Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Artibano Micali

Sur des idéaux engendrés par des déterminants

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1963-1964), exp. nº 1 et 18, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1963-1964__17_2_A6_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
17e année, 1963/64, n° 1 et 18

18 novembre 1963
et 27 avril 1964

[Rédigé en octobre 1964]

SUR DES IDÉAUX ENGENDRÉS PAR DES DÉTERMINANTS

par Artibano MICALI

(d'après les travaux de NORTHCOTT et EAGON)

Dans cet exposé, un anneau sera toujours commutatif à éléments unité, et un module sur un tel anneau, unitaire. En général, on travaille sur des modules de type fini sur des anneaux noethériens.

1. Préliminaires.

Le but de cet exposé est de donner des résultats récents, dus, pour la plus part, à NORTHCOTT et EAGON, sur les idéaux définis par des matrices. Ils généralisent des résultats classiques dus, entre autres, à HILBERT, MACAULAY, KRULL et COHEN.

On connait bien le théorème de Krull-Cohen (cf. [12], et [4] page 99, théorème 21), à savoir : Si $\mathfrak{a} = (a_1 , \ldots , a_n)A$ est un idéal d'un anneau noethérien A, alors la hauteur de tout idéal premier minimal de $\mathfrak{a}$ est $\leqslant n$; si, de plus, A est local régulier et si la hauteur de $\mathfrak{a}$ est égale à n, alors $\mathfrak{a}$ est équidimensionel et, en particulier, $\mathfrak{a}$ n'a pas de composantes immergées (cf. [4] ; voir aussi [16], chap. III, § 3.5, théorème 7). On peut montrer, par localisation, que ceci généralise les résultats classiques de MACAULAY (cf. [13]) sur les anneaux de polynômes à coefficients dans un corps (cf. [20], Appendice 6, théorème 2, remarque).

Tout récemment, le théorème de Krull-Cohen a été étendu aux idéaux engendrés par des déterminants. Plus précisément, soit A un anneau commutatif noethérien ; considérons une matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant r; 1\leqslant j\leqslant s}$ avec les $a_{i,j}$ dans A et $r \leqslant s$. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre r qu'on peut extraire de la matrice ci-dessus, on peut se demander quelle est la hauteur de $\mathfrak{a}$. On voit que, si $r = 1$,

$$\mathfrak{a} = (a_{1,1} , \ldots , a_{1,s})A$$

donc la hauteur de $\mathfrak{a}$ est $\leqslant s$. On va montrer qu'en général, la hauteur de tout idéal premier minimal de $\mathfrak{a}$ est $\leqslant s - r + 1$. Plus généralement, si $\mathfrak{a}$ est l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre $t \leqslant r$, alors la hauteur de tout idéal premier minimal de α est $\leqslant (r-t+1)(s-t+1)$.

Pour l'équidimensionalité on est ramené à introduire certaines notions homologiques qui s'y rattachent. Cette généralisation se trouve déjà dans COHEN (cf. [5]), mais c'est seulement beaucoup plus tard qu'on a pu donner des résultats précis (cf. [1], [2], [3], [7], [8], [9], [18]).

Les idéaux engendrés par des déterminants interviennent dans plusieurs questions d'algèbre commutative (cf. par exemple [14]). Il y a un type de tels idéaux, à savoir, ceux où les $a_{i,j}$ sont des indéterminées pour lesquels on peut trouver des résultats assez précis. Par exemple, si les $a_{i,j}$ sont des indéterminées sur un sous-anneau R de A tel que

$$A = R[a_{i,j}]_{1\leqslant i\leqslant r;\, 1\leqslant j\leqslant s}$$

et si α est l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre r extraits de la matrice $(a_{i,j})$, on démontre que α est un <u>idéal parfait</u>, c'est-à-dire,

$$\mathrm{prof}_{\alpha}(A) = \mathrm{dh}_A(A/\alpha) .$$

<u>Un exemple</u> d'idéal engendré par des déterminants formés d'indéterminées est le suivant. Soient k un corps, $x_1 , \dots , x_n , u , v$ des éléments algébriquement indépendants sur k , et V la k-variété de point générique

$$(ux_1 , \dots , ux_n ; vx_1 , \dots , vx_n) .$$

Alors l'idéal $I_k(V)$ de V est l'idéal de l'anneau de polynômes

$$k[X_1 , \dots , X_n ; Y_1 , \dots , Y_n]$$

engendré par les déterminants $X_i Y_j - X_j Y_i$ $(i < j)$ (cf. [14], chap. 1, § 3, lemme 3).

