$, $\overline{y}$ et $\overline{\ell}$ tels que $\overline{ya} = \overline{\ell}$. Soient K et L les complexes de $\mathcal{K}$ ayant pour images par φ respectivement $\overline{k}$ et $\overline{\ell}$: $ax \in K$ et $ya \in L$, en prenant x et y tels que

$\varphi(x) = \overline{x}$ et $\varphi(y) = \overline{y}$. D'après l'hypothèse, $bx \in K$ et $yb \in L$, d'où $\overline{b}\overline{x} = \overline{k}$ et $\overline{y}\overline{b} = \overline{\ell}$. De la remarque (b) suivant le lemme 3.2 résulte

$$\overline{a} = \overline{b} \; .$$

Dans le cas où $\overline{D}$ est un groupe avec 0 (demi-groupe complètement 0-simple avec un seul idempotent non nul), on retrouve le fait que l'équivalence d'homomorphisme est définie par l'une quelconque de ses classes, autre que la classe du zéro ([5] V, B). Le résultat énoncé dans le théorème 3.1 a déjà été obtenu par PRESTON [13] dans le cas particulier, où la famille $\mathcal{K}$ est formée des sous-demi-groupes images inverses des idempotents non nuls de $\overline{D}$.

Le théorème suivant établit les relations existant entre diverses familles représentatives.

THÉORÈME 3.2. - Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont deux familles représentatives dans D des $\mathcal{H}$-classes-groupes de $\overline{D}$:

1° $\forall K \in \mathcal{K}$, $\exists K' \in \mathcal{K}'$ unique, a et $b \in D$:

$$K = (K' \;.\!^{\bullet}\; a) \cap (K' \;^{\bullet}\!.\; b) \; .$$

2° Si $\mathcal{K}' = \mathbb{S}$ est la famille des sous-demi-groupes images inverses des idempotents non nuls de $\overline{D}$: $\forall K \in \mathcal{K}$, $\exists S \in \mathbb{S}$, S unique , $\exists a \in D$ tels que $K = (S \;.\!^{\bullet}\; a) \cap (S \;^{\bullet}\!.\; a)$; d'autre part, $\forall k \in K$

$$S = (K \;.\!^{\bullet}\; k) \cap (K \;^{\bullet}\!.\; k) \; .$$

Démonstration. - Soient $K \in \mathcal{K}$ et $\varphi(K) = \overline{k}$. Soit K' le complexe de la famille $\mathcal{K}'$ représentatif de la $\mathcal{H}$-classe de $\overline{k}$:

$$\varphi(K') = \overline{k'} \quad \text{et} \quad \overline{k} \,\mathcal{H}\, \overline{k'} \; .$$

Il existe $\overline{a}$ et $\overline{b}$ dans $\overline{D}$ tels que $\overline{a}\overline{k} = \overline{k}\overline{b} = \overline{k'}$. Si a et b sont des éléments de D d'image $\overline{a}$ et $\overline{b}$, $\forall k \in K$, $ak \in K'$ et $kb \in K'$, donc

$$K \subseteq (K' \;.\!^{\bullet}\; a) \cap (K' \;^{\bullet}\!.\; b) \; .$$

Réciproquement si $x \in (K' \;.\!^{\bullet}\; a) \cap (K' \;^{\bullet}\!.\; b)$,

$$\overline{a}\overline{x} = \overline{k'} \quad \text{et} \quad \overline{x}\overline{b} = \overline{k'} \; ,$$

d'où ((II, 3°) $\overline{x} = \overline{k}$ et $x \in K$.

Le 2° du théorème est une spécialisation du 1°.

Ce théorème met en évidence le rôle "normal" joué par la famille $\mathbb{S}$: ce rôle sera précisé par la suite.

4. Equivalences faiblement simplifiables et caractérisation de la famille $\mathcal{S}$.

Soit $\mathcal{K}$ une famille de complexes K_i $(i \in I)$ non vides.

DÉFINITION 4.1. - $\mathcal{K}$ est une famille régulière si $P(\mathcal{K})$ est régulière.
C'est le cas par exemple de la famille $\mathcal{K}$ formée d'un seul complexe symétrique [3].

DÉFINITION 4.2. - $\mathcal{K}$ est une famille forte si

$$(K_i \mathbin{.^{\bullet}} a) \cap (K_i \mathbin{.^{\bullet}} b) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad (K_j \mathbin{^{\bullet}.} a) \cap (K_j \mathbin{^{\bullet}.} b) \neq \emptyset ,$$

pour un couple i , j au moins, implique $a \; P(\mathcal{K}) \; b$.

DÉFINITION 4.3. - Le résidu à droite $W_{\mathcal{K}}$ de la famille $\mathcal{K}$ est l'ensemble :

$$W_{\mathcal{K}} = \{a \; ; \; a \in D_1 \; : \; \forall \, i \in I \, , \; K_i \mathbin{.^{\bullet}} a = \emptyset\} .$$

On a $W_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i \in I} W_{K_i} = W_H$ si $H = \bigcup_{i \in I} K_i$. Si $W_{\mathcal{K}} = \emptyset$, c'est-à-dire si H est net à droite dans D , on dira que la famille $\mathcal{K}$ est nette à droite.

On définit de même le résidu à gauche ${}_{\mathcal{K}}W$ et une famille nette à gauche.

Si ${}_{\mathcal{K}}W = W_{\mathcal{K}}$, la famille est dite équirésiduelle, et nette si ${}_{\mathcal{K}}W = W_{\mathcal{K}} = \emptyset$.

Une équivalence R sur un demi-groupe D est dite faiblement simplifiable si $ax \; R \; bx$ et $ya \; R \; yb$ entraîne $a \; R \; b$. Les deux théorèmes suivants permettent de caractériser les congruences faiblement simplifiables. Ils généralisent dans une certaine mesure les théorèmes de [17], chapitre III, qui caractérisent les équivalences simplifiables. Comme les démonstrations sont très voisines, nous ne donnerons que les énencés.

THÉORÈME 4.1. - Si la famille $\mathcal{K}$ est forte et nette, l'équivalence $P(\mathcal{K})$ est faiblement simplifiable, et toutes les classes sont les complexes $(K_i \mathbin{.^{\bullet}} a) \cap (K_j \mathbin{^{\bullet}.} b)$ non vides.

THÉORÈME 4.2. - Si R est une congruence faiblement simplifiable, toute famille de R-classes est forte. Pour toute famille $\mathcal{K}$ de R-classes qui est nette, $R = P(\mathcal{K})$.

Ces deux théorèmes montrent que les congruences faiblement-simplifiables coïncident avec les congruences $P(\mathcal{K})$ définies à l'aide de familles $\mathcal{K}$, régulières, fortes et nettes.

On peut se proposer d'étendre ces résultats à la caractérisation des congruences R telles que D/R soit un demi-groupe faiblement 0-simplifiable.

