Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Julien Querré

Plus grand groupe image homomorphe et isotone d'un monoïde ordonné : caractérisations des anneaux « clos »

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1966-1967), exp. n° 8, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1966-1967__20_1_A7_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
20e année, 1966/67, n° 8

16 janvier 1967

PLUS GRAND GROUPE IMAGE HOMOMORPHE ET ISOTONE D'UN MONOÏDE ORDONNÉ : CARACTÉRISATIONS DES ANNEAUX "CLOS"

par Julien QUERRÉ

Soit D un monoïde ordonné. Convenons d'associer à D la catégorie $\Gamma(D)$ dont les objets sont les épimorphismes croissants de D sur les groupes ordonnés.

Si $\varphi : D \to G$ et $\varphi' : D \to G'$ sont deux objets, une flèche $\theta \in \mathrm{Mor}(\varphi , \varphi')$ est un épimorphisme croissant $\theta : G \to G'$, tel que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\theta"] & & G' \\ & D \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

On se propose de déterminer les conditions d'existence d'un objet initial de cette catégorie, c'est-à-dire les conditions d'existence d'un groupe ordonné Γ et d'un épimorphisme croissant $\varphi : D \to \Gamma$ tel que, pour tout épimorphisme croissant ψ de D sur un groupe G , on ait un, et un seul, épimorphisme croissant $\theta : \Gamma \to G$ avec $\theta \circ \varphi = \psi$. On dira que Γ est le <u>plus grand groupe image homomorphe et isotone de</u> D .

On sait que le monoïde de leurs idéaux fractionnaires (fini ou non) permet de caractériser les anneaux "clos", c'est-à-dire les anneaux intégralement clos, complètement intégralement clos, Krull et Dedekind. Il est remarquable que ces caractérisations sont liées à l'existence d'un plus grand groupe image homomorphe et isotone du monoïde des idéaux fractionnaires. Aussi conviendrons-nous d'appeler <u>monoïde ordonné clos</u> tout monoïde ordonné D dont la catégorie associée $\Gamma(D)$ admet un objet initial.

1. Théorème fondamental.

Soit D un monoïde ordonné. Une partie H de D sera dite <u>anticône</u> de D si elle vérifie les propriétés suivantes :

1° H est un sous-monoïde de D ,

2° H est héréditaire ($x \in H$ et $y < x$ entraîne $y \in H$) ,

3° H est réflective ($xy \in H$ entraîne $yx \in H$) , 4° H est fortement net (pour tout a, il existe un a' tel que $a'a \in H$ et tel que $xa'a \in H$ entraîne $x \in H$).

On peut énoncer le résultat suivant [1] :

Il y a bijection entre l'ensemble des groupes images homomorphes et isotones du monoïde ordonné D et l'ensemble $\mathcal{C}$ des anticônes de D.

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des équivalences principales [5] associées aux anticônes

$$H \in \mathcal{C} , \qquad a \equiv b \ (R_H) \iff H : a = H : b .$$

Chaque groupe image homomorphe et isotone de D est donné par D/R_H.

LEMME. - <u>Le monoïde ordonné</u> D <u>est clos si, et seulement si,</u> $\mathcal{R}$ <u>admet un plus petit élément</u>.

Soit R_H le plus petit élément de $\mathcal{R}$; $\varphi : D \longrightarrow D/R_H$ l'épimorphisme canonique. Tout groupe homomorphe et isotone à D est de la forme D/R_K avec $R_K \in \mathcal{R}$ et $R_H \subseteq R_K$. Notons $\psi : D \longrightarrow D/R_K$ l'épimorphisme canonique. Considérons la correspondance

$$\theta : D/R_H \longrightarrow D/R_K \text{ tel que } \varphi(a) \mapsto \psi(a) .$$

C'est une application car

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff a \equiv b \ (R_H) \implies a \equiv b \ (R_K) ,$$

d'où

$$\psi(a) = \psi(b) .$$

Il est clair que c'est un épimorphisme croissant tel que $\psi = \theta \circ \varphi$. La réciproque est évidente.

Dans un monoïde ordonné D, on appelle <u>quasi-résiduels</u> de a par b les ensembles

$$\langle a \,.\!\cdot\, b\rangle = \{x \ ; \ bx \leq a\} ; \qquad \langle a \,\cdot\!.\, b\rangle = \{x \ ; \ xb \leq a\} .$$

Un monoïde ordonné, tel que, pour tout couple (a , b) d'éléments, les quasi-résiduels $\langle a \,\cdot\!.\, b\rangle$ et $\langle a \,.\!\cdot\, b\rangle$ ne sont pas vides, est dit <u>quasi-résidué</u>. Si les quasi-résiduels de a par b possèdent chacun un plus grand élément, ces plus grands éléments seront respectivement notés $a \,\cdot\!.\, b$ et $a \,.\!\cdot\, b$ et appelés résiduels de a par b. Si pour tout couple (a , b) d'éléments, les résiduels $a \,\cdot\!.\, b$ et $a \,.\!\cdot\, b$ existent, le monoïde sera dit <u>résidué</u>.

Les quasi-résiduels d'un élément a par lui-même sont, s'ils existent, des monoïdes héréditaires. En effet :

$$x\ ,\ y \in \langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle = \begin{cases} ax \leqslant a \\ ay \leqslant a \end{cases}$$

d'où $axy \leqslant ay < a$ et $xy \in \langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle$, $x \in \langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle$ et $y < x \implies ax \leqslant a$, puis $ay < ax \leqslant a$, d'où $y \in \langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle$. Ces sous-monoïdes héréditaires seront dit <u>sous-monoïdes principaux</u> de D , et on notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-monoïdes principaux non vides de D , et P l'union de ces sous-monoïdes principaux.

Soient K un anticône de D et $\langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle$ un sous-monoïde principal non vide, $x \in \langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle$ entraîne $ax < a$. Mais, il existe a' tel que $a'a \in K$, d'où $a'ax < a'a$; K est héréditaire, donc $a'ax \in K$, d'où $x \in K$ et $\langle a \mathbin{.\!\!\cdot} a\rangle \subset K$, donc K contient tous les sous-monoïdes principaux, c'est-à-dire :

$$P \subset K \qquad \text{quel que soit } K \in \mathcal{C}\ .$$

THÉORÈME 1. - <u>Un monoïde ordonné, dont l'union</u> P <u>des sous-monoïdes principaux est un complexe net, est clos si, et seulement si,</u> $\mathcal{C}$ <u>admet un plus petit élément.</u>