2. Le complexe de Koszul et le théorème de la hauteur.

Soient A un anneau, $\Lambda(A^s)$ l'algèbre extérieure du A-module libre A^s et

$$\Lambda(A^s) = \sum_{q=0}^{\infty} \Lambda_q(A^s)$$

sa graduation canonique. On rappelle que, le sous-A-module $\Lambda_q(A^s)$ des éléments homogènes de degré q de $\Lambda(A^s)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda_q(A^s) = A^{\binom{s}{q}} .$$

On considère une matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant r;\, 1\leqslant j\leqslant s}$ d'éléments de A , où $r \leqslant s$. Si l'on désigne par $e_1 , \dots , e_r$ la base canonique du A-module libre A^r , la t-ième ligne de la matrice ci-dessus détermine une différentielle

$$d_t : \Lambda_q(A^s) \to \Lambda_{q-1}(A^s) \quad \text{pour} \quad t = 1 , \dots , r ,$$

à savoir

$$d_t(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} a_{t,i_j}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \dots \wedge e_{i_q}) .$$

Soient maintenant $S(A^r) = A[X_1 , \dots , X_r]$ l'algèbre symétrique du A-module libre A^r et $S_q(A^r)$ le sous-A-module de $S(A^r)$ formé des éléments homogènes de degré q. On va décrire un complexe R ayant comme composantes R_0, $R_1, \dots, R_{s-r+1}$ définies par

$$R_0 = A \quad \text{et} \quad R_{q+1} = \Lambda_{r+q}(A^s) \otimes_A S_q(A^r) \quad \text{pour} \quad q = 0 , 1 , \dots , s - r .$$

Comme R_{q+1} est un A-module libre ayant pour base des éléments de la forme

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{r+q}}) \otimes (X_1^{j_1} \dots X_r^{j_r})$$

avec $1 \leqslant i_1 < \dots < i_{r+q} \leqslant r$ et $j_1 + \dots + j_r = q$, alors on pose, par définition.

$$d((e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{r+q}}) \otimes (X_1^{j_1} \dots X_r^{j_r})) = \sum_{\substack{t=1 \\ j_t \geqslant 1}}^{r} d_t(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{r+q}}) \otimes (X_1^{j_1} \dots X_t^{j_t - 1} \dots X_r^{j_r})$$

Pour $q = 0$, on pose $d((e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) \otimes 1) = \text{dét}(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant r ;\ i_1 \leqslant j \leqslant i_r}$. Il est facile de voir que $dd = 0$, que R est un complexe libre

$$0 \to R_{s-r+1} \xrightarrow{d} R_{s-r} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} R_1 \xrightarrow{d} R_0 \to 0$$

et que $d(R_1) = \alpha$, où α est l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre r extraits de la matrice $(a_{i,j})$. On verra plus loin qu'on obtient ainsi une résolution libre du A-module R/α, à savoir

$$0 \to R_{s-r+1} \to R_{s-r} \to \dots \to R_1 \to R_0 \to A/\alpha \to 0 .$$

On peut maintenant construire un nouveau complexe K, en posant, pour tout A-module M, $K = R \otimes M$. Si l'on désigne par K_q les composantes de K, alors $K_q = R_q \otimes_A M$ pour $q = 0 , 1 , \dots , s - r + 1$. Puisque R est un complexe libre, pour toute suite exacte de A-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, on a la suite exacte de complexes $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$. Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien,</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini et</u> α <u>l'idéal de</u> A <u>engendré par les déterminants d'ordre</u> r <u>extraits de la matrice</u> $(a_{i,j})$. <u>Si</u> $\alpha M \not\subseteq M$ <u>et si</u> q <u>est le plus grand entier tel que</u> $H_q(K) \neq 0$, <u>alors</u>