Pour cela nous dirons qu'<u>une équivalence</u> R <u>est faiblement</u> W-<u>simplifiable si</u> W <u>est une</u> R-<u>classe , et si</u> :

$$\left.\begin{cases} ax\ R\ bx\ , & ax \text{ et } bx \notin W \\ ya\ R\ yb\ , & ya \text{ et } yb \notin W \end{cases}\right\} \Longrightarrow a\ R\ b\ .$$

Pour de telles équivalences, on établit facilement 2 autres théorèmes :

THÉORÈME 4.1'. - <u>Si la famille</u> $\mathcal{K}$ <u>est forte, équirésiduelle, de résidu</u> W , <u>alors</u> $P(\mathcal{K})$ <u>est une équivalence faiblement</u> W-<u>simplifiable, et toutes les classes distinctes de</u> W <u>sont les complexes</u> $(K_i \cdot\!\cdot\, a) \cap (K_j \cdot\!\cdot\, b)$ <u>non vides</u>.

THÉORÈME 4.2'. - <u>Si</u> R <u>est une congruence faiblement</u> W-<u>simplifiable, toute famille de</u> R-<u>classes ne contenant pas</u> W <u>est forte. Pour toute famille</u> $\mathcal{K}$ <u>de</u> R-<u>classes ne contenant pas</u> W , <u>équirésiduelle, de résidu</u> W , <u>s'il en existe</u>, $R = P(\mathcal{K})$.

La restriction "s'il en existe" n'a pas lieu d'être, dans le théorème 4.2, puisque la famille de toutes les R-classes est nette. Ici, elle peut se lever de la manière suivante : S'il existe une famille de complexes ne contenant pas W , équirésiduelle, de résidu W , alors W est le résidu d'un complexe équirésiduel H disjoint de W . Réciproquement, si W est le résidu d'un tel complexe H , alors la famille des R-classes des éléments de H ne contient pas W , est équirésiduelle et a pour résidu W . Or <u>une condition nécessaire et suffisante pour que</u> W <u>soit résidu d'un complexe</u> H <u>équirésiduel, disjoint de</u> W , <u>est que</u> W <u>soit un idéal fortement large</u> ([8], déf. 1.2 du chapitre I) c'est-à-dire tel que

$$aD \subseteq W \implies a \in W \quad \text{et} \quad Da \subseteq W \implies a \in W\ .$$

En effet, on vérifie facilement que si W est fortement large, il est résidu de $D - W$; réciproquement, si W est résidu de H : $W = W_H = {}_H W$ avec $W \cap H = \emptyset$, alors W est aussi résidu de $K = D - W$, donc il est fortement large. Comme conséquence des théorèmes 4.1' et 4.2', on a donc :

COROLLAIRE 4.1. - <u>Soit</u> W <u>un idéal bilatère fortement large de</u> D . <u>Les congruences faiblement</u> W-<u>simplifiables coïncident avec les congruences</u> $P(\mathcal{K})$ <u>définies par des familles de complexes</u> $\mathcal{K}$, <u>régulières, fortes, équirésiduelles de résidu</u> W .

En général une famille $\mathcal{K}$ de complexes n'est pas nécessairement une famille de classes modulo $P(\mathcal{K})$. Mais cela se produit pour certaines familles de sous-demi-groupes.

DÉFINITION 4.4. - <u>Un complexe</u> K <u>d'un demi-groupe est dit faiblement unitaire</u>, <u>si</u> $\forall x , k , k' \in D$:

$$xk \in K , \quad k'x \in K ; \quad k , k' \in K \implies x \in K .$$

THÉORÈME 4.3. - <u>Si</u> $\mathbb{S}$ <u>est une famille forte de sous-demi-groupes</u> S_i <u>faiblement unitaires, chaque</u> S_i <u>est une classe modulo</u> $P(\mathbb{S})$.

<u>Démonstration</u> :

a. Soient s et $s' \in S_i$; ss' , $s's$, s^2 sont dans S_i ; donc

$$s \in (S_i \,.\!\cdot\, s) \cap (S_i \,.\!\cdot\, s') \quad \text{et} \quad s \in (S_i \,\cdot\!.\, s) \cap (S_i \,\cdot\!.\, s') ,$$

comme la famille est forte : $s \; P(\mathbb{S}) \; s'$, donc S_i est indivisible modulo $P(\mathbb{S})$.

b. Soient $s \in S_i$ et x tels que $s \; P(\mathbb{S}) \; x$: xs et $sx \in S_i$, car $s^2 \in S_i$. S_i étant faiblement unitaire $x \in S_i$, donc S_i est saturé modulo $P(\mathbb{S})$.

Notons qu'on pourrait obtenir un théorème analogue portant sur une famille de complexes qui ne sont plus nécessairement des sous-demi-groupes, mais qui vérifie une propriété de type "parfait" ([5], p. 242). Vu la complication, et compte tenu du théorème 3.2, je me suis borné aux familles de sous-demi-groupes.

COROLLAIRE 4.2. - <u>Si</u> $\mathbb{S}$ <u>est une famille régulière, forte, équirésiduelle et de résidu premier, de sous-demi-groupes faiblement unitaires</u>, $D/P(\mathbb{S})$ <u>est un demi-groupe complètement</u> 0-<u>simple</u>.

<u>Démonstration</u> : Dans $D/P(\mathbb{S})$ les images des $S_i \in \mathbb{S}$ sont des idempotents (Théorème 4.3), et l'image du résidu est le zéro qui est premier. $D/P(\mathbb{S})$ est inversé, et enfin il est faiblement 0-simplifiable (Théorème 4.1'). $D/P(\mathbb{S})$ est donc complètement 0-simple (système (II)).

COROLLAIRE 4.3 (réciproque du précédent). - <u>Si</u> R <u>est une congruence sur un demi-groupe</u> D , <u>telle que</u> D/R <u>soit complètement</u> 0-<u>simple, alors</u> R <u>coïncide avec l'équivalence</u> $P(\mathbb{S})$, <u>associée à la famille</u> $\mathbb{S}$ <u>des sous-demi-groupes de</u> D , <u>images inverses des idempotents non nuls de</u> D/R . <u>La famille</u> $\mathbb{S}$ <u>est régulière, forte, équirésiduelle de résidu premier. Chaque sous-demi-groupe de</u> $\mathbb{S}$ <u>est faiblement unitaire</u>.

D'après ces deux dernières propositions, il y a correspondance biunivoque entre les images homomorphes complètement 0-simples d'un demi-groupe D et les familles régulières (L_1) , fortes (L_2) , équirésiduelles de résidu premier (L_3) , de sous-demi-groupes faiblement unitaires (L_4) .