Supposons que $\mathcal{C}$ admette un plus petit élément H . Considérons l'équivalence principale R_H sur D , et soit K un anticône quelconque de D , distinct de H . On a $H \subset K$. Les classes unités des groupes D/R_H et D/R_K sont respectivement

$$E = \{u\ ;\ H : u = H\} \qquad \text{et} \qquad F = \{v\ ,\ K : v = K\}\ .$$

Soient u un élément de E , et $x \in D$ tel que $x \in K : u$. On a

$$P \subset H = H : u \subset K : u\ .$$

Il existe donc u' tel que $uu' \in K$, $u' \in P$, et w tel que $u'w < w$ ce qui entraîne

$$xuu'w < xuw\ .$$

Soit w' tel que $ww' \in K$, ce qui permet d'écrire $xuu'ww' < xuww'$. Or $xu \in K$, donc $xuww' \in K$ et, puisque K est héréditaire, $xuu'ww' \in K$; enfin, K étant fortement net, $x \in K$. Ainsi $K : u \subset K$. Inversement, soit $y \in K$, P est réflectif, car, si $xy \in P$, il existe w tel que $xyw < w$, ce qui entraîne

$$yxyw < yw\ ,$$

d'où

$$yx \in \langle yw \mathbin{\cdot\!\!.} yw\rangle \subset P\ ,$$

donc $yx \in P$. Si P est net, et $u \in E$, $P : u \neq \emptyset$, et on a

$$P : u \subset H = H : u \subset K .$$

On peut donc trouver u_1 tel que $uu_1 \in P$, $u_1 \in K$, et w tel que $uu_1 w < w$, puis $yuu_1 w < yw$. Soit w' tel que $ww' \in K$, on a $yuu_1 ww' < yww'$. Puisque K est anticône, $yu \in K$ et $K \subset K : u$. Finalement $K : u = K$, c'est-à-dire $E \subset F$. Donc

$$E : a \subset F : a \qquad \text{et} \qquad E : b \subset F : b .$$

Si $E : a = E : b$, $(F : a) \cap (F : b) \neq \emptyset$, F étant un complexe fort,

$$F : a = F : b .$$

Ainsi $R_E \subset R_F$, c'est-à-dire $R_H \subset R_K$, R_H est donc la plus fine congruence de D fournissant une image qui est un groupe homomorphe et isotone de D ; D est clos, $D/R_H \simeq D/R_E$ est donc le plus grand groupe homomorphe et isotone, image de D .

Réciproquement, supposons que D admette un plus grand groupe image homomorphe et isotone. Notons H l'anticône correspondant, E la classe unité du groupe D/R_H . Soit K un anticône quelconque, F la classe unité du groupe D/R_K . Il est clair que $E \subset F$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & D/R_K \\
& D/R_H \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

φ et ψ désignant les épimorphismes canoniques.

Si $a \in H \Longrightarrow \varphi(a) \leq E$, d'où $\theta \circ \varphi(a) \leq F$, soit $\psi(a) \leq F$, c'est-à-dire $a \in K$, donc $H \subseteq K$, et H est le plus petit élément de $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE. - D <u>est clos si</u> P <u>est un sous-monoïde fortement net</u>.

On a vu que P est réflectif. Il est héréditaire comme union des sous-monoïdes héréditaires ; P est donc un anticône en vertu des hypothèses ; c'est nécessairement le plus petit anticône de D .

2. Immersion d'un monoïde ordonné dans un monoïde clos.

Soient D un monoïde ordonné unitaire et N l'ensemble des entiers naturels. Munissons $T = N \times D \times N$ de la loi

$$(m , d , n)(m' , d' , n') = (m + [m' - n] , f(n - m' ; d , d') , n' + [n - m'])$$

$$[x] = \begin{cases} x \geq 0 & x \\ x < 0 & 0 \end{cases} \qquad f(x , d , d') = \begin{cases} x > 0 & d \\ x = 0 & dd' \\ x < 0 & d' \end{cases}$$

R. H. BRUCK [4] a montré que, muni de cette loi, T est un monoïde simple ayant $(0 , 1 , 0)$ pour élément unité et dans lequel D peut être immergé.

Considérons dans T la relation

$$(m , d , n) \leq (m' , d' , n') \iff \begin{array}{l} m = m' \\ d \leq d' \quad (\text{dans } D). \\ n = n' \end{array}$$

Il est clair que c'est une relation d'ordre dans T. Vérifions que cette relation est compatible avec la loi de T

$$(x , y , z)(m , d , n) = (x + [m - z] , f(z - m ; y , d) , n + [z - m])$$

$$(x , y , z)(m' , d' , n') = (x + [m' - z] , f(z - m' ; y , d') , n' + [z - m']) .$$

Si $(m , d , n) \leq (m' , d' , n')$, on a $m = m'$; $n = n'$ et $d \leq d'$. Dans ces conditions

$$x + [m - z] = x + [m' - z]$$

$$n + [z - m] = n' + [z - m']$$

d'autre part

$$\begin{array}{l} z > m \\ z = m \\ z < m \end{array} \qquad f(z - m ; yd) = \begin{cases} f(z - m' ; y , d') = y \\ yd \leq yd' = f(z - m' ; y , d') \\ d \leq d' = f(z - m' ; y , d') \end{cases}$$

donc

$$(x , y , z)(m , d , n) \leq (x , y , z)(m' , d' , n') .$$

On montrerait de même :

$$(m , d , n)(x , y , z) \leq (m' , d' , n')(x , y , z) .$$

L'application $D \longrightarrow T$ telle que $d \longmapsto (0 , d , 0)$ est un monomorphisme croissant.

Soit H un anticône de D. Considérons l'ensemble

$$H^* = \{(x , h , x) ; x \in N , h \in H\}$$

H^* est un sous-monoïde de T :

$$(x , h , x)(y , h' , y) = (x + [y - x] , f(x - y ; h , h') , y + [x - y])$$

où $x + [y - x] = y + [x - y]$ et $f(x - y ; h , h') = h$ ou hh' ou h' .

H^* est héréditaire

$$(y , u , z) \leqslant (x , h , x) \implies x = y \text{ et } z = x ,$$

d'où $y = z$ et $u \leqslant h$, donc puisque H est héréditaire, $u \in H$ et

$$(y , u , z) \in H^* .$$

H^* est net.

Soit $a = (x , d , y)$ un élément quelconque de T . Il existe $d' \in D$ tel que $d'd \in H$. Posons $a' = (y , d' , x)$, d'où

$$a'a = (y + [x - x] , f(x - x ; d' , d) , y + [x - x]) = (y , d'd , y) \in H^* .$$

H^* n'est pas en général fortement net.

Supposons que $ba'a \in H^*$ avec $b = (u , v , w)$,

$$(u , v , w)(y , d'd , y) = (u + [y - w] , f(w - y , v , d'd) , y + [w - y])$$

$$ba'a \in H^* \implies u + [y - w] = y + [w - y]$$

$$\left.\begin{array}{ll} y > w , & u + y - w = y \\ y = w , & u = y \\ y < w , & u = y + w - y \end{array}\right\} \implies u = w \qquad f(w - y ; v , d'd) = \begin{cases} v \\ vd'd \\ d'd \end{cases} .$$

Mais v reste un élément quelconque de D , donc $b \notin H^*$ sauf si $H = D$, de plus

$$D^* = \{(x , d , x) ; x \in N ; d \in D\}$$

est réflectif car, si $(m , d , n)(m' , d' , n') \in D^*$, on a

$$m + [m' - n] = n' + [n - m'] \implies m + m' = n' + n$$

condition symétrique qui entraîne $(m' , d' , n')(m , d , n) \in D^*$. D^* est donc un anticône de T ; c'est même un sous-monoïde normal de T car il est unitaire.

