

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

CHRISTINE W. AYOUB

Anneaux locaux et unisériels

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 14,
p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A13_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX LOCAUX ET UNISÉRIELS

par Christine W. AYOUB

Soit R un anneau artinien et commutatif avec un élément unité, noté 1 . Nous supposons de plus que R est local, c'est-à-dire contient un seul idéal maximal N . Alors, puisque R est artinien, nous savons que :

1° $\exists n > 1$ tel que $N^{n-1} \neq (0)$, $N^n = (0)$ (si $N = 0$, R est un corps, et ce cas ne nous intéresse pas) ;

2° R/N est un corps ;

3° $r \in R \Rightarrow \begin{cases} r \in N \Rightarrow r^n = 0 \\ \text{ou} \\ r \text{ est inversible, i. e. } \exists r' \in R \text{ tel que } rr' = 1 ; \end{cases}$

4° Pour $1 \leq i < n$, N^i/N^{i+1} est un espace vectoriel sur R/N . En effet, N^i/N^{i+1} est un R -module, et $N N^i = N^{i+1}$, ce qui entraîne que N^i/N^{i+1} est un module sur le corps R/N ; autrement dit, un espace vectoriel sur R/N .

Définition. - Soit R un anneau local, artinien, commutatif, avec élément-unité 1 , et soit N l'idéal maximal de R .

$$(R \text{ est homogène}) \Leftrightarrow (\dim_{R/N}(N^i/N^{i+1}) = 1 \quad (1 \leq i < n)) .$$

Pour $0 \neq a \in R$, la fonction w est définie par

$$(w(a) = i) \Leftrightarrow (a \in N^i \setminus N^{i+1}) .$$

(Par convention, $N^0 = R$; par conséquent, $(a \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (w(a) = 0)$.)

La fonction w a d'importantes propriétés qui nous seront bien utiles. Ce sont les suivantes.

PROPOSITION. - Soit R un anneau homogène. Alors,

(i) Si a et b sont des éléments de R tels que $w(a) = i$, $w(b) = j$, où $i + j < n$,

$$w(ab) = i + j ;$$

(ii) Si c est élément de R tel que $w(c) = i$,

$$Rc = N^i .$$

Remarque. - La propriété (i) est semblable à celle d'une valuation.

COROLLAIRE. - Soit R un anneau homogène. Les seuls idéaux de R sont N^i , où $i \geq 0$; ils sont tous principaux.

Remarque. - Dans un mémoire de 1934 [4], G. KÖTHE a étudié les anneaux unisériels ("einreihig"). Pour un anneau local, la définition d'un tel anneau est la suivante :

$$(R \text{ est unisériel}) \Leftrightarrow (R \text{ a seulement une suite de composition}) .$$

Nous voyons que les anneaux homogènes sont donc unisériels, et la réciproque est vraie aussi pour un anneau local.

Dans ce qui suit, nous supposons que le corps R/N est une extension algébrique de \mathbb{Z}_p . Dans ce cas, $p \in N$, ce qui entraîne que N^i/N^{i+1} (comme groupe additif) est élémentaire. D'autre part, soit

$$G : \{x \in R ; x \text{ est inversible}\}$$

et soit

$$H_i = 1 + N^i = \{1 + x ; x \in N^i\} \quad (1 \leq i < n) , \quad H = H_1 .$$

G est un groupe multiplicatif,

$$H_i \leq G \quad (1 \leq i \leq n) \text{ et } G \cong H \times (R/N)^* \text{ (produit direct),}$$

où $(R/N)^*$ est le groupe multiplicatif du corps R/N .

On voit aisément que l'application

$$\varphi_s : N^{s+1} + x \rightarrow H_{s+1}(1 + x) \quad (x \in N^s) \quad (1 \leq s < n)$$

est un isomorphisme du groupe $(N^s/N^{s+1}, +)$ sur $(H_s/H_{s+1}, \cdot)$. Ainsi, pour N et H , on a respectivement les suites :

$$N > N^2 > \dots > N^s > N^{s+1} > \dots > N^n = \{0\}$$

et

$$H > H_2 > \dots > H_s > H_{s+1} > \dots > H_n = \{1\}$$

où $(N^s/N^{s+1}, +)$ et $(H_s/H_{s+1}, \cdot)$ sont des p -groupes élémentaires isomorphes.

Exemple. - Soit $R = \mathbb{Z}_{p^n}$ (p , nombre premier).