5. Décompositions W-matricielles d'un demi-groupe.

Ces propriétés (L) , mises en évidence pour des familles de sous-demi-groupes ne sont pas d'un usage commode. La vérifiaation des propriétés (L_1) , (L_2) , (L_4) pour des familles formées de plus d'un sous-demi-groupe, est en général difficile. La propriété (L_3) , par contre, porte sur la réunion K des sous-demi-groupes de $\mathbb{S}$. On est alors amené à remplacer toutes les propriétés (L) par des propriétés portant sur K , d'autant plus qu'on vérifie immédiatement la réflectivité de K ($\forall$ a , b $\in$ D : ab $\in$ K $\Rightarrow$ ba $\in$ K) . La correspondance entre le complexe K et la famille $\mathbb{S}$ s'effectue grâce à une décomposition du demi-groupe D , que nous mettons maintenant en évidence.

DÉFINITION 5.1. - On appelle 0-bande rectangulaire un demi-groupe B avec 0 tel que

1° $\forall$ a , b $\in$ D , aba = a ou 0 .
2° $\forall$ a , b $\in$ D : a $\neq$ 0 et b $\neq$ 0 $\Longrightarrow$ $\exists$ x $\in$ B : axb $\neq$ 0 .

Pour a $\neq$ 0 dans B , il existe x tel que axa $\neq$ 0 , donc axa = a et axax = ax . B est donc inversé. Si ax = bx $\neq$ 0 et ya = yb $\neq$ 0 , il existe z dans B ,tel que axzya = bxzyb $\neq$ 0 : donc a = b , et B est faiblement 0-simplifiable : il est donc complètement 0-simple. Si $a^2 \neq 0$, il existe x tel que $a^2 xa^2 = a(axa)a \neq 0$; d'après 1°, $a^2 = a$. Tous les éléments de B sont donc idempotents ou de carré nul, et B est isomorphe à un demi-groupe régulier de matrices de Rees sur le groupe avec zéro {e , 0} . D'après le corollaire 3.12, de [2], p. 106, appliqué au cas où G^0 = {e , 0} , deux demi-groupes réguliers de matrices de Rees sur G^0 sont isomorphes si et seulement si leurs matrices se déduisent l'une de l'autre par permutation des lignes entre elles ou des colonnes entre elles. Dans la suite nous considèrerons que B est caractérisé à un isomorphisme près, par sa matrice médiane P . On vérifie, sans peine, que toute image homomorphe propre d'une 0-bande rectangulaire de matrice P , est une 0-bande rectangulaire de matrice $\overline{P}$ déduite de P par identification de lignes identiques entre elles, ou de colonnes identiques entre elles. Une 0-bande rectangulaire, dont la matrice est à lignes et à colonnes toutes distinctes entre elles, est dite irréductible. Ses seuls homomorphismes sont les isomorphismes et l'homomorphisme trivial (voir [9], Chap. VII, § 4.25).

Si un demi-groupe D quelconque a pour image homomorphe une 0-bande rectangulaire

B, l'équivalence d'homomorphisme $\mathfrak{M}$ définit sur D une décomposition en classes. L'une d'elles, correspondant au 0 de B, est un idéal bilatère premier W.

DÉFINITION 5.2. - <u>Soit</u> W <u>un idéal bilatère premier d'un demi-groupe</u> D. <u>Toute congruence</u> $\mathfrak{M}$ <u>telle que</u>

1° W <u>soit une classe modulo</u> $\mathfrak{M}$,

2° $\forall\ a, b \in D$, $aba \notin W \implies aba \equiv a$ (<u>modulo</u> $\mathfrak{M}$)

<u>est appelée congruence</u> W-<u>matricielle, et la décomposition correspondante est dite</u> W-<u>matricielle.</u>

Le théorème suivant donne des conditions d'existence de telles congruences.

THÉORÈME 5.1. - <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe admette une décomposition</u> W-<u>matricielle est que l'idéal premier</u> W <u>vérifie la condition</u> :

(C) $$abc \in W \implies ab \in W \text{ ou } bc \in W .$$

<u>Démonstration</u> : On vérifie que dans une 0-bande rectangulaire (et même plus généralement dans un demi-groupe complètement 0-simple), $abc = 0 \implies ab = 0$ ou $bc = 0$ d'où la condition nécessaire. Pour démontrer que la condition est suffisante, considérons la relation $\mathfrak{M}$ suivante sur D : $a\,\mathfrak{M}\,b$ si et seulement si

$$axa \in W \iff bxb \in W .$$

- $\mathfrak{M}$ est une congruence ; pour montrer la régularité à droite par exemple : si $a\,\mathfrak{M}\,b$ et si $acxac \in W$, alors $acxa \in W$; sinon d'après (C), $ac \in W$ ce qui est contradictoire ; donc $acxa \in W \implies bcxb \in W$ et $bcxbc \in W$; on démontre de même : $bcxbc \in W \implies acxac \in W$; d'où : $ac\,\mathfrak{M}\,bc$.

- W est une classe modulo $\mathfrak{M}$, car

$$W = \{w \;;\; w \in D \text{ tels que } wDw \subseteq W\} .$$

- $\mathfrak{M}$ est une congruence W-matricielle : supposons que $aba \notin W$:

$$abaxaba \in W \implies axaba \in W \implies axa \in W \quad \text{(propriété (C))}.$$

Les implications réciproques ont lieu aussi, donc $aba\,\mathfrak{M}\,a$.

<u>Remarques</u> :

1° $\mathfrak{M} = P_H = {}_HP$, où $H = \{x \;;\; x \in D : x^2 \notin W\}$. Ce complexe H est réflectif ; il a W comme résidu. H est aussi saturé modulo P_H. Dans la 0-bande rectangulaire $D/\mathfrak{M} = D/P_H$, l'équivalence principale définie par l'ensemble des idempotents non nuls est l'égalité : donc D/P_H est irréductible, et $\mathcal{M}$ est la moins fine congruence W-matricielle. Si H est fort dans D [5], D/P_H est aussi un demi-groupe de Brandt et réciproquement.

2° On vérifie que $\mathcal{M} = P_W \cap {}_WP$ (voir théorème 5.2, ci-dessous).

Dans la suite, W sera toujours un idéal premier vérifiant la condition (C).

DÉFINITION 5.3. - Une équivalence $\mathcal{R}$ est dite W-zéro à gauche si :

1° $\mathcal{R}$ est régulière à gauche ;
2° W est une classe modulo $\mathcal{R}$;
3° $\forall x , y \in D$, $xy \notin W \implies xy \equiv x \pmod{\mathcal{R}}$.

On définit symétriquement une équivalence $\mathcal{L}$, W-zéro à droite (la terminologie vient du fait que si $W = \emptyset$, $\mathcal{R}$ est telle que $D/\mathcal{R}$ est un demi-groupe zéro à gauche [2]).

THÉORÈME 5.2. - L'intersection d'une équivalence W-zéro à gauche, et d'une équivalence W-zéro à droite, est une congruence W-matricielle, et réciproquement, toute congruence W-matricielle peut s'écrire, avec unicité, comme intersection de deux équivalences du type précédent.