Soit K^* un anticône de T contenu dans D^* , donc les éléments de K^* sont de la forme (x , k , x) . Notons

$$K = \{k \in D ; \text{il existe } x \in N \text{ tel que } (x , k , x) \in K^*\} .$$

K est un sous-monoïde de D . Si $k , k' \in K$,

$$(x , k , x)(x , k' , x) = (x , kk' , x) \in K^* ,$$

donc $kk' \in K$.

K est héréditaire. Soit $d \leqslant k$, $k \in K$. On a $(x , d , x) \leq (x , k , x)$, mais $(x , k , x) \in K^*$, donc K^* étant héréditaire $(x , d , x) \in K^*$ et $d \in K$.

K est réflectif. Supposons $dd' \in K$, donc $(m , d , n)(n , d' , m) \in K^*$, mais K^* étant réflectif

$$(n , d' , m)(m , d , n) = (n , d'd , n) \in K^* ,$$

d'où $d'd \in K$.

K est net. Soit d un élément quelconque de D , $a = (m , d , n)$ est un élément quelconque de T ; puisque K^* est net, il existe $a' = (m' , d' , n')$ tel que $aa' \in K^*$, donc

$$m + [m' - n] = n' + [n - m'] \implies m + m' = n' + n ;$$

de plus, $f(n - m' ; d , d') \in K$ si $n \neq m'$, ceci imposerait d ou $d' \in K$, et $K^* = D^*$, ce qui est contraire à l'hypothèse donc $n = m'$, d'où $m = n'$ et $f(n - m' ; d , d') \in K$, c'est-à-dire $dd' \in K$.

K est fortement net. Soit $y \in D$ tel que $ydd' \in K$,

$$(m , y , m)(m , dd' , m) = (m , ydd' , m) \in K^* ,$$

d'où $(m , y , m) \in K^*$ et $y \in K$.

Ainsi donc K est un anticône de D . Il y a donc contradiction avec les résultats obtenus plus haut c'est-à-dire que D^* est le plus petit anticône de T . On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Tout monoïde ordonné unitaire peut être plongé dans un monoïde ordonné unitaire simple et clos.

3. Monoïdes réguliers clos.

Rappelons qu'un monoïde D est dit régulier si, pour tout $a \in D$, il existe $x \in D$ tel que $axa = a$. En posant $a' = xax$, on obtient

$$a = aa'a \qquad \text{et} \qquad a' = a'aa' .$$

Un tel élément a' est appelé un inverse généralisé ou, plus brièvement, un inverse de a . Deux types de monoïdes réguliers retiendront ici notre attention :

(a) les monoïdes réguliers, tels que chaque élément a admet un inverse unique noté a^{-1} , appelés monoïdes inverses de Preston.

(b) les monoïdes, tels que, pour tout a , il existe x vérifiant

$$axa = a \qquad \text{et} \qquad ax = xa ,$$

appelés <u>monoïdes complètement réguliers</u>.

Soit D un monoïde inverse de Preston. Il est immédiat que la relation

$$a < b \iff aa^{-1} = ab^{-1} \iff aa^{-1} = ba^{-1}$$

est une relation d'ordre compatible avec l'opération du monoïde, relation d'ordre qui sera dite naturelle. Dans un tel monoïde, les quasi-résiduels existent car

$$ab^{-1} \in \langle a \therefore b\rangle \qquad \text{et} \qquad b^{-1} a \in \langle a \because b\rangle .$$

Soit E l'ensemble des idempotents. Considérons l'ensemble

$$\overline{E} = \{x \in D \ ; \text{ il existe } \alpha \in E \text{ tel que } \alpha \leqslant x\} .$$

Il est évident que $\overline{E}$ est un sous-monoïde de D et que $E \subset \overline{E}$. On peut aussi remarquer que si $u \in E$, $ua \leqslant a$ et $au \leqslant a$ quel que soit $a \in D$. On a en effet,

$$(ua)(ua)^{-1} = uaa^{-1} u = uaa^{-1}$$

donc E est un minorant de $\mathcal{P}$, ensemble des sous-monoïdes principaux.

THÉORÈME 3. - <u>Tout monoïde inverse de Preston est clos pour la relation d'ordre naturelle</u>.

D'une part, $\overline{E}$ est fortement net car, quel que soit $x \in D$, il existe x^{-1} tel que $xx^{-1} \in E \subset \overline{E}$. De plus, si $yxx^{-1} \in \overline{E}$, il existe $v \in E$ tel que $v < yxx^{-1}$. Mais $yxx^{-1} < y$, car $xx^{-1} \in E$, donc $v < y$ et $y \in E$.

$\overline{E}$ est réflectif ; supposons $u \in E$ tel que $u < xy$, donc $yu < yxy$, puis

$$yuy^{-1} < yxyy^{-1} < yx ,$$

car $yy^{-1} \in E$; or $yuy^{-1} \in E$, donc $yx \in \overline{E}$. Enfin $\overline{E}$ est héréditaire. Soit $x \in \overline{E}$, donc il existe $u \in E$ tel que $u < x$ et soit $y < x$,

$$u < x \iff uu^{-1} = ux^{-1} = ux \ ; \quad y < x \iff yy^{-1} = yx^{-1} \iff y^{-1} y = y^{-1} x ,$$

d'où $y^{-1} yu = y^{-1} xu$, mais $xu \in E$, donc $y^{-1} yu < y^{-1}$ et $y^{-1} \in \overline{E}$. Si l'on remarque que $a < b \iff a^{-1} < b^{-1}$, on aura aussi $y^{-1} yu < y$, et donc $y \in \overline{E}$. $\overline{E}$ est donc un anticône et contient P , union des sous-monoïdes principaux. Soit $x \in \overline{E}$, il existe donc $\alpha \in E$ tel que $\alpha < x$, c'est-à-dire $\alpha = x\alpha$, donc $x \in \langle \alpha \therefore \alpha\rangle \subseteq P$, c'est-à-dire $\overline{E} \subseteq P$. Il en résulte $\overline{E} = P$.