$$\text{prof}_\alpha(M) + q = s - r + 1 .$$

<u>En particulier,</u>

$$\text{prof}_\alpha(M) \leqslant s - r + 1 .$$

En effet, soit $t = \mathrm{prof}_{\alpha}(M)$. Si $t = 0$, tout élément de α est un diviseur de zéro dans M , et comme A est noethérien, il existe un élément x dans M , $x \neq 0$ tel que $\alpha x = 0$. A ce moment-là, on a $H_{s-r+1} \neq 0$ (cf. lemme 1), et donc, $q = s - r + 1$. Supposons que $t > 0$ et soit $a_1 , \dots , a_t$ une (α , M)-suite maximale (pour les notations et résultats sur la profondeur, on renvoie à l'excellent papier de HARADA, [10]). La suite exacte de A-modules

$$0 \to M \xrightarrow{a_1} M \to M/a_1 M \to 0$$

nous donne la suite exacte de complexes

$$0 \to K \xrightarrow{a_1} K \to K/a_1 K \to 0$$

et donc, la suite exacte d'homologie

$$\dots \to H_n(K) \xrightarrow{a_1} H_n(K) \to H_n(K/a_1 K) \to H_{n-1}(K) \xrightarrow{a_1} H_{n-1}(K) \to \dots$$

Soit p le plus grand entier tel que $H_p(K/a_1 K) \neq 0$. Puisque $\mathrm{prof}_{\alpha}(K/a_1K) = t - 1$ par l'hypothèse de récurrence on a $t - 1 + p = s - r + 1$. Pour $n \geqslant p + 1$, on a $H_n(K/a_1 K) = 0$, donc la suite

$$0 \to H_{n-1}(K) \xrightarrow{a_1} H_{n-1}(K) \to H_{n-1}(K/a_1 K) \to \dots ,$$

est exacte, c'est-à-dire, a_1 n'est pas diviseur de zéro dans $H_{n-1}(K)$. Comme a_1 est dans α , on peut trouver un entier convenable $m \geqslant 0$ tel que $a_1^m H_{n-1}(K) = 0$ (cf. lemme 2), donc $H_{n-1}(K) = 0$ pour tout entier $n \geqslant p + 1$. On a ainsi la suite exacte

$$0 \to H_p(K/a_1 K) \to H_{p-1}(K) \to \dots$$

et comme $H_p(K/a_1 K) \neq 0$, il s'ensuit que $H_{p-1}(K) \neq 0$. Ceci nous montre que $q = p - 1$, c'est-à-dire, $q + t = s - r + 1$.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> $\mathrm{prof}_{\alpha}(M) = s - r + 1$, <u>alors la suite</u>

$$0 \to K_{s-r+1} \to K_{s-r} \to \dots \to K_1 \to K_0 \to M/\alpha M \to 0$$

<u>est exacte</u>.

En effet, si $q = 0$, on a alors $H_n(K) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> $\mathrm{prof}_{\alpha}(A) = s - r + 1$, <u>alors</u>

$$0 \to R_{s-r+1} \to R_{s-r} \to \dots \to R_1 \to R_0 \to A/\alpha \to 0$$

<u>est une résolution libre de</u> A/α , <u>donc</u>

$$\mathrm{dh}_A(A/\alpha) = s - r + 1 .$$

En effet, d'après le corollaire 1, on a $dh_A(A/\alpha) < s - r + 1$ et le théorème de Rees (cf. [19]) nous dit que, pour tout idéal premier p associé à α, on a

$$\mathrm{prof}_p(A) \leqslant dh_A(A/\alpha) .$$

En particulier, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> $\mathrm{prof}_\alpha(A) = s - r + 1$, <u>alors</u> $\mathrm{prof}_p(A) = s - r + 1$ <u>pour tout idéal premier</u> p <u>associé à</u> α.

La démonstration du théorème 1 repose sur les deux lemmes suivants (cf. [8]) :

LEMME 1. - <u>Supposons qu'il existe un élément</u> x <u>dans</u> M, $x \neq 0$ <u>tel que</u> $\alpha x = 0$. <u>Alors on a</u> $H_{s-r+1}(K) \neq 0$.

