Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Anne-Marie Nicolas

Extensions factorielles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 2 (1973-1974), exp. nº 15, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, n° 15, 8 p.

6 mai 1974

EXTENSIONS FACTORIELLES

par Anne-Marie NICOLAS

Nous avons défini et étudié les modules factoriels dans un précédent article (cf. [7]). Rappelons que, si A est un anneau factoriel, et si M est un module sans torsion sur A, M est appelé module factoriel s'il vérifie la condition suivante :

Tout élément $x \in M$ s'écrit "de façon unique" $x = a\xi$, avec $a \in A$, $\xi \in M$, ξ irréductible dans M.

Précisons les définitions suivantes :

ξ est irréductible dans M si $\xi = ax$, $a \in A$, $x \in M \Longrightarrow a \in A^*$,

(A^* étant le groupe des unités de A).

On dira d'autre part que la décomposition de x est unique si

$$x=a\xi=b\eta \text{ , } a\in A \text{ , } b\in A \text{ , } \xi \text{ et } \eta \text{ irréductibles dans } M \Longrightarrow \exists\ \varepsilon\in A^* \text{ , } a=\varepsilon b \text{ .}$$

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant :

A et B étant deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$, et tels que les éléments 1 de A et B soient confondus, à quelle condition B est-il un A-module factoriel ?

DÉFINITION (a). - B sera une extension factorielle de A, si, et seulement si, B est un A-module factoriel.

Exemple. - A étant un anneau factoriel de corps des fractions K, on sait ([7], §3) que K n'est pas un A-module factoriel. Mais, $A[X]$ étant somme directe de A-modules factoriels, $A[X]$ est extension factorielle de A.

Notre étude aura pour point de départ le résultat suivant ([7], th. 4.3).

THÉORÈME (b). - Pour que M, module sans torsion sur A factoriel, soit un module factoriel, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient réalisées :

1° tout élément de M s'écrit $x = a\xi$, $a \in A$, ξ irréductible dans M,

2° $a \in A$, $b \in A$, $aM \subset bM \Longrightarrow b|a$,

3° $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in A$, $\exists\, c \in A$ tel que $aM \cap bM = cM$ (c = p. p. c. m. (a,b)).

Les résultats qui vont suivre (à l'exception du §4) sont exposés dans l'article "Modules factoriels" ([7], §7), et surtout dans un article à paraître intitulé "Extensions factorielles et modules factorables" [8]. J'ometterai donc de nombreuses démonstrations en renvoyant aux articles correspondants.

Dans tout ce qui suit, A est un anneau factoriel, B un anneau factoriel contenant A, tels que les éléments 1 de A et B soient confondus. L désigne le corps des fractions de B, K désigne le corps des fractions de A tel que $K \subset L$. A^* et B^* sont les groupes des unités de A et B.

1. Caractérisation des extensions factorielles.

PROPOSITION 1.1. - *Si* B *est extension factorielle de* A, *alors* $B \cap K = A$ *et* $A^* = A \cap B^*$.

Démonstration. - Voir [7], §7, lemmes 7.1, 7.2, 7.3.

PROPOSITION 1.2. - *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1° $B \cap K = A$,

2° $Aa = A \cap Ba$ *quel que soit* $a \in A$,

3° B/A *est un* A-*module sans torsion*.

La démonstration est immédiate.

THÉORÈME 1.3. - *Pour que* B *soit extension factorielle de* A, *il faut et il suffit que*

1° $\forall\ a \in A$, $Aa = A \cap Ba$ (*ou* (1°)' $B \cap K = A$).

2° $\forall\ a \in A$, $\forall\ b \in A$, $B(Aa \cap Ab) = Ba \cap Bb$.

La démonstration utilisera le théorème (b).

Condition nécessaire : Supposons que B est extension factorielle de A ; alors $B \cap K = A$ et $Aa = A \cap Ba$, $\forall\ a \in A$ (propositions 1.1 et 1.2) ; de plus, si $a \in A$, et $b \in A$, $Aa \cap Ab = Ac$ avec $c = \text{p. p. c. m.}\ (a, b)$ puisque A est un anneau factoriel ; donc $B(Aa \cap Ab) = Bc$; mais, d'après le théorème (b), $Ba \cap Bb = Bc$.