HOWIE [8] a montré que la congruence $x \equiv y \quad (R) \iff xy^{-1} \in \overline{E}$ fournit le plus grand groupe homomorphe à D . Mais $xy^{-1} \in \overline{E}$ entraîne $x^{-1}y \in \overline{E}$. Si $ax \in \overline{E}$, on a $ax^{-1}y \in \overline{E}$, puis $xx^{-1}ya \in \overline{E}$ et, puisque E est fortement net, $ya \in \overline{E}$, donc $\overline{E} : x \subseteq \overline{E} : y$, d'où l'égalité, par symétrie, soit $x \equiv y \quad (R_{\overline{E}})$. Réciproque immédiate. $D/R_{\overline{E}}$ est donc le plus grand groupe homomorphe à D ; compte tenu de la relation d'ordre et du fait que $\overline{E}$ est un anticône, c'est aussi le plus grand groupe image homomorphe et isotone de D .

Soit D un monoïde ordonné ; $a \between b$ signifiera " a comparable à b ". On appelle équivalence "zig-zag" sur D l'équivalence

$$a \equiv a' \quad (\rho) \iff \text{il existe } a_1 , \ldots , a_n \text{ en nombre fini}$$

tels que $a \between a_1 , \ldots , a_i \between a_{i+1} , \ldots , a_n \between a'$.

Il est clair que (ρ) est compatible avec l'opération du monoïde, donc D/ρ muni de la loi-quotient est aussi un monoïde image homomorphe de D . Définissons dans D/ρ la relation d'ordre par l'égalité. Soit $f : D \longrightarrow D/\rho$ l'épimorphisme canonique ; $a < b \implies \mathring{a} = \mathring{b}$, donc cet épimorphisme est croissant. D/ρ peut-il être un groupe-image homomorphe et isotone de D ? L'existence des quotients est assurée si D est quasi-résidué car, pour tout couple $(\mathring{a} , \mathring{b})$, on peut trouver $\dot{x}$ tel que $\mathring{b}\dot{x} = \mathring{a}$, et $\dot{y}$ tel que $\dot{y}\mathring{b} = \mathring{a}$. Il suffit de prendre $x \in \langle a \,.\!\!\cdot\, b \rangle$ et $y \in \langle a \,\cdot\!\!.\, b \rangle$. M.-L. DUBREIL-JACOTIN [6] a montré que la règle de simplification pour ρ est également vraie si D est "fortement quasi-résidué". Ce résultat tient aussi dans un monoïde inverse de Preston ordonné par la relation d'ordre naturelle. Soit, en effet,

$$\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in \langle a \,.\!\!\cdot\, b \rangle \;, \qquad \text{d'où} \quad \begin{matrix} bx < a \\ by < a \end{matrix}$$

d'où $a^{-1}bx < a^{-1}a$ et $a^{-1}by < a^{-1}a$. On peut donc supposer $a \in E$,

$$\left.\begin{matrix} bx < a \implies e = (bx)^{-1}(bx) = abx < a & e \in E \\ by < a \implies f = (by)^{-1}(by) = aby < a & f \in E \end{matrix}\right\} \implies e \equiv f \quad (\rho)$$

$$b^{-1}ae = (b^{-1}a)(ab)x < x \implies x \between b^{-1}ae$$

$$b^{-1}af = (b^{-1}a)(ab)y < y \implies y \between b^{-1}af$$

mais $b^{-1}ae \equiv b^{-1}af \quad (\rho)$, d'où $x \equiv y \quad (\rho)$.

Soit donc $zx \equiv zy \quad (\rho)$; on a $\overset{\circ}{\widehat{zx}} = \dot{\widehat{zy}} = t$ avec $t = zx$. Posons $\dot{u}$ la classe contenant $\langle t \;\dot{.}\; z\rangle$, donc $x \in \dot{u}$ et $\dot{x} = \dot{u}$. De même, $\dot{y} = \dot{u}$, d'où $x \equiv y \quad (\rho)$. Etude analogue à droite. D/ρ est donc un groupe homomorphe et isotone de D et on peut énoncer le théorème ci-après.

THÉORÈME 4. - <u>Si</u> D <u>est un monoïde inverse de Preston, ordonné par la relation d'ordre naturelle, et</u> ρ <u>l'équivalence "zig-zag", il existe un épimorphisme croissant</u>

$$D/R_{\overline{E}} \longrightarrow D/\rho \ .$$

SAITÔ [12] a caractérisé les monoïdes totalement ordonnés complètement réguliers. On peut donner à cette caractérisation la forme suivante :

Soit Λ un monoïde ordonné dont tous les éléments sont idempotents et l'ordre total. On note T_Λ le demi-treillis qui lui est associé, et $\Gamma(\Lambda)$ la catégorie tel que $\text{ob}\,\Gamma(\Lambda) = T_\Lambda$; $\mathfrak{F}_\ell(\Gamma(\Lambda))$ est le graphe de la relation d'ordre de T_Λ ; donc une flèche de $\Gamma(\Lambda)$ est un couple d'éléments de T_Λ tel que $\alpha \leqslant \beta$. Enfin, $\Gamma(G)$ est la catégorie des groupes totalement ordonnés.

On considère un foncteur contravariant $F : \Gamma(\Lambda) \longrightarrow (\Gamma(G))^*$.

$$\begin{aligned} F_{ob} : T_\Lambda &\longrightarrow \text{ob}\,\Gamma(G) \\ \alpha &\longrightarrow G(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{F}_\ell} : \mathfrak{F}_\ell(\Gamma(\Lambda)) &\longrightarrow \mathfrak{F}_\ell(\Gamma(G))^* \\ \underset{\alpha \leqslant \beta}{(\alpha , \beta)} &\longrightarrow \varphi_\alpha^\beta : G(\beta) \longrightarrow G(\alpha) \end{aligned}$$

Notons $\Lambda(\alpha)$ la $\mathcal{D}$-classe d'équivalence qui correspond à $\alpha \in T_\Lambda$, et $D(\alpha)$ l'ensemble des couples (g , f) avec $g \in G(\alpha)$, $f \in \Lambda(\alpha)$. Enfin,

$$D = \bigcup_{\alpha \in T_\Lambda} D(\alpha) \ .$$

Cet ensemble munit du produit

$$\begin{matrix} (g , f) \in D(\alpha) , \\ (g' , f') \in D(\beta) , \end{matrix} \qquad (g , f)(g' , f') = (\varphi^\alpha_{\alpha\circ\beta}(g)\, \varphi^\beta_{\alpha\circ\beta}(g') , ff')$$

et de la relation d'ordre

$$(y\ ,\ f) \leqslant (g'\ ,\ f') \iff \begin{cases} \varphi^{\alpha}_{\alpha\circ\beta}(g) < \varphi^{\beta}_{\alpha\circ\beta}(g') \\ \text{ou} \\ \varphi^{\alpha}_{\alpha\circ\beta}(g) = \varphi^{\alpha}_{\alpha\circ\beta}(g')\ ,\quad f \leqslant f' \end{cases}$$

est un monoïde totalement ordonné complètement régulier et tout monoïde de ce type peut s'obtenir de cette manière. Λ et F sont donc des invariants caractéristiques.