LEMME 2. - <u>Il existe un entier</u> $m \geqslant 0$, <u>fonction de</u> r <u>et</u> s <u>tel que l'on ait</u> $\alpha^m H(K) = 0$.

3. <u>Le théorème de la hauteur</u>.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien et</u> α <u>l'idéal de</u> A <u>engendré par les déterminants d'ordre</u> t <u>extraits de la matrice</u> $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $t \leqslant r$. <u>Alors, la hauteur de tout idéal premier minimal de</u> α <u>est au plus égale à</u> $(r - t + 1)(s - t + 1)$.

On procède par récurrence sur r. Si $r = 1$, alors $t = 1$, et α est engendré par s éléments, et on applique le théorème de Krull-Cohen dans le cas classique. Supposons que $r > 1$, et, par localisation par rapport à un idéal premier minimal p de α, on peut supposer que A soit local, d'idéal maximal p et que α soit p-primaire. Si $t = 1$, α est engendré par rs éléments, et le théorème est démontré. Si l'un des éléments de la matrice $(a_{i,j})$ est inversible dans A, alors α est engendré par les déterminants d'ordre $t - 1$ extraits d'une matrice ayant $r - 1$ lignes et $s - 1$ colonnes, donc, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$h(\alpha) \leqslant (r - 1 - (t - 1) + 1)(s - 1 - (t - 1) + 1) = (s - t + 1)(r - t + 1) ,$$

où $h(\alpha)$ désigne la hauteur de l'idéal α. On peut donc supposer que l'on ait $t > 1$ et que les $a_{i,j}$ soient tous dans l'idéal p. On considère la matrice $(a_{i,j} + \delta_{1,j} X)$, où X est une indéterminée sur l'anneau A et δ le symbole de Kronecher. Si $\mathfrak{b}$ désigne l'idéal de $A[X]$ engendré par les déterminants d'ordre t qu'on peut extraire de la matrice ci-dessus, puisque $t > 1$ et que les $a_{i,j}$ sont tous dans p, alors $\mathfrak{b} \subset p[X]$. Si l'on pense à l'anneau quotient $A[X]/(X)$, on voit immédiatement que $\mathfrak{b} + (X) = \alpha[X] + (X)$, donc (cf. lemme 3), $\mathfrak{q} = p[X]$

est un idéal premier minimal de $\mathfrak{b}$. Puisque $a_{1,1} + X$ n'est pas dans q , par localisation par rapport à q on obtient

$$h(qA[X]_q) \leqslant (s - t + 1)(r - t + 1) .$$

On remarque que $\mathfrak{b}A[X]_q$ est un idéal $qA[X]_q$-primaire et que $a_{1,1} + X$ n'est pas dans $qA[X]_q$. D'autre part, étant donné que $h(qA[X]_q) = h(q)$ et que $h(q) = h(p)$, il s'ensuit que

$$h(p) \leqslant (s - t + 1)(r - t + 1) .$$

Dans la démonstration du théorème 2 on a utilisé le lemme suivant (cf. [8], lemme 4, page 202) :

LEMME 3. - Soient A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{a}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de A . Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de l'anneau de polynômes $A[X]$ ayant les propriétés

$$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}[X] \quad \text{et} \quad \mathfrak{b} + (X) = \mathfrak{a}[X] + (X) .$$

Alors, $\mathfrak{m}[X]$ est un idéal premier minimal de $\mathfrak{b}$.

On sait que si A est un anneau noethérien, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , on a

$$\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}}(A) \leqslant h(\mathfrak{a}) .$$

On dira que A est un anneau de Cohen-Macaulay si l'on a

$$\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}}(A) = h(\mathfrak{a})$$

pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A .

THÉORÈME 3 (théorème de l'équidimensionalité). - Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{a}$ l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre r extraits de la matrice $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $r \leqslant s$. Si A est un anneau de Cohen-Macaulay et si $h(\mathfrak{a}) = s - r + 1$, alors $\mathfrak{a}$ est équidimensionel.