Démonstration : La première partie est d'une vérification facile. Pour la réciproque , soit $\mathcal{M}$ une congruence W-matricielle. $D/\mathcal{M}$ est une O-bande rectangulaire. On définit $\mathcal{R}$ dans D de la manière suivante :

$a \mathcal{R} b$ si et seulement si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ étant les classes de a et b modulo $\mathcal{M}$, on a : $\bar{a}$ et $\bar{b}$ équivalents dans $D/\mathcal{M}$ par l'équivalence $\mathcal{R}$ de Green. $\mathcal{L}$ se définit d'une manière analogue et $\mathcal{R} \cap \mathcal{L} = \mathcal{M}$.

Pour montrer l'unicité, supposons que $\mathcal{R} \cap \mathcal{L} = \mathcal{R}' \cap \mathcal{L}' = \mathcal{M}$. Supposons que $a \mathcal{R} b$. Si a et b sont dans W , alors $a \mathcal{R}' b$. Sinon il existe x tel que $axb \notin W$, or $axb \mathcal{R} a \mathcal{R} b$ et $axb \mathcal{L} b$, donc $axb \mathcal{M} b$. Ceci entraîne $axb \mathcal{R}' b$, et comme $axb \mathcal{R}' a$: $a \mathcal{R}' b$.

On a donc $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$. En échangeant $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on obtient $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$. Même démonstration pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.

L'équivalence principale à gauche ${}_WP$ est la moins fine équivalence W-zéro à gauche. Posons $a \equiv b \pmod{{}_W\Sigma}$ si et seulement si :

- ou bien $\exists a_1 , a_2 , \dots , a_n \in D$ avec $aD - W | a_1 D - W | \dots | a_n D - W | bD - W$ (le signe $|$ indique que les ensembles se coupent) ;
- ou bien $a , b \in W$.

THÉORÈME 5.3. - Sur un demi-groupe quelconque, l'équivalence : ${}_W P \cap {}_W\Sigma = {}_W\Phi$ est la plus fine équivalence W-zéro à gauche.

Démonstration : ${}_W\Phi$ admet W comme classe. Si $a\ ({}_W\Phi)\ b$:

- ou bien a et $b \in W$; dans ce cas, $\forall\ x \in D$: $xa\ ({}_W\Phi)\ xb$;

- ou bien a et $b \notin W$; si $xa \in W$, $xb \in W$, et réciproquement. Si $xa \notin W$, $xb \notin W$, $xaD - W | xa_1 D - W | \ldots | xa_n D - W | xbD - W$. Donc $\forall\ x \in D$, $xa\ ({}_W\Phi)\ xb$, et ${}_W\Phi$ est régulière à gauche.

Si $ab \notin W$: $W \stackrel{\circ}{.} ab = W \stackrel{\circ}{.} a$, et $abD - W \subseteq aD - W$; donc $ab\ ({}_W\Phi)\ a$.

Enfin soit $\mathcal{R}$ une équivalence W-zéro à gauche :

$$aD - W | bD - W \implies a\ \mathcal{R}\ b .$$

Comme W est une classe modulo $\mathcal{R}$: ${}_W\Phi \subseteq \mathcal{R}$.

La congruence $\mathcal{B}(W) = {}_W\Phi \cap \Phi_W$ est donc la plus fine congruence W-matricielle. Le cas où $W = \emptyset$ a été traité dans [12]. Il est à remarquer que, dans ce cas, ${}_W\Phi = {}_W\Sigma$ coïncide avec l'équivalence réversible généralisée [4].

6. Application des décompositions W-matricielles aux homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple.

Les applications envisagées sont possibles grâce à la remarque suivante :

Dans un demi-groupe D complètement 0-simple, l'équivalence $\mathcal{H}$ de Green est régulière, et $D/\mathcal{H}$ est l'image homomorphe maximale 0-bande rectangulaire de D ; cela résulte du fait que dans un tel demi-groupe :

$$\left(\begin{array}{c} aD^1 = bD^1 \\ a \text{ et } b \neq 0 \end{array}\right) \iff \exists\ x, y \in D :\ ax = by \neq 0$$

Donc l'équivalence ${}_0\Phi$ du § 5 coïncide avec l'équivalence $\mathcal{R}$ de Green, et $\mathcal{B}(0)$ coïncide avec l'équivalence $\mathcal{H}$. Donc si un demi-groupe D, quelconque, a une image homomorphe $\overline{D} = \varphi(D)$ complètement 0-simple, il admet une décomposition W-matricielle pour un certain idéal W (caractérisé par le théorème 5.1).

On peut décrire grossièrement la structure de D en disant qu'il existe des ensembles d'indices I et Λ, tels que

$$D = W + \sum_{\substack{i \in I \\ \lambda \in \Lambda}} C_{i\lambda} .$$

Un complexe $C_{i\lambda}$ est un sous-demi-groupe ou bien $C_{i\lambda}^2 \subseteq W$. De plus,

$$C_{i\lambda}.C_{j\mu} \subseteq W \text{ si } C^2_{j\lambda} \subseteq W \quad \text{et} \quad C_{i\lambda}.C_{j\mu} \subsetneq C_{i\mu} \text{ si } C^2_{j\lambda} \not\subseteq W .$$

Le théorème 5.3 indique même que, pour un idéal donné W, dans un demi-groupe D, il existe un ou des demi-groupes complètement 0-simples images homomorphes dont la matrice est de format maximum (format de $D/\mathcal{B}(W)$).

Dans le théorème suivant, figure une caractérisation d'une famille $\mathcal{S}$ de sous-demi-groupes vérifiant les conditions (L) du § 4 portant sur le complexe réunion K et sur une décomposition W-matricielle liée à K.

THÉORÈME 6.1. - Une famille $\mathcal{S}$ de sous-demi-groupes vérifie les conditions L si et seulement si leur réunion K vérifie les 3 conditions suivantes :

(1) K est réflectif, de résidu premier vérifiant (C) ;

(2) Il existe une équivalence $\mathcal{R}$, W-zéro à gauche telle que, pour tout R, $R \neq W$, classe de $\mathcal{R}$: $K \cap R$ est un sous-demi-groupe unitaire à droite.

(3) Il existe une équivalence $\mathcal{L}$, W-zéro à droite telle que, pour tout L, $L \neq W$, classe de $\mathcal{L}$: $K \cap L$ est un sous-demi-groupe unitaire à gauche.

Démonstration :

(a) Une famille de sous-demi-groupes vérifiant (L) définit un homomorphisme φ de D sur un demi-groupe complètement 0-simple $\overline{D}$. K est saturé, et a pour image l'ensemble des idempotents non nuls, $\overline{E}$ de $\overline{D}$. $\overline{E}$ est réflectif, donc K aussi.