Condition suffisante : Supposons que B et A vérifient les conditions 1° et 2° du théorème 1.3 ; si $aB \subset bB$, avec $a \in A$, $b \in A$, alors $a/b \in B \cap K$, donc $a/b \in A$ et b divise a dans A ; si $a \in A$ et $b \in A$, alors $Ba \cap Bb = B(Aa \cap Ab) = Bc$ avec $c = \text{p. p. c. m.}\ (a, b)$ dans A. Il reste à montrer l'existence d'une décomposition pour tout $x \in B$, sous la forme $x = a\xi$. Pour cela, montrons que toute famille $(Ax_i)_{i \in I}$ de sous-A-modules monogènes de B admet un élément maximal.

B étant un anneau factoriel, $(Bx_i)_{i \in I}$ admet un élément maximal Bx_0. Si $Ax_0 \subsetneq Ax_i$, il existe $\alpha \in A$, $\alpha \notin A^*$ tel que $x_0 = \alpha x_i$; mais

$$\alpha \notin B^* (\text{car}(B \cap K = A) \Longrightarrow (A^* = A \cap B^*)) ;$$

donc $Bx_0 \subsetneq Bx_i$, ce qui est impossible. Ax_0 est par suite maximal dans la famille des Ax_i . D'après [7] (théorème 1.7), tout élément de B se décompose sous la forme $x = a\xi$.

Remarques. - L'hypothèse " B anneau factoriel" n'intervient pas dans la démonstration de la condition nécessaire ; mais elle intervient fondamentalement dans la démonstration de la condition suffisante.

La condition 2° du théorème 1.3 est équivalente à l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

2° (a) Pour deux éléments a et b de A , le p. p. c. m. de a et b dans B reste égal (à une unité de B près) au p. p. c. m. de a et b dans A .

2° (b) $a \in A$, $b \in A$, (a et b premiers entre eux dans A) $\Longrightarrow$ (a et b premiers entre eux dans B) .

Si A est un anneau principal, et si $B \cap K = A$, la démonstration précédente nous montre qu'alors tout élément $x \in B$ se met sous la forme $x = a\xi$, ce qui suffit à affirmer ([7], théorème 5.3) que B est extension factorielle de A . D'où le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4. - *Si A est un anneau principal, pour que B soit une extension factorielle de A , il faut et il suffit que* $B \cap K = A$.

Exemples 1.5. - Tout anneau factoriel B contenant $\mathbb{Z}$ tel que $B \cap \mathbb{Q}$ soit égal à $\mathbb{Z}$ est une extension factorielle de $\mathbb{Z}$.

Si A est principal, $A[[X]]$ est un anneau factoriel ([2], chap 7, §3, n° 9), $A[[X]]$ est extension factorielle de A (car $A[[X]] \cap K = A$) , $A[X]$ est extension factorielle de A . Mais $A[[X]]$ n'est pas extension factorielle de $A[X]$: en effet, $1 - X \in (A[[X]])^* \cap A[X]$ et $1 - X \notin (A[X])^*$.

2. Extensions factorielles : cas particuliers.

Nous allons donner ici des situations particulières dans lesquelles on pourra conclure qu'on est en présence d'une extension factorielle.

Si B est extension factorielle de A , alors $A^* = A \cap B^*$; l'extension $A \subset A[[X]]$ fournit un exemple pour lequel on a bien $A^* \subsetneq B^*$. Remarquons d'autre part, que si B est extension factorielle de A , un élément $x \in A$, irréductible dans A , n'est plus nécessairement irréductible dans l'anneau B (par exemple, si B est l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ et si $A = \mathbb{Z}$: $2 = (1 + i)(1 - i)$, 2 étant irréductible dans $\mathbb{Z}$). Le théorème qui suit n'est donc pas une caractérisation des extensions factorielles.

THÉORÈME 2.1. - *Si* $A^* = B^*$ *, et si tout élément de A , irréductible dans l'anneau A , est irréductible dans l'anneau B , alors B est une extension facto-*

rielle de A .