En effet, puisque A est de Cohen-Macaulay, alors $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}}(A) = h(\mathfrak{a})$; d'autre part, $h(\mathfrak{a}) = s - r + 1$. D'après le corollaire 2 du théorème 1, on a

$$dh_A(A/\mathfrak{a}) = s - r + 1 ,$$

donc

$$dh_A(A/\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a}) .$$

Ceci nous dit que $\mathfrak{a}$ est équidimensionel, car, pour tout idéal premier p associé à l'idéal $\mathfrak{a}$, on a

$$h(p) \leqslant dh_A(A/\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a}) \leqslant h(p) ,$$

donc

$$h(\mathfrak{a}) = h(p) .$$

4. Matrices dont les éléments forment un A-ensemble.

Soient A un anneau commutatif noethérien et $\mathrm{Rad}(A)$ le radical de Jacobson de A. On sait que si $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de A qui forment une $(\mathrm{Rad}(A), A)$-suite, alors $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}$ est encore une $(\mathrm{Rad}(A), A)$-suite pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$. On peut alors poser la définition suivante : On dit qu'un sous-ensemble fini E de l'anneau A est un A-ensemble si $E \subset \mathrm{Rad}(A)$ et si les éléments de E arrangés dans un certain ordre forment une $(\mathrm{Rad}(A), A)$-suite.

On dira qu'un idéal α de l'anneau A est un idéal parfait si l'on a

$$\mathrm{prof}_\alpha(A) = \mathrm{dh}_A(A/\alpha) .$$

Soient C un anneau commutatif noethérien, $X_{i,j}$ $(1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq s, \ r \leq s)$ des indéterminées sur C, et $A = C[X_{i,j}]_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$. Soit α l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre r extraits de la matrice $(X_{i,j})$, alors on a :

PROPOSITION 1. - (i) $\mathrm{prof}_\alpha(A) = s - r + 1$;
(ii) l'idéal α est parfait ;
(iii) $\mathrm{prof}_\mathfrak{p}(A) = s - r + 1$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à α.

En effet, il suffit de démontrer (i), et pour cela, on n'a qu'à démontrer que $\mathrm{prof}_\alpha(A) \geq s - r + 1$. Si $r = 1$, c'est évident, car alors $X_{1,1}, \dots, X_{1,s}$ est une $(\alpha\text{-}A)$-suite. Supposons que $r > 1$ et que la proposition ait été démontrée pour des matrices ayant moins de r lignes. A ce moment-là, on fixe r, et on raisonne par récurrence sur s. Pour $s = r$, c'est évident, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,r} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ X_{r,1} & \dots & X_{r,r} \end{vmatrix}$$

n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau A. Supposons que $1 < r < s$ et que la proposition ait été démontrée pour des matrices avec r lignes et $s - 1$ colonnes. On pose

$$B = C[X_{1,1}, \dots, X_{1,s-1} ; \dots ; X_{r,1}, \dots, X_{r,s-1}]$$

et on désigne par $\mathfrak{b}$ l'idéal de B engendré par les mineurs d'ordre r extraits de la matrice $(X_{i,j})$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s - 1$. Soit $\mathfrak{c}$ l'idéal de l'anneau A engendré par les mineurs d'ordre r extraits de la matrice ci-dessus. Il est clair qu'on a $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}A$ et que, par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathrm{prof}_{\mathfrak{b}}(B) = (s-1) - r + 1 = s - r .$$

Donc, il existe une $(\mathfrak{b} , B)$-suite $a_1 , \dots , a_{s-r}$ qui est aussi une (α , A)-suite, car $\mathfrak{c} \subset \alpha$. L'idéal $(a_1 , \dots , a_{s-r})B$ est engendré par $s - r$ éléments et

$$\mathrm{prof}_{(a_1,\dots,a_{s-r})B}(B) = s - r .$$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier associé à $(a_1 , \dots , a_{s-r})B$, alors $\mathfrak{p}A$ est un idéal premier associé à $(a_1 , \dots , a_{s-r})A$ et $\mathrm{prof}_{\mathfrak{p}}(B) = s - r$. Il est clair que $\alpha \not\subset \mathfrak{p}A$. En effet, les déterminants d'ordre $r - 1$ extraits de la matrice $(X_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant r - 1$, $1 \leqslant j \leqslant s - 1$ engendrent, par l'hypothèse de récurrence, un idéal de B dont la profondeur est égale à $(s - 1) - (r - 1) + 1 = s - r + 1$. Par conséquent, il existe un de ces déterminants, soit d, qui n'est pas dans $\mathfrak{p}$. Si l'on pose