La décomposition de $\overline{D}$ en $\mathcal{H}$-classes de Green se remonte en D pour définir une décomposition W-matricielle $\mathcal{M} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ (théorème 5.2).

Soit R une $\mathcal{R}$-classe distincte de W. Si $x \in R \cap K$ et $y \in R \cap K$, leurs images $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont dans $\overline{E}$ et sont des éléments de $\overline{D}$ équivalents modulo l'équivalence $\mathcal{R}$ de Green. Donc $\overline{x}\overline{y} = \overline{y}$ et $xy \in R \cap K$.

Si $xy \in R \cap K$ et $y \in R \cap K$: $\overline{xy} = \overline{x}.\overline{y} \in \overline{E}$ et $\overline{y} \in \overline{E}$. Il en résulte $\overline{x} \in \overline{E}$, et comme $\overline{x}$ et $\overline{xy}$ sont équivalents par l'équivalence $\mathcal{R}$ de Green : $x \in R \cap K$ et $R \cap K$ est unitaire à droite.

(b) Réciproquement : Soit K un complexe vérifiant (1), (2) et (3) de l'énoncé. Soit R une $\mathcal{R}$-classe distincte de W et $x \in K \cap R$. La $\mathcal{L}$-classe de x, L, est distincte de W, et $R \cap L$ est une $\mathcal{M}$-classe ($\mathcal{M} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$) qui rencontre K. D'après (2) et (3), toutes les $\mathcal{M}$-classes, qui rencontrent K, le coupent suivant des sous-demi-groupes faiblement unitaires (L_4). Il reste à vérifier L_1 et L_2 (L_3 est évident).

On indexe les $\mathcal{R}$-classes par un ensemble I, les $\mathcal{L}$-classes par un ensemble Λ.

Les $R_i \cap L_\lambda$ sont notés $C_{i\lambda}$, et $C_{i\lambda} \cap K = S_{i\lambda}$ ou bien $C_{i\lambda} \cap K = \emptyset$. On pose $\mathbb{S} = \{S_{i\lambda}\}$.

(L_1) Soit a $P(\mathbb{S})$ b . Si $cax \in S_{i\lambda}$, $c \in C_{i\mu}$, $a \in C_{k\kappa}$, $x \in C_{j\lambda}$. $axc \in K$ (K est réflectif), et même plus précisément $axc \in S_{k\mu}$. Donc $bxc \in S_{k\mu}$. Il en résulte que $cbx \in S_{i\lambda}$. On a donc

$$S_{i\lambda} \mathbin{.^{\bullet}} ca \subseteq S_{i\lambda} \mathbin{.^{\bullet}} cb .$$

En intervertissant a et b :

$$S_{i\lambda} \mathbin{.^{\bullet}} ca = S_{i\lambda} \mathbin{.^{\bullet}} cb .$$

On démontrerait de même que

$$\forall\ i \text{ et } \lambda ,\ \forall\ c \in D ,\ S_{i\lambda} \mathbin{^{\bullet}.} ac = S_{i\lambda} \mathbin{^{\bullet}.} bc ,$$

d'où la régularité de la famille $\mathbb{S}$.

(L_2) Supposons qu'il existe $x , y , i , j , \lambda , \mu$ tels que ax et $bx \in S_{i\lambda}$, ya et $yb \in S_{j\mu}$. Si $az \in S_{k\nu}$, alors $k = i$.

bx et az sont dans $K \cap R_i$, donc $bxaz \in K$; on a $xazb \in K \cap L_\mu$ et $xa \in K \cap L_\mu$. Or $K \cap L_\mu$ est unitaire à gauche :

$$zb \in K \cap L_\mu \quad \text{et} \quad bz \in K \cap C_{i\nu} = S_{i\nu} = S_{k\nu} .$$

$S_{k\nu} \mathbin{.^{\bullet}} a = S_{k\nu} \mathbin{.^{\bullet}} b$. Démonstrations analogues pour l'inclusion inverse, et pour les quotients à gauche. La famille $\mathbb{S}$ est donc forte.

D'après ce théorème, les homomorphismes d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement 0-simple correspondent biunivoquement aux couples formés par :

- un complexe K vérifiant (1) $(W_K = {}_K W = W)$
- une matrice, extraite de la matrice de $D/\mathcal{B}_W$, liée à K par (2) et (3).

Le théorème suivant donne une caractérisation un peu plus précise du complexe K en ce sens qu'il permet de remplacer $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ qui interviennent dans le théorème 6.1, respectivement par ${}_W\Phi$ et Φ_W (Théorème 5.3).

THÉORÈME 6.2. - Pour un complexe K , réflectif, de résidu premier vérifiant (C), il y a équivalence entre les conditions (2) et (3) du théorème 6.1 et

(2') Toute classe de ${}_W\Phi$, distincte de W , coupe K suivant un sous-demi-groupe unitaire à droite.

(3') Toute classe de Φ_W , distincte de W , coupe K suivant un sous-demi-groupe unitaire à gauche.

Démonstration : $(2') \Rightarrow (2)$. Pour établir que $(2) \Rightarrow (2')$, on montrera que si $\mathcal{R}'$ est une équivalence W-zéro à gauche, telle que $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, les classes de $\mathcal{R}'$, autres que W , vérifient les mêmes propriétés que les classes de $\mathcal{R}$ relativement à K . Soit R' une classe de $\mathcal{R}'$ distincte de W . $R' \cap K$ n'est pas vide : pour $x \in R'$, il existe un y tel que $xy \in K$, et comme $\mathcal{R}'$ est W-zéro à gauche :

$$x \in R' \implies xy \in R' .$$

Si x et $y \in R' \cap K$, x et $y \in R \cap K$ pour une certaine classe R de $\mathcal{R}$; donc $xy \in R \cap K$: $xy \notin W$, ce qui entraîne $xy \, \mathcal{R}' \, x$, soit $xy \in R' \cap K$ qui est aussi un sous-demi-groupe.

Si $xy \in R' \cap K$ et $y \in R' \cap K$, comme précédemment : $x \in R \cap K$, donc $x \in R' \cap K$ qui est unitaire à droite.

La démonstration utilise, en fait, la propriété suivante de R (ou R') : R est consistant à gauche, et $R \cup W$ est un idéal à droite. Les classes de ${}_W\Phi$ sont les complexes minimaux pour ces propriétés.

D'après ce théorème, K apparaît comme la réunion d'une famille $\mathcal{S}$ de sous-demi-groupes, qui sont les traces sur K des classes de $\mathcal{B}(W)$. Si $D/\mathcal{S}$ désigne le demi-groupe complètement-0-simple homomorphe à D , défini par $\mathcal{S}$, $D/\mathcal{S}$ est donc l'image homomorphe maximale complètement 0-simple définie à l'aide du complexe K . La détermination des congruences sur $D/\mathcal{S}$ achève la résolution du problème de la détermination de toutes les images homomorphes de D définies à l'aide de K .