Montrons que $B \cap K = A$. Soit $x = a/b \in B \cap K$ avec $a \in A$, $b \in A$. Soit $\pi \in B$, un facteur irréductible de x dans l'anneau factoriel B ; $x = \pi x_1$, $\pi b x_1 = a$; tout facteur irréductible de a dans A est aussi irréductible dans B ; il existe donc $a_1 \in A$, a_1 irréductible dans A , et $\varepsilon \in B^*$ tels que $\pi = \varepsilon a_1$; $B^* = A^*$, donc $\varepsilon \in A$, d'où $\pi \in A$, et par conséquent $x \in A$.

Soient $a \in A$, $b \in A$; $c =$ p. p. c. m. (a , b) dans A ; $c = aa_1 = bb_1$, où a_1 et b_1 sont premiers entre eux dans A ; mais alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux dans B (tout facteur irréductible de a_1 dans B , se trouvant associé à un facteur irréductible dans A , appartient donc à A , car $A^* = B^*$) ; c est donc le p. p. c. m. de a et b dans B , et $Ba \cap Bb = Bc = B(Ac) = B(Aa \cap Ab)$.

D'après le théorème 1.3, B est extension factorielle de A . L'extension $A \subset A[X]$ est une extension factorielle vérifiant les hypothèses du théorème précédent.

PROPOSITION 2.2. - A *étant un anneau factoriel, si* B *est entier sur* A , *ou si* B *est un* A-*module de type fini, alors* $B \cap K = A$.

Si A est factoriel, A est intégralement clos. Si B est un A-module de type fini sur A , alors B est entier sur A ([2], chap. 5, §1). Si B est entier sur A , tout $x \in B \cap K$ appartient à A , car A est intégralement clos.

Nous allons maintenant donner une condition suffisante pour que la condition 2° du théorème 1.3 soit satisfaite.

Soient A et B factoriels tels que $A \subset B$. Supposons que :

(α) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{P}$ *de hauteur* 1 *de* B , *l'idéal premier* $\mathfrak{P} \cap A$ *est nul ou de hauteur* 1 . (cf. [2], chapitre 7, §1, n° 10.)

Si B est factoriel, tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 est principal ([2], chap. 7, §3, n° 2), donc $\mathfrak{P} = B\pi$, où π est irréductible dans B car $B\pi$ est premier. La condition (α) sera donc équivalente à la condition (α') :

(α') *Pour tout élément irréductible* π *de* B , *ou bien* $B\pi \cap A = \{0\}$, *ou bien* $B\pi \cap A = Ap$, *où* p *est un élément irréductible de* A .

Montrons que si A et B vérifient (α) ou (α'), et si a et b sont premiers entre eux dans A , alors a et b sont premiers entre eux dans B . En effet, supposons que π est un facteur irréductible (dans B) de a et b :

$$(Ba \subset B\pi \text{ et } Bb \subset B\pi) \Longrightarrow (Aa \subset A \cap Ba \subset B\pi \cap A \text{ et } Ab \subset B\pi \cap A)$$

$B\pi \cap A$ est donc non nul, et $B\pi \cap A = Ap$; $Aa \subset Ap$ et $Ab \subset Ap$, avec $p \in A$, ce qui est impossible.

PROPOSITION 2.3. - *Si* A *et* B *vérifient la condition* (α), *alors* :

$$\forall\, a \in A , \ \forall\, b \in A , \ B(Aa \cap Ab) = Ba \cap Bb .$$

Si B est entier sur A la condition (α) est vérifiée ([2], chap. 7, §1, n° 10). On a aussi $B \cap K = A$ (proposition 2.2), d'où le théorème (d'après le théorème 1.3).

THÉORÈME 2.4. - Si A et B sont deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$, et si B est entier sur A, alors B est extension factorielle de A.

En particulier, si l'anneau factoriel B est la fermeture intégrale d'un anneau factoriel dans une extension finie du corps des fractions de A, alors B est extension factorielle de A.

COROLLAIRE 2.5. - Si A et B sont deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$, et si B est un A-module de type fini, alors B est extension factorielle de A.

Si A est noethérien, et si B est un A-module de type fini, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

B est extension factorielle de A,

B est un A-module réflexif, (d'après [7], théorème 4.6).

COROLLAIRE 2.6. - Si A et B sont deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$, si A est noethérien et si B est un A-module de type fini, alors B est un A-module réflexif.