$$d' = \begin{vmatrix} X_{1,i_1} & \dots & X_{1,i_{r-1}} & \dots & X_{1,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{r-1,i_1} & \dots & X_{r-1,i_{r-1}} & \dots & X_{r-1,s} \\ X_{r,i_1} & \dots & X_{r,i_{r-1}} & \dots & X_{r,s} \end{vmatrix}$$

où le cofacteur de $X_{r,s}$ est d, puisque $d \notin \mathfrak{p}$, alors $d' \notin \mathfrak{p}A$, donc $\alpha \not\subset \mathfrak{p}A$. Etant donné que $\mathfrak{p}A$ est un idéal premier associé à $(a_1 , \dots , a_{s-r})A$, on a

$$(a_1 , \dots , a_{s-r})A : \alpha = (a_1 , \dots , a_{s-r})A ,$$

donc, il existe un $a_{s-r+1} \in \alpha$ tel que $a_1 , \dots , a_{s-r} , a_{s-r+1}$ soit une (α , A)-suite. Ceci nous montre que $\mathrm{prof}_{\alpha}(A) \geqslant s - r + 1$.

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> C <u>est un anneau noethérien intègre, alors</u> α <u>est un idéal premier de</u> A.

En effet, si $r = 1$, c'est évident, car $A/(X_{1,1} , \dots , X_{1,s})A = C$. Supposons $r > 1$, et soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ deux idéaux premiers associés à l'idéal α. On sait que

$$\mathrm{prof}_{\mathfrak{p}_1}(A) = \mathrm{prof}_{\mathfrak{p}_2}(A) = s - r + 1$$

et comme on a $2(s - r + 1) < 2s \leqslant rs$, car $r > 1$, alors il existe un $X_{i,j}$ qui n'est pas dans $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$.

Supposons que $X_{1,1}$ ne soit pas dans $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$, et soient

$$D = C[X_{1,2}, \dots, X_{1,s} ; X_{2,1}, \dots, X_{r,1} ; X_{1,1}]$$

et

$$S = \{1, X_{1,1}, X_{1,1}^2, \dots, X_{1,1}^q, \dots\}$$

la partie multiplicative de D formée par les puissances de $X_{1,1}$. On voit que $S^{-1}\mathbf{A} = S^{-1} D[X_{i,j}]_{i\geqslant 2, j\geqslant 2}$ et que $\mathfrak{a}S^{-1} A$ est l'idéal de $S^{-1} A$ engendré par les déterminants d'ordre r extraits de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & f_2 & \dots & f_s \\ g_2 & X_{2,2} & \dots & X_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_r & X_{r,2} & \dots & X_{r,s} \end{pmatrix}$$

car $X_{1,1}$ est inversible dans $S^{-1} D$ et les f_i et les g_j sont dans $S^{-1} D$.
Si on pose

$$Y_{i,j} = X_{i,j} - g_i f_j \qquad (i = 2, \dots, r ; \; j = 2, \dots, s),$$

alors on a

$$S^{-1} A = S^{-1} D[Y_{2,2}, \dots, Y_{2,s} ; \dots ; Y_{r,2}, \dots, Y_{r,s}]$$

et $\mathfrak{a}S^{-1} A$ est l'idéal de $S^{-1} A$ engendré par les déterminants d'ordre $r - 1$ qu'on peut extraire de la matrice

$$\begin{pmatrix} Y_{2,2} & \dots & Y_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{r,2} & \dots & Y_{r,s} \end{pmatrix}$$

De plus, les $Y_{i,j}$ sont algébriquement indépendants sur $S^{-1} D$, et par récurrence, $\mathfrak{a}S^{-1} A$ est un idéal premier de $S^{-1} A$. Il s'ensuit que

$$\mathfrak{a}S^{-1} A = \mathfrak{p}_1 S^{-1} A = \mathfrak{p}_2 S^{-1} A,$$

donc $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. Ainsi, $\mathfrak{a}$ n'a qu'un seul idéal premier, et $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}$ est premier.