Les idempotents de D sont de la forme $(e_\alpha\ ,\ f)$, où e_α est l'élément neutre de $G(\alpha)$. L'ensemble E des idempotents est un sous-monoïde de D . On notera que $(g^{-1}\ ,\ f)$ est un inverse de $(g\ ,\ f)$.

LEMMES.

(a) $(e_\alpha\ ,\ f)(k\ ,\ \ell) \leqslant (k\ ,\ \ell)$; $(k\ ,\ \ell) \in D(\beta)$.

(b) $(g\ ,\ f)(e_\beta\ ,\ f')(g^{-1}\ ,\ f) \in E$; $(g\ ,\ f) \in D(\alpha)$.

(c) $(e_\alpha\ ,\ f)(g\ ,\ h)(e_\alpha\ ,\ f) = (e_\alpha\ ,\ f)(g\ ,\ h)$; $(g\ ,\ h) \in D(\beta)$.

La démonstration de ces lemmes n'offre aucune difficulté.

THÉORÈME 5. - Tout monoïde totalement ordonné complètement régulier est clos. L'union des sous-monoïdes principaux est le plus petit anticône.

Soient D un monoïde totalement ordonné complètement régulier, E le monoïde des idempotents, et P l'union des sous-monoïdes principaux.

D'une part, P est un sous-monoïde de D . En effet, si $x \in P$, il existe u tel que $ux < u$, et on peut toujours choisir $u \in E$ (en multipliant par un inverse u' : $u'u \in E$) ; soit aussi $y \in P$, tel que $vy < v$, $v \in E$. On a $uxy < uy < y$, puis $vuxy < vy < v$, ce qui entraîne $vuxyu < vu$, d'où $xy \in P$. Même résultat si $y \in P$ tel que $yv < v$.

D'autre part, P est fortement net : P est net puisqu'il contient E , de plus, si x' est un inverse de x et $yxx' \in P$, il existe $u \in E$ tel que $yxx'u < u$, ce qui entraîne

$$xx'yxx'u < xx'u \qquad \text{or} \qquad xx'yxx' = yxx'\ ,$$

car $xx' \in E$, donc $yxx'u < xx'u$ et $y \in P$.

P est donc un anticône, c'est évidemment le plus petit anticône, et l'équivalence principale R_P fournit le plus grand groupe image homomorphe et isotone de D .

4. Monoïde totalement clos.

Soit D un monoïde ordonné tel que $\wp$ possède un plus grand élément $H = \langle w \because w\rangle$ fortement net

$$a \equiv b \quad (R_H) \iff H : a = H : b$$

$$\langle w \because w\rangle : a = \{x \ ; \quad ax \in \langle w \because w\rangle\} = \{x \ ; \quad axw < w\} \ .$$

Mais H est réflectif, donc

$$\langle w \because w\rangle : a = \{x \ ; \quad xaw < w\} = \langle w \because aw\rangle \ .$$

Ainsi

$$a \equiv b \quad (R_H) \iff \langle w \because aw\rangle = \langle w \because bw\rangle \ .$$

L'application f de D , dans l'ensemble des parties de D ,

$$a \longmapsto \langle w \because aw\rangle \ ,$$

est donc un homomorphisme croissant dont l'image f(D) , munie de la loi

$$\langle w \because aw\rangle \star \langle w \because bw\rangle = \langle w \because abw\rangle$$

et de la relation d'ordre inverse de l'inclusion, et le plus grand groupe homomorphe et isotone à D (corollaire du théorème 1).

Toujours avec les mêmes hypothèses, supposons que de plus H admette un plus grand élément ξ . Cette propriété supplémentaire se traduit par :

$$\begin{cases} xw < w \implies x < \xi \\ \xi w \leqslant w \end{cases} \ .$$

Donc $\xi^2 w \leqslant \xi w \leqslant w$ et $\xi^2 \leqslant \xi$. D'autre par,

$$xw \leqslant w \implies x \leqslant \xi \implies x\xi \leqslant \xi^2 \leqslant \xi \ ,$$

donc $\langle w \because w\rangle = H \subseteq \langle \xi \because \xi\rangle$. Mais H est le plus grand des sous-monoïdes principaux, c'est-à-dire que $H = \langle \xi \because \xi\rangle$.

On établira sans peine :

$$H = \langle \xi \because \xi\rangle = \langle \xi \therefore \xi\rangle = \xi^{\leqslant}$$

$\xi^{\leqslant}$ désignant la section commançante de ξ , ensemble des éléments de D qui sont $\leqslant \xi$. De plus,

$$\langle w \because aw\rangle = \langle \xi \because \xi\rangle = \langle \xi \because a\rangle \ .$$

L'équivalence d'homomorphie s'écrit donc

$$a \equiv b \quad (R_H) \iff \langle \xi \mathbin{\cdot\,\text{.}} a \rangle = \langle \xi \mathbin{\cdot\,\text{.}} b \rangle .$$

Il est clair que $\langle \xi \mathbin{\cdot\,\text{.}} a \rangle = \langle \xi \mathbin{\text{.}\,\cdot} a \rangle$.

On convient de poser $R_H = \mathfrak{a}_\xi$. L'équivalence $\mathfrak{a}_\xi$ sera dite <u>équivalence d'Artin généralisée relative à</u> ξ .

Nous dirons qu'un monoïde, tel que l'ensemble des monoïdes principaux possède un plus grand élément H fortement net, H ayant lui-même un plus grand élément ξ , est <u>totalement clos</u> ; ξ est appelé <u>élément bimaximum</u> de D .

Nous complétons ainsi un résultat mis en évidence par M.-L. DUBREIL-JACOTIN [6] et L. FUCHS [7].

THÉORÈME 6. - <u>Si</u> D <u>est un monoïde totalement clos,</u> ξ <u>l'élément bimaximum, et</u> $\mathfrak{a}_\xi$, <u>l'équivalence généralisée d'Artin,</u> $D/\mathfrak{a}_\xi$ <u>est le plus grand groupe image homomorphe et isotone de</u> D .

<u>Exemples</u>.

1° Soient A un anneau intègre unitaire et $I_f(A)$ le monoïde unitaire des idéaux fractionnaires de type fini. On sait que A est intégralement clos si, et seulement si, $\mathfrak{m} : \mathfrak{m} = A$ pour tout $\mathfrak{m} \in I_f(A)$. Ainsi dans $I_f(A)$ les quasi-résiduels $\langle \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \rangle$ existent et admettent un plus grand élément $\langle A : A \rangle$, ensemble des idéaux entiers de type fini. Ce plus grand sous-monoïde principal de $I_f(A)$ admet un plus grand élément A . On peut donc énoncer la caractérisation suivante :

A <u>est un anneau intégralement clos si, et seulement si, le monoïde</u> $I_f(A)$ <u>des idéaux fractionnaires de type fini est totalement clos, d'élément bimaximum</u> A .