7. Congruences sur les demi-groupes complètement 0-simples.

Le treillis des congruences sur un demi-groupe complètement 0-simple a été étudié par GLUSKIN [6] et [9] (chap. VII, p. 388-389), MUNN [2], PRESTON [13] et [14]. Je me bornerai dans ce paragraphe à la détermination des complexes K et des décompositions 0-matricielles liées à K , en application de ce qui précède. Comme dans [14], nous considérerons un demi-groupe complètement 0-simple D donné sous la forme d'un demi-groupe régulier de matrices de Rees $\mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda , P)$; les $\mathcal{H}$-classes de Green autres que 0 seront notées $H_{i\lambda}$.

Pour tout complexe K de D , on définit des complexes $K_{i\lambda}$ du groupe avec 0 , G^0 , de la manière suivante :

$$K_{i\lambda} = \{x ; \; x \in G^0 : \; (x , i , \lambda) \in K \cap H_{i\lambda}\} .$$

DÉFINITION 7.1. - <u>Un complexe</u> K <u>de</u> $D = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda , P)$ <u>est dit normal s'il vérifie les propriétés (1), (2), (3) du théorème 6.1 (ou (1), (2'), (3') du théorème 6.2). Une décomposition</u> 0-<u>matricielle de</u> D, $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$, <u>où</u> $\mathcal{R}$ <u>et</u> $\mathcal{L}$ <u>vérifient</u> (2) <u>et</u> (3) <u>est dite liée à</u> K.

THÉORÈME 7.1. - <u>Un complexe</u> K <u>d'un demi-groupe complètement</u> 0-<u>simple est normal si et seulement si</u> :

(a) K <u>ne contient pas</u> 0 <u>et</u> $p_{\lambda i} = 0 \iff K \cap H_{i\lambda} = \emptyset$;

(b) $\forall\, i \in I$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$; $p_{\lambda i} \neq 0 \implies p_{\lambda i} K_{i\lambda} = N$ <u>où</u> N <u>est un sous-groupe normal de</u> G.

<u>Démonstration</u> :

1° Soit K un complexe normal. D'après la condition (1) du théorème 6.1, le résidu de K est 0, et K est disjoint de son résidu.

Si $p_{\lambda i} = 0$, supposons que $(a ; i , \lambda) \in K$. Soit $\mu \in \Lambda$ tel que $p_{\mu i} \neq 0$.

$$(p_{\mu i}^{-1} ; i , \mu)(a ; i , \lambda) = (a ; i , \lambda) \in K .$$

Comme K est réflectif : $(a ; i , \lambda)(p_{\mu i}^{-1} ; i , \mu) = 0 \in K$, ce qui est impossible, donc

$$K \cap H_{i\lambda} = \emptyset .$$

Pour l'implication réciproque, supposons que $p_{\lambda i} \neq 0$. $K \cap L_\lambda$ n'est pas vide : soit $(x , j , \lambda) \in K$ (d'après ce qui précède $p_{\lambda j} \neq 0$)

$$(x , j , \lambda)(p_{\lambda i}^{-1} , i , \lambda) \in K \implies (p_{\lambda i}^{-1} , i , \lambda)(x , j , \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j}\, x ; i , \lambda) \in K ,$$

donc

$$K \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$$

ce qui démontre (a).

Supposons que $p_{\lambda i} \neq 0$ et $p_{\mu j} \neq 0$: montrons que $p_{\lambda i} K_{i\lambda} = p_{\mu j} K_{j\mu}$.

$$x \in p_{\lambda i} K_{i\lambda} \iff (p_{\lambda i}^{-1} x ; i , \lambda) \in K .$$

or

$$(p_{\lambda i}^{-1} x ; i , \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1} ; i , \mu)(p_{\mu j}^{-1} x ; j , \lambda)$$

donc

$$(p_{\mu j}^{-1} x ; j , \lambda)(p_{\lambda i}^{-1} ; i , \mu) = (p_{\mu j}^{-1} x ; j , \mu) \in K \iff x \in p_{\mu j} K_{j\mu} .$$

On pose $p_{\lambda i} K_{i\lambda} = N$. N est un sous-groupe de G ; si $x \in N$ et $y \in N$,

$$(p_{\lambda i}^{-1} x ; i , \lambda) \quad \text{et} \quad (p_{\lambda i}^{-1} y ; i , \lambda) \in K$$

alors $(p_{\lambda i}^{-1} xy ; i , \lambda) \in K$, donc $xy \in N$ et en particulier

$$x^2 \in N .$$

Comme

$$(p_{\lambda i}^{-1} x^{-1} ; i , \lambda)(p_{\lambda i}^{-1} x^2 ; i , \lambda) = (p_{\lambda i}^{-1} x ; i , \lambda) \in K ;$$

d'après les propriétés d'unitarité :

$$x^{-1} \in N .$$

Si $xy \in N$:

$$(p_{\lambda i}^{-1} xy ; i , \lambda) \in K , \implies (p_{\lambda i}^{-1} yx ; i , \lambda) \in K \text{ (réflectivité) } \implies yx \in N ;$$

N est un sous-groupe réflectif, donc normal de G .

2° Soit K un complexe de D vérifiant (a) et (b). K est réflectif ; si $(a ; i , \lambda)(b ; j , \mu) \in K$, $p_{\mu i}\, a p_{\lambda j}\, b \in N$, donc

$$(b p_{\mu i}\, a ; j , \lambda) = (b ; j , \mu)(a ; i , \lambda) \in K .$$

Son résidu est 0 ((II) 2° et (a)).

- Si $(x ; i , \lambda)$ et $(y ; i , \mu)$ sont dans $K \cap R_i$, où R_i est une $\mathcal{R}$-classe de Green distincte de 0 ,

$$(x p_{\lambda i}\, y ; i , \mu) \in K \cap R_i$$

car

$$p_{\lambda i}\, x \in N \text{ et } p_{\mu i}\, y \in N \implies p_{\mu i}\, x\, p_{\lambda i}\, y \in N .$$

- Si $(x ; i , \lambda)(y ; i , \mu) \in K \cap R_i$ et $(y ; i , \mu) \in K \cap R_i$, alors

$$(x ; i , \lambda) \in K \cap R_i$$

car

$$p_{\mu i}\, x\, p_{\lambda i}\, y \in N \text{ et } p_{\mu i}\, y \in N \implies p_{\lambda i}\, x \in N .$$

$K \cap R_i$ est donc un sous-demi-groupe unitaire à droite. On démontre de même que pour une $\mathcal{L}$-classe de Green L_λ , $K \cap L_\lambda$ est un sous-demi-groupe unitaire à gauche.