Quant aux résultats concernant les A-ensembles (cf. [18]), nous nous limitons à mentionner les suivants :

PROPOSITION 3. - <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien et</u> $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $r \leqslant s$, <u>une matrice formée d'éléments de</u> A. <u>Soit</u> $\mathfrak{a}$ <u>l'idéal de</u> A <u>engendré par les déterminants d'ordre</u> r <u>extraits de la matrice ci-dessus. Si les éléments de la matrice forment un</u> A-<u>ensemble et s'ils engendrent un idéal premier, alors</u> $\mathfrak{a}$ <u>est aussi premier</u>.

PROPOSITION 4. - Soit E un A-ensemble ; supposons qu'il engendre un idéal premier. Alors tout sous-ensemble de E engendre un idéal premier.

5. Sur la fonction de Hilbert.

Soient C un anneau obéissant à la condition de chaîne descendante (par exemple, un corps ou un anneau d'Artin) et $A = C[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau de polynômes à m indéterminées et à coefficients dans C. On sait (cf. [20], chap. VII; § 12) que, pour tout A-module gradué M de type fini, le sous-A-module M_q des éléments homogènes de degré q est de longueur finie $\varphi_M(q) = \ell(M_q) < \infty$. Pour tout idéal homogène α de l'anneau A, la fonction $\varphi_{A/\alpha}(q)$ s'appelle la fonction de Hilbert ou la fonction caractéristique de l'idéal α. Puisque l'on peut écrire

$$\varphi_{A/\alpha}(q) = c_0\binom{q}{d} + c_1\binom{q}{d-1} + \dots + c_{d-1}\binom{q}{1} + c_d ,$$

où les c_i sont des entiers et où $d = \dim(A/\alpha) - 1$ (dimension au sens de KRULL), alors on a

$$\varphi_{A/\alpha}(q) = (q^d/d!)\ \mathrm{ord}(A/\alpha) + o(q^d) ,$$

où $\mathrm{ord}(A/\alpha)$ est l'ordre du A-module gradué A/α. En général, on tombe dans des difficultés, quand on essaye de calculer $\varphi_{A/\alpha}(q)$ ou encore, $\mathrm{ord}(A/\alpha)$. Un cas facile est celui où α appartient à la classe principale, c'est-à-dire $\alpha = (f_1, \dots, f_s)A$, où chaque f_i est une forme de degré n_i et $h(\alpha) = s$. A ce moment-là, on montre que

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varphi_{A/\alpha}(q)X^q = (1 - X^{n_1}) \dots (1 - X^{n_s})\ \ell(C)/(1 - X)^m$$

et

$$\mathrm{ord}(A/\alpha) = n_1 \dots n_s\ \ell(C) ,$$

où $\ell(C)$ désigne la longueur du A-module C.

On considère maintenant une matrice $(f_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $r \leqslant s$, d'éléments de A, et soit α l'idéal de A engendré par les déterminants d'ordre r qu'on peut extraire de la matrice ci-dessus. On sait que $h(\alpha) \leqslant s - r + 1$. Si $h(\alpha) = s - r + 1$, alors

$$0 \to R_{s-r+1} \to R_{s-r} \to \dots \to R_1 \to R_0 \to A/\alpha \to 0$$

est une résolution libre de A/α, donc

$$\varphi_{A/\alpha}(q) = \sum_{j=0}^{s-r+1} (-1)^j\ \varphi_{R_j}(q) , \qquad -\infty < q < +\infty .$$

On a ainsi

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_{A/\alpha}(q)X^q = \sum_{j=0}^{s-r+1} (-1)^j \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_{R_j}(q)X^q .$$

Si L est un A-module libre gradué ayant une base à un seul élément de degré p, on a $\varphi_L(q) = \varphi_A(q-p)$, donc