2° Soient G un groupe ordonné, et E un monoïde dont les éléments sont des idempotents et qui sera ordonné par $h < f \iff hf = fh = h$.

$D = G \times E$ est un monoïde pour la loi

$$(g , \alpha)(g' , \alpha') = (gg' , \alpha) .$$

Il est ordonné par

$$(g , \alpha) \leqslant (g' , \alpha') \iff \begin{cases} g < g' \\ \text{ou} \\ g = g' , \quad \alpha < \alpha' \end{cases}$$

L'application $\varphi : D \to G$ $((g , \alpha) \longmapsto g)$ est un épimorphisme croissant, dont l'anticône associé est

$$H = \{(g , \alpha) \; ; \; g < e \, , \; \alpha \in E\} \, ,$$

e élément neutre de G. Il est clair que si $(g , \alpha) \in H$:

$$(g , \alpha)(e , \alpha) < (e , \alpha)$$

d'où

$$(g , \alpha) \in \langle (e , \alpha) \;\dot{\cdot}\; (e , \alpha) \rangle \, .$$

Mais $H \supseteq P$ (union des monoïdes principaux), donc

$$H = \langle (e , \alpha) \;\dot{\cdot}\; (e , \alpha) \rangle \quad \text{quel que soit} \quad \alpha \in E \, .$$

H est donc le plus grand élément de $\mathcal{P}$, ensemble des monoïdes principaux.

Si E contient un élément unité $\alpha < 1$ pour tout $\alpha \in E$, donc $(e , 1)$ est le plus grand élément de H. D est donc totalement clos, d'élément bimaximum $(e , 1)$ et

$$D/\mathfrak{A}_{(e,1)} \simeq G \, .$$

Les monoïdes résidués totalement clos (on dit aussi $\mathfrak{A}$-nomal) ont été étudiés dans [9] et [11]. Soit D un monoïde résidué. On appellera ordre dans D, tout $m \in D$ tel que $m^2 < m$. Quel que soit $x \in D$, $x \;.\!\!\cdot\; x$ et $x \;\dot{\cdot}\; x$ sont des ordres, appelés respectivement ordres à droite et à gauche associés à x. Si $x \in D$, on posera

$$x^{-1} = (x \;\dot{\cdot}\; x) \;.\!\!\cdot\; x \, .$$

Le monoïde D est totalement clos si l'ensemble des ordres associés aux éléments de D admet un plus grand élément ε qui est l'élément bimaximum ; ε est équirésiduel. L'équivalence

$$x \equiv y \;\; (\mathfrak{A}_\varepsilon) \iff \varepsilon : x = \varepsilon : y$$

fournit pour la loi induite le groupe quotient $D/\mathfrak{A}_\varepsilon$ plus grand groupe image homomorphe et isotone de D. Ce groupe est isomorphe a

$$D_\varepsilon = \{\varepsilon : x \, , \;\; x \in D\}$$

muni de la loi

$$(\varepsilon : x) \circ (\varepsilon : y) = \varepsilon : yx \, .$$

L'épimorphisme croissant $D \rightarrow D_\varepsilon$ $(x \longmapsto \varepsilon : (\varepsilon : x))$ est ici une fermeture α_ε , donc $D_\varepsilon \subseteq D$; en particulier D_ε est ordonné par l'ordre de D .

THÉORÈME 7. - *Soient* D *un monoïde résidué,* R *une équivalence sur* D *tel que* D/R *soit un groupe homomorphe et isotone à* D ; R *est l'équivalence d'Artin et* D *est totalement clos si, et seulement si, l'une des classes* mod R *possède un plus grand élément* r .

Soit ε_1 un élément de la classe unité mod R ; $\varepsilon_1 r \equiv r$ (R) , d'où

$$\varepsilon_1 r < r \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 < r \mathbin{\cdot\!\!.} r \;.$$

On en déduit $\varepsilon_1 r < (r \mathbin{\cdot\!\!.} r)r < r$, donc par convexité $\varepsilon_1 r \equiv (r \mathbin{\cdot\!\!.} r)r$ (R) et, puisque D/R est un groupe , $\varepsilon_1 \equiv (r \mathbin{\cdot\!\!.} r)$ (R) . On établirait de même que

$$\varepsilon_1 \equiv (r \mathbin{.\!\!\cdot} r) \quad (R) \;.$$

Ainsi $\varepsilon = r \mathbin{.\!\!\cdot} r = r \mathbin{\cdot\!\!.} r$ est le plus grand élément de la classe unité mod R .

Soit a un élément d'une classe A mod R et $\bar{a}$ un élément de la classe inverse A^{-1} , $a\bar{a} \equiv \varepsilon$ (R) entraîne $a\bar{a} \leqslant \varepsilon$, puis $\bar{a} < \varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a$, c'est-à-dire

$$a\bar{a} < a[\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a] < \varepsilon \quad (R) \;,$$

donc par convexité

$$a[\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a] \equiv \varepsilon \quad (R) \;.$$

Cette relation montre que si $a \in A$, $\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a \in A^{-1}$. On montrerait de même que $\varepsilon \mathbin{\cdot\!\!.} a \in A^{-1}$, et finalement

$$\varepsilon \mathbin{\cdot\!\!.} (\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a) \in (A^{-1})^{-1} = A \;; \qquad a < \varepsilon \mathbin{\cdot\!\!.} (\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a)$$

entraîne

$$a \mathbin{\cdot\!\!.} a < \varepsilon \mathbin{\cdot\!\!.} (\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a)a \;.$$

Or $\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a \in A^{-1}$, donc $(\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a)a \in E$, classe unité, et $\varepsilon \mathbin{\cdot\!\!.} (\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a)a \in E^{-1} = E$, donc $\varepsilon \mathbin{\cdot\!\!.} (\varepsilon \mathbin{.\!\!\cdot} a)a < \varepsilon$, puisque ε est le plus grand élément de la classe unité. Donc $a \mathbin{\cdot\!\!.} a < \varepsilon$ quel que soit $a \in D$, c'est-à-dire que ε est élément bimaximum et D totalement clos. $a \equiv b$ (R) entraîne

$$a(\varepsilon : a) \equiv b(\varepsilon : a) \equiv \varepsilon \quad (R) \;,$$

d'où $b(\varepsilon : a) \leqslant \varepsilon$, donc $\varepsilon : a < \varepsilon : b$. De même $\varepsilon : a > \varepsilon : b$, d'où

$$a \equiv b \quad (\alpha_\varepsilon) \;.$$

Ainsi $R \subset \mathfrak{A}_\varepsilon$; mais on sait que l'équivalence d'Artin est plus fine puisque fournissant le plus grand groupe image homomorphe et isotone, donc $R = \mathfrak{A}_\varepsilon$.

On retiendra le résultat suivant :

Un monoïde résidué unitaire est totalement clos si et seulement s'il contient un plus grand idempotent.