Pour déterminer les décompositions 0-matricielles liées à un complexe normal K d'un demi-groupe complètement 0-simple, on introduit les notions suivantes :

DÉFINITIONS 7.2. - <u>On appelle "extraits" de la matrice</u> P <u>de</u> D , <u>les éléments de</u> G <u>de la forme</u> $p_{\mu i}\, p_{\lambda i}^{-1}\, p_{\lambda j}\, p_{\mu j}^{-1}$. Un extrait sera noté brièvement

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} .$$

<u>Une partition</u> p <u>de</u> I <u>est dite liée au sous-groupe normal</u> N <u>de</u> G <u>si elle vérifie la propriété suivante</u> :

$$i\,p\,j \Longrightarrow \begin{cases} (1) \quad \forall\, \lambda \in \Lambda , \quad p_{\lambda i} = 0 \Longleftrightarrow p_{\lambda j} = 0 \\ (2) \quad \forall\, \lambda , \mu \in \Lambda, \quad \begin{pmatrix} i & j \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \in N . \end{cases}$$

On définit de la même manière une partition π de Λ .

THÉORÈME 7.2. - <u>Soient</u> K <u>un complexe normal d'un demi-groupe complètement</u> 0-<u>simple</u> $D = \mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda , P)$ <u>et</u> N <u>le sous-groupe normal de</u> G <u>qui lui est associé. Toute décomposition</u> 0-<u>matricielle liée à</u> K <u>définit une partition</u> p <u>de</u> I et une partition π de Λ liées à N et réciproquement.

<u>Démonstration</u> :

1° Soit $\mathcal{M}$ une décomposition 0-matricielle liée à K : $D/\mathcal{M}$ est une image homomorphe de $D/\mathcal{H}$. Or la matrice de $D/\mathcal{H}$ s'obtient à partir de celle de D par remplacement de $p_{\lambda i} \neq 0$ par e , élément neutre de G . D'après les remarques faites après la définition 5.1, $\mathcal{M}$ induit sur I une partition p telle que

$$i\,p\,j \Longrightarrow \forall\, \lambda \in \Lambda , \quad p_{\lambda i} = 0 \Longleftrightarrow p_{\lambda j} = 0 .$$

Pour $p_{\lambda i}$ et $p_{\lambda j}$ non nuls, $(p_{\lambda i}^{-1} ; i , \lambda)$ et $(p_{\lambda j}^{-1} , j , \lambda)$ sont dans la même classe de la congruence définie par le couple $(K , \mathcal{M})$. Il en est de même de :

$$(p_{\mu j}^{-1} ; j , \mu)(p_{\lambda i}^{-1} ; i , \lambda) \quad \text{et} \quad (p_{\mu j}^{-1} ; j , \mu)(p_{\lambda j}^{-1} , j , \lambda) = (p_{\lambda j}^{-1} , j , \lambda)$$

pour $p_{\mu j}$ et $p_{\mu i}$ non nuls. Donc :

$$(p_{\mu j}^{-1}\, p_{\mu i}\, p_{\lambda i}^{-1} , j , \lambda) \in K \quad \text{et} \quad p_{\mu i}\, p_{\lambda i}^{-1}\, p_{\lambda j}\, p_{\mu j}^{-1} \in N .$$

2° Réciproquement, soient p une partition de I liée à N , et π une partition de Λ liée à N . On définit, sur D , la relation suivante $\mathcal{R}$ par :

$$0 \,\mathcal{R}\, 0 \quad \text{et} \quad (a ; i , \lambda) \,\mathcal{R}\, (b ; j , \mu) \quad \text{si et seulement si} \quad i\,p\,j .$$

Par des calculs élémentaires, on vérifie que $\mathcal{R}$ est une équivalence 0-zéro à gauche, et que les classes de $\mathcal{R}$ autres que 0 coupent K suivant des sous-demi-groupes unitaires à droite.

De même la relation $\mathcal{L}$ définie par

$$0 \,\mathcal{L}\, 0 \quad \text{et} \quad (a\,;\,i\,,\,\lambda)\,\mathcal{L}\,(b\,;\,j\,,\,\mu) \Longleftrightarrow \lambda\,\pi\,\mu$$

a des propriétés symétriques de celles de $\mathcal{R}$. $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ est une congruence 0-matricielle liée à K .

8. Cas particuliers. Application à certains demi-groupes à noyau.

A. - Le tableau ci-dessous indique comment s'adaptent les résultats généraux, lorsque $\overline{D}$ est un demi-groupe complètement 0-simple d'un type particulier. A la 2e colonne, $\overline{D} = G \times B$, où G est un groupe et B une bande rectangulaire (demi-groupe complètement 0-simple dont tous les extraits de matrice sont égaux à e). A la 3e colonne, $\overline{D}$ est un groupe à droite (right-group) [2], c'est-à-dire un demi-groupe inversé simplifiable à gauche. Dans la dernière colonne, $\overline{D}$ est un demi-groupe de Brandt, c'est-à-dire un demi-groupe complètement 0-simple "0-simplifiable" ([2], 3.3). Dans les lignes de K et $\mathfrak{M}$ ne figurent que les propriétés particulières.

$\overline{D}$	complètement simple	$\overline{D} = G \times B$	$\overline{D}$ = groupe à droite	$\overline{D}$ = groupe avec 0	demi-groupe de Brandt
K	net	sous-demi-groupe net unitaire	sous-demi-groupe net unitaire	sous-demi-groupe pseudo-normal [5]	saturé modulo P_K
$\mathfrak{M}$	congruence matricielle liée à K	toute congruence matricielle	toute congruence zéro à droite	congruence W_K-matricielle la moins fine (2 classes)	une seule congruence W_K-matricielle
$P(\mathcal{K})$	$P(\mathcal{K})$	$P(\mathcal{K})$	${}_{\mathcal{K}}P$	$P_K = {}_K P$	$P_K = {}_K P$

Pour le cas où $\overline{D}$ est un demi-groupe de Brandt, voir aussi [11] et [13].

B. - Nous utiliserons, à titre d'exemple, les homomorphismes étudiés dans le cas où D est un demi-groupe à noyau complètement simple [7]. Dans sa thèse [8], P. LEFEBVRE a montré que les demi-groupes à noyau complètement simple fournissent une généralisation des homogroupes de Thierrin [17]. Dans les uns le noyau est la réunion des complexes nets minimaux d'un côté, dans les autres, c'est l'ensemble des zéroïdes ou éléments nets d'un côté. Pour un homogroupe H, l'application $x \to ex$, où e est l'élément neutre du noyau groupe G de H, définit un homomorphisme de H sur G qui laisse fixe les éléments de G. Le problème qui se pose est alors le suivant : Dans quels cas y a-t-il un homomorphisme d'un demi-groupe D à noyau complètement simple Z sur son noyau, et même plus précisément un homomorphisme laissant fixe les éléments de Z ?