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_L(q)X^q = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_A(q-p)X^q$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_A(q)X^{q+p} = X^p \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_A(q)X^q = X^q \, \ell(C)/(1-X)^m .$$

Plus généralement on aura

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_{R_j}(q)X^q = \varphi_j(X) \, \ell(C)/(1-X)^m ,$$

où les fonctions $\varphi_j(X)$ sont fonctions des degrés des formes $f_{i,j}$ et des degrés des éléments d'une base des R_j. Pour une formulation explicite des $\varphi_j(X)$, on renvoie à [9]. On remarquera que chaque R_j est un A-module libre ayant une base avec $\binom{s}{r+j-1}\binom{r+j-2}{j-1}$ éléments. On a ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Si $\mathfrak{a} \neq A$ et si $h(\mathfrak{a}) = s - r + 1$, alors on a

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varphi_{A/\mathfrak{a}}(q)X^q = \Big(\sum_{j=1}^{s-r+1} \varphi_j(X)\Big) \, \ell(C)/(1-X)^m .$$

Pour le calcul de l'ordre, au moins dans certains cas particuliers, on renvoie à [9].

Note. - Des travaux récents de BUCHSBAUM et RIM (cf. [1], [2] et [3]) généralisent pas mal de résultats exposés ici. Entre autres, le complexe de Koszul et le théorème de l'équidimensionalité (cf. théorème 3) y sont généralisés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUCHSBAUM (D. A.) and RIM (R. S.). - A generalized Koszul complex, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 382-385.

[2] BUCHSBAUM (D. A.). - A generalized Koszul complex, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 111, 1964, p. 183-196.

[3] BUCHSBAUM (D. A.) and RIM (R. S.). - A generalized Koszul complex, II : Depth and multiplicity, Trans. Amer. math. Soc., t. 111, 1964, p. 157-224.

[4] COHEN (I. S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[5] COHEN (I. S.). - Unmixed ideals, Conference on algebraic geometry and algebraic number theory [January 1949. University of Chicago, Department of Mathematics] (non publié).

[6] DUBREIL (P.). - Idéaux de polynômes et fonction de Hilbert, Atti del Convegno internazionale di Geometria algebrica [1961. Torino], p. 151-164. - Torino, L. Rattero, 1962.

[7] EAGON (J. A.). - Ideals generated by the subdeterminants of a matrix (Thesis Phil. Doct., Univ. Chicago, 1961).

[8] EAGON (J. A.) and NORTHCOTT (D. G.). - Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, Proc. Royal Soc., t. 269, 1962, p. 188-204.

[9] EAGON (J. A.) and NORTHCOTT (D. G.). - A note on the Hilbert fonctions of certains ideals which are defined by matrices, Mathematika, t. 9, 1962, p. 118-126.

[10] HARADA (M.). - Some remarks on M-sequences in noetherian rings, J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., t. 9, 1958, p. 39-41.

[11] HILBERT (D.). - Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen, t. 36, 1890, p. 473-534.

[12] KRULL (W.). - Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Sitzungsb. Heidelberg Akad. Wiss., 1928, n° 7, 14 p.

[13] MACAULAY (F. S.). - The algebraic theory of modular systems. - Cambridge, at the University Press, 1916 (Cambridge Tracts in Math. and math. Physics, 19).

[14] MICALI (A.). - Sur les algèbres universelles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 14, 1964, p. 33-88 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[15] NAGATA (M.). - Local rings. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and appl. Math., 13).

[16] NORTHCOTT (D. G.). - Ideal theory. - Cambridge, at the University Press, 1953 (Cambridge Tracts in pure and appl. Math., 42).

[17] NORTHCOTT (D. G.). - Semi-regular rings and semi-regular ideals, Quart. J. Math., Oxford Series, t. 11, 1960, p. 81-104.

[18] NORTHCOTT (D. G.). - Some remarks on the theory of ideals defined by matrices, Quart. J. Math. Oxford Series, t. 14, 1963, p. 193-204.

[19] REES (D.). - The grade of an ideal or module, Proc. Cambridge Phil. Soc., t. 53, 1957, p. 28-42.

[20] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol. 2. - Princeton, Van Nostrand Company, 1960.