Ce résultat est à rapprocher du résultat de [2] (chapitre 7, §4, n° 8), où il est démontré que si A et B sont des anneaux noethériens intégralement clos, et si B est un A-module de type fini, alors B est réflexif.

3. Platitude des extensions factorielles.

De façon plus générale, nous avons déjà abordé le problème de la platitude d'un module factoriel ([7], §4). Un module factoriel n'est pas nécessairement plat, et un module plat sur un anneau factoriel n'est pas nécessairement un module factoriel. Cependant, tout module factoriel sur un anneau principal est fidèlement plat.

A et B étant toujours deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$, nous considérons B comme un A-module.

Si B est un A-module plat, la condition (α) du paragraphe 2 est vérifiée ([2], chapitre 7, §1, n° 10), et par conséquent la condition 2° du théorème 1.3.

THÉORÈME 3.1. - Soient A et B deux anneaux factoriels tels que $A \subset B$ et tels que B soit un A-module plat.

Pour que B soit extension factorielle de A, il faut et il suffit que $B \cap K = A$ (ou que, $\forall\, a \in A$, $Aa = A \cap Ba$).

On retrouve, et on généralise, ainsi le théorème 1.4, puisque si A est principal, il est équivalent de dire que B est sans torsion sur A ou que B est A-plat.

Supposons maintenant que B soit un A-module fidèlement plat ou bien (ce qui est équivalent d'après [2], chap. 1, §3, n° 5) que B/A est un A-module plat.

Alors,

$\forall\ a \in A\ ,\quad Aa = A \cap Ba\ ,$

$\forall\ a \in A\ ,\quad \forall\ b \in A\ ,\quad B(Aa \cap Ab) = Ba \cap Bb$ (cf. [8], théorème 1.11).

THÉORÈME 3.2. - _Si B est un A-module fidèlement plat, alors B est extension factorielle de A._

COROLLAIRE 3.3. - _Si A est principal, pour que B soit extension factorielle de A, il faut et il suffit que B soit un A-module fidèlement plat._

Le problème de savoir si une extension factorielle est toujours fidèlement plate (et même plate) reste ouvert.

Mais nous pouvons démontrer sur les extensions factorielles, un résultat analogue à un autre résultat concernant des extensions fidèlement plates (cf. [2], chapitre 1, §3, n° 4).

THÉORÈME 3.4. - _Soient A, B, C trois anneaux factoriels tels que $A \subset B \subset C$. On suppose que C est extension factorielle de B._

Alors, pour que C soit extension factorielle de A, il faut et il suffit que B soit extension factorielle de A.

Démonstration. - cf. [8], théorème 1.13.

B et C peuvent être extensions factorielles de A, sans que C soit extension factorielle de B (cf. exemples 1.5).

Exemple. - $A = k$, $B = k[X]$, $C = k(X)$; B et C sont extensions factorielles de A d'après le théorème 1.4 ; mais C, corps des fractions de B, ne peut être un B-module factoriel.

4. Extension factorielle d'un anneau de Zariski.

Soit A un anneau de Zariski qui est factoriel. Alors $\hat{A}$ est un anneau de Zariski, et $\hat{A}$ est un A-module fidèlement plat ([2], chapitre III, §3, n° 4 et 5). Ceci implique que A se plonge dans $\hat{A}$.

Si $\hat{A}$ est factoriel, puisque $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A, alors $\hat{A}$ est extension factorielle de A (corollaire 3.3), et par conséquent $\hat{A} \cap K = A$ (§1 ; cf. [2], chapitre III, §3, n° 5, cor. 4 de la proposition 9).

THÉORÈME 4.1. - Soit A un anneau de Zariski factoriel tel que $\hat{A}$ soit factoriel. Alors $\hat{A}$ est une extension factorielle de A.

EXEMPLE 4.2. - L'anneau des entiers p-adiques est une extension factorielle de l'anneau $\mathbb{Z}(p)$ (localisé de $\mathbb{Z}$ en p) pour tout nombre premier p.

Mais $\mathbb{Z}(p)$ n'est pas une extension factorielle de $\mathbb{Z}$, car $\mathbb{Z}(p) \cap \mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$. D'après le théorème 3.4, l'anneau des entiers p-adiques n'est pas une extension factorielle de $\mathbb{Z}$.