Le théorème suivant répond à la question :

THÉORÈME. - <u>Pour un demi-groupe</u> D <u>à noyau complètement simple</u> Z, <u>il y a équivalence entre</u> :

(a) <u>Il existe un homomorphisme</u> φ <u>tel que</u> $\varphi(D) = Z$ <u>et</u> $\varphi(z) = z$, $\forall z \in Z$.

(b) $\forall e, f$ <u>idempotents de</u> Z :

(1) $ef = e \implies \forall x \in D$: xe <u>et</u> xf <u>sont dans le même sous-groupe maximal</u>

(2) $ef = f \implies \forall x \in D$: ex <u>et</u> fx <u>sont dans le même sous-groupe maximal</u>.

D <u>est alors bande rectangulaire d'homogroupes et les noyaux de ces homogroupes sont les sous-groupes maximaux de</u> Z.

<u>Démonstration</u> :

(a) $\implies$ (b). - Si par exemple $ef = e$:

$$\forall x \in D, \quad xe = \varphi(xe) = \varphi(x)e \quad \text{et} \quad xf = \varphi(xf) = \varphi(x)f .$$

Comme $\varphi(x) \in Z$: $\varphi(x)e$ et $\varphi(x)f$ sont dans le même sous-groupe maximal ($\mathcal{H}$-classe de Green) du noyau Z.

Dans la suite de la démonstration, on désignera par $G_{i\lambda}$ les sous-groupes de Z. $e_{i\lambda}$ désignera l'élément neutre de $G_{i\lambda}$.

(b) $\implies$ (a). - Remarque préliminaire : Si (1) est vérifié, et si k et $k' \in Z$,

$$\forall x \in D, \quad xk \in G_{i\lambda} \implies xk' \in G_{i\lambda'} .$$

En effet, soit $k \in G_{j\lambda}$. $xe_{j\lambda'} \in G_{i\lambda'}$ d'après le système (I). De (1), il résulte que $xe_{j'\lambda'} \in G_{i\lambda'}$, donc $xk' \in G_{i\lambda'}$. On démontre aussi que (2) entraîne une propriété symétrique.

Posons alors

$$K = \{x \; ; \; x \in D : \exists\, e \in Z \; , \; e \text{ idempotent tel que } ex = xe = e\} \, .$$

$K \cap Z$ est l'ensemble des idempotents de Z. Le complexe K est net : en effet, pour $x \in D$, $xk \in Z$ $(k \in Z)$. Il existe alors $z \in Z$ tel que xkz soit un idempotent de Z.

K est réflectif : si $ab \in K$, il existe $e_{i\lambda}$ tel que $abe_{i\lambda} = e_{i\lambda}ab = e_{i\lambda}$. D'après la réflectivité de $K \cap Z$:

$$be_{i\lambda}a = e_{j\mu} \, .$$

De la remarque préliminaire, il résulte que $bae_{j\mu} \in G_{j\mu}$ et $e_{j\mu}ba \in G_{j\mu}$. Ceci implique $e_{j\mu}\,ba\,e_{j\mu} = e_{j\mu}\,ba$, d'où

$$ba\,e_{j\mu} = e_{j\mu}\,ba \, .$$

Enfin

$$bae_{j\mu} = be_{i\lambda}\,ae_{j\mu} = e_{j\mu} \, , \text{ et } ba \in K \, .$$

Soient $\mathcal{R}$ la congruence zéro à gauche maximale sur D et R l'une de ses classes. Si deux idempotents e et f de Z sont dans R : $ef = f$ et $fe = e$ (voir l'expression de $\mathcal{R}$ au théorème 5.3). Si x et $y \in R \cap K$:

$$xe = ex = e \text{ et } yf = fy = f \text{ pour des idempotents } e \text{ et } f \, .$$

e et f étant dans R, $ef = f$ et $fe = e$. On montre alors que

$$xyf = fxy = f$$

donc

$$xy \in R \cap K \, .$$

Enfin si $xy \in R \cap K$ et $y \in R \cap K$, alors

$$xye = exy = e \text{ et } yf = fy = f$$

avec encore $ef = f$ et $fe = e$.

Ces relations entraînent que $xf = f$. Il en résulte que $fx = g$ idempotent de $R \cap K$, et on vérifie que $xg = gx = g$, donc que $x \in R \cap K$. $R \cap K$ est donc un sous-demi-groupe unitaire. Une démonstration symétrique vaut pour les classes de $\mathcal{L}$, congruence zéro à gauche maximale sur D. K et $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ définissent donc un homomorphisme de D sur Z. D'après la forme de K cet homomorphisme laisse fixe les éléments de K.

Au cours de la deuxième partie de la démonstration, on a mis en évidence le fait que la décomposition matricielle maximale $\mathcal{M}$ de D induit sur Z la décomposition en $\mathcal{H}$-classes de Green. Chaque classe de $\mathfrak{M}$ est un sous-demi-groupe qui contient un groupe comme idéal : D est donc une bande rectangulaire d'homogroupes et l'homomorphisme précédent est $x \to ex$ où e est l'élément unitif de l'homogroupe contenant x .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.). - Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 834-844.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups. I. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DUBREIL (P.). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Ac. Sc. Inst. France, 2e série, t. 63, 52 p.).

[4] DUBREIL (P.). - Contribution à la théorie des demi-groupes, II, Rend. di Mat., Univ. Roma, Série 5, t. 10, 1951, p. 183-200.

[5] DUBREIL (P.). - Algèbre, t. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[6] GLUSKIN (L. M.). - Demi-groupes complètement simples [en russe], Učeb. Zap. Kharkovsk. gos. ped. in-ta, t. 18, 1956, p. 41-55 ; Résumé en russe , Referativnyj Žurnal Matematika, 1957, n°1, p. 21, n° 163.

[7] HASHIMOTO (H.). - On the structure of semigroups containing minimal left ideals and minimal right ideals, Proc. Japan Acad., t. 31, 1955, p. 264-266.

[8] LEFEBVRE (P.). - Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, Ann. di Mat., Série 4, t. 59, 1962, p. 77-161 (Thèse Sc. math. Paris, 1962).

[9] LJAPIN (E. S.). - Demi-groupes [en russe]. - Moskva, 1960.

[10] Mc COY (Neal H.). - Prime ideals in general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.

[11] MUNN (W. D.). - Brandt congruences on inverse semigroups, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 14, 1964, p. 154-164.

[12] PETRICH (M.). - Maximal matrix decomposition of a semigroup (à paraître).

[13] PRESTON (G. B.). - Congruences on Brandt semigroups, Math. Annalen, t. 139, 1959/60, p. 91-94.

[14] PRESTON (G. B.). - Congruences on completely 0-simple semigroups, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 11, 1961, p. 556-576.

[15] REES (D.). - On semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 36, 1940, p. 387-400.

[16] REES (D.). - Note on semigroups, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 37, 1941, p. 434-435.

[17] THIERRIN (G.). - Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 103-159 (Thèse Sc. math. Paris, 1954).