Un monoïde D résidué totalement clos, d'élément bimaximum ε , sera dit nomalement clos ($\mathfrak{A}$-nomalement fermé) si, quel que soit $x \in D$, on a

$$\varepsilon : (x \therefore \varepsilon) = \varepsilon : (x \because \varepsilon) = \varepsilon : x .$$

Si D est réticulé, $\mathfrak{A}_\varepsilon$ est alors régulière pour l'intersection. Si le monoïde admet un élément neutre e , il est nomalement clos si, et seulement si,

$$\varepsilon : (e \because \varepsilon) = \varepsilon : (e \therefore \varepsilon) = \varepsilon .$$

Un monoïde D résidué totalement clos, d'élément bimaximum ε , sera dit intégralement clos ($\mathfrak{A}$-totalement fermé) si tous les ordres associés sont égaux à ε . Si l'élément neutre existe, il suffira que $x \therefore x = e$ ou $x \because x = e$.

Un monoïde résidué D sera dit B-totalement clos ($\mathfrak{B}$-nomal) s'il existe un élément β vérifiant la condition $\beta^{-1} = \beta \therefore \beta = \beta \because \beta$ et tel que, pour tout $x \in D$,

$$\beta = x(\beta \because x) = (\beta \therefore x)x ,$$

β est dit B-élément. Un B-élément, s'il existe, est unique, c'est un idempotent appartenant au centre de D .

Un monoïde D , B-totalement clos, dont β est le B-élément, sera dit B-nomalement clos si, quel que soit $x \in D$, on a

$$(x \therefore x) \therefore \beta = (x \because x) \because \beta = \beta^{-1} .$$

Si l'élément neutre existe, il suffira que

$$e \therefore \beta = e \because \beta = \beta^{-1} .$$

Notons qu'un monoïde nomalement clos est B-nomalement clos si l'une des classes modulo $\mathfrak{A}_\varepsilon$ possède un plus petit élément. Or dans un monoïde B-nomalement clos, le B-élément est le plus petit élément de la classe de l'élément bimaximum. Comme tous les idempotents appartiennent à cette classe, le B-élément est le plus petit des idempotents.

Un monoïde intégralement clos, B-totalement clos, sera dit B-intégralement clos.

Un monoïde B-totalement clos, avec élément unité, est B-intégralement clos si, et seulement si, l'élément bimaximum coïncide avec l'élément unité.

Enfin, un monoïde résidué unitaire est un groupe ordonné si, et seulement si, l'élément neutre est B-élément.

Exemples.

1° Soit A un anneau commutatif intègre et unitaire, I(A) le monoïde de ses idéaux fractionnaires. A est complètement clos si, et seulement si, $\mathfrak{m} : \mathfrak{m} = A$ quel que soit $\mathfrak{m} \in I(A)$, c'est-à-dire si, et seulement si, le monoïde unitaire I(A) est intégralement clos ([3], ex. 6, p. 82).

2° A est un anneau de Dedekind si, et seulement si, A est B-élément du monoïde I(A) .

3° BLYTH a montré [2] que, si D est un monoïde résidué et ρ l'équivalence "zig-zag", D/ρ est un groupe image homomorphe et isotone de D . Si D est totalement clos, d'élément bimaximum ε , il existe un épimorphisme croissant

$$\theta : D/\mathfrak{A}_\varepsilon \longrightarrow D/\rho \qquad \text{et} \qquad D/\mathfrak{A}_\varepsilon/\mathrm{Ker}\ \theta \simeq D/\rho \ .$$

Il est clair que θ est un isomorphisme si, et seulement si, D contient un élément maximal qui sera le plus grand élément dans sa classe mod ρ .

4° Soit N^* l'ensemble des entiers naturels strictement positifs ; $N^* \times N^*$, muni de la loi

$$(i , j)(k , s) = (i + k - \inf(j , k) , \ j + s - \inf(j , k)) ,$$

est appelé monoïde bicyclique. On vérifiera que c'est un monoïde inverse de Preston. Il est clair que $(i , j)^{-1} = (j , i)$ et que les idempotents sont de la forme (i , i) .

De plus la relation d'ordre naturelle est :

$$(i , j) \leqslant (k , s) \iff \begin{cases} j \geqslant s \\ i - j = k - s \end{cases} .$$

Ce monoïde bicyclique est résidué :

$$(c\ ,\ d) \mathbin{\cdot\!\!.} (a\ ,\ b) = \begin{cases} d > b & (c\ ,\ d-b+a) \\ b \geqslant d \begin{cases} c-d+b-a \geqslant 0 \\ c-d+b-a < 0 \end{cases} & \begin{matrix} (c-d+b-a+1\ ,\ 1) \\ (1\ ,\ d-c+a-b+1) \end{matrix} \end{cases}$$

$$(c\ ,\ d) \mathbin{.\!\!\cdot} (a\ ,\ b) = \begin{cases} c > a & (c-a+b\ ,\ d) \\ a \leqslant c \begin{cases} d-c+a-b \geqslant 0 \\ d-c+a-b < 0 \end{cases} & \begin{matrix} (1\ ,\ d-c+a-b+1) \\ (c-d+b-a+1\ ,\ 1) \end{matrix} \end{cases}$$

$(1\ ,\ 1)$ est élément neutre et plus grand idempotent, ce monoïde est donc intégralement clos. Il en est toujours ainsi pour un monoïde inverse de Preston résidué et unitaire car l'élément unité est le plus grand idempotent pour la relation d'ordre naturelle.

5. Anneau nomal.

Un anneau d'intégrité A commutatif unitaire sera dit nomal si le monoïde résidué unitaire $I(A)$ de ses idéaux fractionnaires est totalement clos. Un tel anneau est donc caractérisé par l'existence d'un plus grand idéal fractionnaire idempotent $\mathfrak{e}$, élément bimaximum de $I(A)$. Il est clair que si K est le corps des fractions de A , $\mathfrak{e}$ est un ordre de K tel que $\mathfrak{e} \in I(A)$.

THÉORÈME 8. - Un ordre A d'un corps K est nomal si et seulement s'il existe un ordre $\mathfrak{e}$ de K complètement intégralement clos, appartenant à $I(A)$.

Soit $\mathfrak{e} \in I(A)$, ordre de K complètement intégralement clos ; $\mathfrak{e}$ est un idempotent fractionnaire de $I(A)$. Soit $\mathfrak{m}$ un autre idempotent de $I(A)$ et $m \in \mathfrak{m}$, donc $m^{\lambda} \in \mathfrak{m}$ quel que soit l'entier naturel $\lambda \geqslant 0$ et il existe $d \in A$ tel que $dm^{\lambda} \in A$. Mais $A \subset \mathfrak{e}$, donc $dm^{\lambda} \in \mathfrak{e}$, et comme $\mathfrak{e}$ est complètement intégralement clos, $m \in \mathfrak{e}$ et $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{e}$; $\mathfrak{e}$ est donc le plus grand idempotent, $I(A)$ est totalement clos, et donc A est nomal.