EXEMPLE 4.3. - k étant un corps, $k[[X]]$ représente l'anneau complété de l'anneau localisé de $k[X]$ en (X).

$k[X]$ étant factoriel, $k[X]_{(X)}$ est factoriel ([2], chap. 7, §3, n° 4). Son complété $k[[X]]$ qui est factoriel, est donc extension factorielle de $k[X]_{(X)}$.

Mais $k[X]_{(X)}$ n'est pas extension factorielle de $k[X]$, donc (théorème 3.4) $k[[X]]$ n'est pas extension factorielle de $k[X]$.

A étant toujours un anneau de Zariski factoriel, tel que $\hat{A}$ soit aussi factoriel, considérons les anneaux factoriels B tels que $A \subset B \subset \hat{A}$.

Supposons que $\hat{A}$ est extension factorielle de B ; alors puisque $\hat{A}$ est extension factorielle de A, B est extension factorielle de A (théorème 3.4).

Supposons maintenant que B est un A-module plat ; puisque $\hat{A} \cap K = A$, $B \cap K \subset \hat{A} \cap K$, donc $B \cap K \subset A$; mais $A \subseteq B \cap K$, d'où $A = B \cap K$. B est donc extension factorielle de A (théorème 3.1). D'où le résultat suivant.

PROPOSITION 3.4. - Soit A un anneau de Zariski factoriel tel que $\hat{A}$ soit factoriel. Soit B un anneau factoriel tel que $A \subset B \subset \hat{A}$.

1° Si $\hat{A}$ est extension factorielle de B, alors B est extension factorielle de A.

2° Si B est un A-module plat, alors B est extension factorielle de A.

D'un résultat de [2] (chap. III, §3, n° 5, proposition 11), on déduit la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 3.5. - Soient A et B deux anneaux locaux noethériens et factoriels, d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}B$, vérifiant $A \subset B \subset \hat{A}$. Alors B est extension factorielle de A.

On suppose maintenant que A et B sont deux anneaux de Zariski factoriels tels que $A \subset \hat{A} \subset B$ $(B \subset \hat{B})$.

Si B est extension factorielle de $\hat{A}$, alors B est extension factorielle de A (théorème 3.4) ; mais aussi $\hat{A} \subset B \subset \hat{B}$, donc $\hat{B}$ est extension factorielle de $\hat{A}$.

Si $\hat{B}$ est extension factorielle de $\hat{A}$, B est extension factorielle de $\hat{A}$, et d'après ce que l'on vient de voir, B est extension factorielle de A .

PROPOSITION 3.6. - Soient A et B deux anneaux de Zariski factoriels tels que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont factoriels et vérifient : $A \subset \hat{A} \subset B \subset \hat{B}$.

1° Pour que $\hat{B}$ soit extension factorielle de $\hat{A}$, il faut et il suffit que B soit extension factorielle de $\hat{A}$.

2° Si $\hat{B}$ est extension factorielle de $\hat{A}$, alors B est extension factorielle de A .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre. - Paris, Hermann, 1958-1970.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. - Paris, Hermann, 1961-1965.

[3] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[4] KAPLANSKY (I.). - Infinite abelian groups. Revised edition. - Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1969.

[5] LAZARD (D.). - Autour de la platitude, Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 81-128 (Thèse Sc. math. Paris, 1968).

[6] NICOLAS (A.-M.). - Modules factoriels, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 20e année, 1966/67, n° 10, 12 p.

[7] NICOLAS (A.-M.). - Modules factoriels, Bull. Sc. math., 2e série, t. 95, 1971, p. 33-52.

[8] NICOLAS (A.-M.). - Extensions factorielles et modules factorables (à paraître).

[9] SAMUEL (P.) and ZARISKI (O.). - Commutative algebra. Vol. 1-2. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1958-1960 (University Series in higher Mathematics).

[10] SAMUEL (P.). - Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 237-249.

[11] SAMUEL (P.). - Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 155-173.

(Texte reçu le 6 mai 1974)

Anne-Marie NICOLAS
Université de Paris VI
Mathématiques, Tour 46
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05