Alors, $N = (p)$, et N est un groupe cyclique d'ordre p^{n-1} . D'autre part, $H = 1 + N$ est aussi un groupe cyclique d'ordre p^{n-1} dans le cas où $p \neq 2$. Si $p = 2$ et $n \geq 3$, $H = (-1) \times K$, où K est cyclique d'ordre p^{n-2} .

[Dans un mémoire, publié en 1969 [1]; j'ai démontré que

$$\left. \begin{array}{l} N \text{ cyclique} \\ \text{ou} \\ H \text{ cyclique} \end{array} \right\} \Rightarrow (R \text{ homogène, et } R/N \simeq \mathbb{Z}_p) .]$$

D'après l'exemple, on voit que N et H ne sont pas nécessairement isomorphes, ils le sont pour $p > 2$, mais ne le sont pas pour $p = 2$, $n \geq 3$ (pour $p = 2$, $n = 2$, ils le sont aussi).

On peut établir les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. - Soit R un anneau homogène (ou local, unisériel) ; soit R/N extension algébrique de \mathbb{Z}_p et $k = w(p)$ (si $p = 0$, soit $k = n$). Alors, $(k < p - 1) \Rightarrow ((N, +) \simeq (H, \cdot))$.

THÉORÈME 2. - Soit R un anneau homogène et fini. Alors, $(\text{rang de } H) = (\text{rang de } N)$

à moins que R ne soit exceptionnel. Dans ce dernier cas, $(\text{rang de } H) = ((\text{rang de } N) + 1)$.

(R est exceptionnel si $(p - 1) | k$, et ... une autre condition assez compliquée !).

Les méthodes de démonstration se rattachent à la théorie des groupes abéliens. Elles se trouvent dans un mémoire publié en 1970 [2]. L'idée est la suivante :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} N > N^2 > \dots > N^s > N^{s+1} > \dots > N^n = \{0\}, \text{ et l'application} \\ \eta : N^{s+1} + x \rightarrow N^{s+k+1} + px \text{ est un isomorphisme de } N^s/N^{s+1} \text{ sur} \\ N^{s+k}/N^{s+k+1} \text{ (pour } s < n - k \text{) ; pour } s \geq n - k, px = 0 \text{ (} \forall x \in N^s \text{)}. \end{array} \right.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{array}{ccc} N^s/N^{s+1} & \xrightarrow{\eta_s} & N^{s+k}/N^{s+k+1} \quad (s < n - k) \\ \uparrow \varphi_s^{-1} & & \downarrow \varphi_{s+k} \\ H_s/H_{s+1} & \xrightarrow{\varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}} & H_{s+k}/H_{s+k+1} \end{array}$$

Ainsi, $\varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}$ est un isomorphisme de H_s/H_{s+1} sur H_{s+k}/H_{s+k+1} , et on voit par le calcul que

$$\begin{aligned} [H_{s+1}(1+x)](\varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}) \\ = H_{s+k+1}(1+px) = H_{s+k+1}(1+x)^p \quad (1+x \in H_s) \end{aligned}$$

dans le cas où $k < p - 1$.

Soit $\xi_s = \varphi_s^{-1} \circ \eta_s \circ \varphi_{s+k}$. Alors nous avons :

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} H > H_2 > \dots > H_s > H_{s+1} > \dots > H_n = \{1\}, \text{ et l'application} \\ \xi_s : H_{s+1}(1+x) \rightarrow H_{s+k+1}(1+x)^p \text{ est un isomorphisme de } H_s/H_{s+1} \text{ sur} \\ H_{s+k+1} \text{ (pour } s < n - k \text{) ; pour } s \geq n - k, (1+x)^p = 1 \text{ (} \forall 1+x \in H_s \text{)}. \end{array} \right.$$

(*) et (**) sont respectivement des diagrammes pour N et H , et du fait que $N^s/N^{s+1} \simeq H_s/H_{s+1}$, on peut déduire que $N \simeq H$.

Les résultats sur les groupes N et H proviennent d'un mémoire récemment paru dans le "Journal of Number Theory" [3].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AYOUB (Christine W.). - On finite primary rings and their groups of units, Comp. Math., Groningen, t. 21, 1969, p. 247-252.
- [2] AYOUB (Christine W.). - On diagrams for abelian groups, J. of Number Theor., t. 2, 1970, p. 442-458.
- [3] AYOUB (Christine W.). - On the group of units of certain rings, J. of Number Theor., t. 4, 1972, p. 383-403.
- [4] KÖTHER (Gottfried). - Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring, Math. Z., t. 39, 1935, p. 31-44.

Christine W. AYOUB
Pennsylvania State University
230 McAllister Building
UNIVERSITY PARK, Pa 16802 (Etats-Unis)