Réciproquement, si A est nomal d'élément bimaximum $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}$ est un ordre de K tel que $\mathfrak{e} \in I(A)$. Il est clair que $I(\mathfrak{e}) \subset I(A)$; $\mathfrak{e}$ plus grand idempotent de $I(A)$ est aussi plus grand idempotent de $I(\mathfrak{e})$, c'est aussi l'élément unité de $I(\mathfrak{e})$. Ce monoïde est donc intégralement clos, c'est-à-dire $\mathfrak{m} : \mathfrak{m} = \mathfrak{e}$ quel que soit $\mathfrak{m} \in I(\mathfrak{e})$; $\mathfrak{e}$ est complètement intégralement clos.

COROLLAIRE 1. - Pour que la clôture intégrale $\bar{A}$ d'un anneau noethérien intègre A soit un A-module de type fini, il faut et il suffit que A soit nomal.

Soit A noethérien. Si $\bar{A}$ est un sous-A-module de type fini, c'est un idempotent de $I(A)$. On sait que $\bar{A}$ est un anneau de Krull ([10], p. 118 en particulier) complètement intégralement clos. Donc selon le théorème ci-dessus, A est nomal.

Réciproquement, supposons A noethérien nomal d'idéal bimaximum $\mathfrak{e}$, $A \subset \mathfrak{e}$ entraîne $\bar{A} \subset \mathfrak{e} = \bar{\mathfrak{e}}$. Si $\mathfrak{m}$ est un idempotent quelconque de $I(A)$ et $m \in \mathfrak{m}$, alors $m^\alpha \in \mathfrak{m}$ pour tout entier $\alpha > 0$, et il existe $d \neq 0$ de A tel que $dm^\alpha \in A \subset \bar{A}$, d'où $\bar{A}$ complètement intégralement clos $m \in \bar{A}$ et $\mathfrak{m} \subset \bar{A}$; en particulier, $\mathfrak{e} \subset \bar{A}$, d'où $\mathfrak{e} = \bar{A}$ et $\bar{A} \in I(A)$. Ainsi $\bar{A}$, idéal fractionnaire d'un anneau intègre noethérien, est un A-module de type fini.

COROLLAIRE 2. - Soient A un anneau nomal, A' la fermeture intégrale de A dans une extension de K, les anneaux A', $A_{[x]}$ et $A_{[[x]]}$ sont nomaux.

C'est clair en utilisant le théorème.

COROLLAIRE 3. - Si A est un anneau noethérien nomal, et S une partie multiplicative telle que $0 \notin S$, alors $S^{-1} A$ est un anneau noethérien nomal.

Si $\bar{A}$ est la clôture intégrale de A, $S^{-1} \bar{A}$ est la clôture intégrale de $S^{-1} A$. $S^{-1} A$ est noethérien, et $S^{-1} \bar{A}$ est un idéal fractionnaire de $S^{-1} A$, donc de type fini, il en résulte que $S^{-1} A$ est nomal.

Exemples.

1° Soit d un entier rationnel non divisible par un carré dans $\mathbb{Z}$. Si $d \equiv 1 \pmod 4$ les éléments du corps $\Sigma = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, qui sont entiers sur $\mathbb{Z}$, sont de la forme

$$\frac{a + b\sqrt{d}}{2} \; ; \quad [(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; ; \quad a \equiv b \quad (2)] .$$

Notons E l'anneau des entiers, et soit

$$\mathbb{Z}_{[\sqrt{d}]} = \{u + v\sqrt{d} \; ; \quad u, v \in \mathbb{Z}\} ,$$

$\mathbb{Z}_{[\sqrt{d}]}$ est un anneau intègre dont Σ est le corps des quotients ; de plus,

$$2E \subseteq \mathbb{Z}_{[\sqrt{d}]} \subseteq E ,$$

donc E est un idéal fractionnaire de l'anneau $\mathbb{Z}_{[\sqrt{d}]}$; E est un anneau de Dedekind, a fortiori complètement intégralement clos, donc $\mathbb{Z}_{[\sqrt{d}]}$ est nomal.

2° Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal de $\underset{\sim}{C}[X,Y]$ engendré par le polynôme $Y^2 - X^3$. On pose $A = \underset{\sim}{C}[X,Y]/\mathfrak{m}$. Soit σ la surjection canonique $\underset{\sim}{C}[X,T] \longrightarrow A$; si $\sigma(X) = \xi$ et $\sigma(Y) = \eta$, en posant $t = \eta/\xi$, il est clair que

$$A = \underset{\sim}{C}[t^2, t^3] \subseteq \underset{\sim}{C}[t] ,$$

donc A est intègre. Soit L le corps des fractions de A, $t \in L$, de plus $t^2 - \xi = 0$, donc t appartient à $\overline{A}$, clôture intégrale de A. Mais $t \notin A$, ce qui veut dire que A n'est pas intégralement clos. $A \subset \underset{\sim}{C}[t]$, où $\underset{\sim}{C}[t]$ est principal, donc intégralement clos, t étant entier sur A, cela implique

$$\underset{\sim}{C}[t] = \overline{A} .$$

Selon le corollaire 1, A est donc nomal.

3° A est un anneau noethérien nomal, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 dans A. Alors $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos, sauf pour un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{p}$ ([10], p. 212).

4° On trouvera dans [10], p. 211, un exemple d'anneau noethérien non nomal A, mais intègre, tel que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, $A_{\mathfrak{p}}$ soit nomal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIGARD (Alain). - Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 5987-5988.

[2] BLYTH (Thomas Scott). - Contribution à la théorie de la résiduation dans les structures algébriques ordonnées (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 7 : Diviseurs. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind. 1314 ; Bourbaki 31).

[4] BRUCK (Richard Hubert). - A survey of binary systems, 2nd edition. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Ergebnisse der Mathematik, 20).

[5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).

[6] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur les images homomorphes d'un demi-groupe ordonné, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 101-115.

[7] FUCHS (L.). - On group homomorphic images of partially ordered semigroups, Acta Scient. Math., Szeged, t. 25, 1964, p. 139-142.

[8] HOWIE (J. M.). - The maximum idempotent-separating congruence on an inverse semi-group, Proc. Edinburgh math. Soc., Series 2, t. 14, 1964, p. 71-79.

[9] MOLINARO (Italico). - Demi-groupes résidutifs, J. Math. pures et appl., t. 39, 1960, p. 319-356 et t. 40, 1961, p. 43-110 (Thèse Sc. math. Paris, 1956).

[10] NAGATA (Masayoshi). - Local rings. - New York, Interscience-Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied mathematics, 13).

[11] QUERRÉ (Julien). - Contribution à la théorie des structures ordonnées et des systèmes d'idéaux, Annali di Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 66, 1964, p. 265-389 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[12] SAITÔ (Toru). - Ordered completely regular semigroups, Pacific J. of Math., t. 14, 1964, p. 295-308.