Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Glaeser

Géométrie des distributions à support fini

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 16, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

GEOMETRIE DES DISTRIBUTIONS A SUPPORT FINI

par G. GLAESER

Exposé N° 16

3 Février 1971

§ 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Dans cet exposé r est un entier > o fixé.

Définition : Une distribution d'ordre $\leq r$ est péanienne, si elle est orthogonale aux polynômes de degré $\leq r$.

Les formules usuelles de l'analyse numérique, qui ne sont qu'approchées pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$, sont souvent exactes pour des polynômes de degré $\leq r$. Les restes de ces formules sont donc des distributions péaniennes. Dans le cas des fonctions d'une variable, G. Péano ([7],[1]) a attiré l'attention sur la représentation des restes de ces formules par des expressions intégrales $f \to \int f(\cdot)\, K(\cdot)$, où $K(\cdot)$ est une fonction polynômiale par morceaux.

On se propose de généraliser ce théorème de Péano aux fonctions de plusieures variables, et d'utiliser la représentation intégrale obtenue, pour aborder l'étude "géométrique" des distributions péaniennes à support fini. (Cette étude s'oppose à l'étude "fonctionnelle", traditionnelle, où les fonctions-tests jouent le premier rôle).

Dans les intégrandes de ces formules, apparaissent des "polynômes spéciaux" importants, en calcul différentiel de plusieures variables.

Produits tensoriels symetriques : Les fonctions de $\mathcal{C}^r$ étudiées ici sont définies sur un pavé compact $\mathbb{K} \subset \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien à n dimensions, associé à l'espace euclidien $\mathbb{E}$.

On utilisera systématiquement les puissances tensorielles symétriques $\odot_k \mathbb{E}$ de l'espace $\mathbb{E}$ ([2],[3],[4]). La multiplication $\odot_k \mathbb{E} \times \odot_h \mathbb{E} \to \odot_{k+h} \mathbb{E}$ devrait se noter $\odot$. Mais pour ne pas alourdir l'écriture nous omettons souvent ce signe : Pour deux points A et B de $\mathcal{E}$, on écrira $(B-A)^k$, ou $\vec{AB}^k$, au lieu $\overset{k}{\odot}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AB} \ldots \odot \overrightarrow{AB}$. Cela permettra, par exemple d'écrire la formule

$$f(B) - T_A^{(r)} f(B) = \int_{\widehat{AB}} D^{r+1} f(X)\left[\frac{(B-X)^{\odot r} \odot dX}{r!} \right]$$

sous une forme qui rappelle mieux son modèle (à une variable)

$$f(b) - T_a^{(r)} f(b) = \int_a^b \frac{(b-x)^r}{r!} f^{(r+1)}(x)dx.$$

§ 2. POLYNOMES

Rappelons qu'un polynôme de degré $\leq m$ défini sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans un espace vectoriel $\mathbb{H}$, est déterminé, dès que l'on fait choix d'une origine $0 \in \mathcal{E}$, par ses "coefficients" $L_k \in \mathrm{Hom}(\odot_k \mathbb{E}, \mathbb{H})$.

C'est l'application $\quad X \to \sum_{o \leq k \leq m} L_k \left[\frac{(X-0)^k}{k!} \right]$

Une telle application est encore un polynôme pour tout autre choix d'origine. Les formules de changement d'origine s'appellent les formules de Taylor.

Les polynômes spéciaux s'obtiennent par les deux particularisations suivantes :

a) L'espace $\mathbb{H}$ est la puissance tensorielle symétrique $r^{\text{ième}}$ $\odot_r \mathbb{E}$ (avec $m \leq r$ où r est l'entier fixé).

b) Les opérateurs L_k sont des opérateurs de multiplication tensorielle symétrique.

Définition : Un polynôme spécial de degré $\leq m$, d'ordre r est déterminé, après choix (provisoir) d'une origine, par les "coefficients" $S_{r-k} \in \odot_{r-k} \mathbb{E}$ (avec $o \leq k \leq m$).

C'est l'application de $\mathcal{E}$ dans $\odot_r \mathbb{E}$:

(1) $$X \to \sum_{o \le k \le m} S_{r-k} \odot \left(\frac{X-0}{k!}\right)^k .$$

Exemple : Un "trinôme spécial" d'ordre 2 s'écrit

$$X \to \lambda \left(\frac{X-0}{2} \right)^2 + \vec{V} \odot (X-0) + S_2 ,$$ où λ est un scalaire, $\vec{V}$ un vecteur et S_2 un tenseur symétrique appartenant à $\odot_2 \mathbb{E}$.

Nous désignerons par $\mathcal{J}_r$ l'espace vectoriel des polynômes spéciaux d'ordre r. On trouve que sa dimension est $\binom{n+r}{n}$, strictement inférieure (dès que $n > 1$) à la dimension de l'espace des polynômes de degré $\le r$ sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\odot_r \mathbb{E}$.

Proposition 1 : Un polynôme spécial P, non nul, d'ordre r et de degré $m \le r$ ne peut s'annuller en plus de m points.

En fait un tel polynôme admet une factorisation unique (à l'ordre des facteurs près).

(2) $$P(X) = (X-A_1) \odot (X-A_2) \odot \ldots (X-A_k) \odot Q\,(X)$$

où $k \le m$, où les A_i sont distincts (ou confondus), et où Q est un polynôme spécial de degré m-k, d'ordre r-k, qui ne s'annulle pas sur $\mathcal{E}$.

Si P(X) s'annulle en un point A_1, on transporte l'origine en ce point et l'on met $X-A_1$ en facteur (noter que l'algèbre symétrique est intègre). Récurrence descendante sur l'ensemble des zéros de P(X).

Proposition 2 : Il existe une application linéaire ∇ de $\mathcal{J}_r$ sur $\mathcal{J}_{r-1}$, dont le noyau est constitué par les polynômes constants, telle que, pour tout $P \in \mathcal{J}_r$ et $\vec{V} \in \mathbb{E}$

(3) $$D^1 P(X)\,[\vec{V}] = \nabla\, P(X) \odot \vec{V}.$$

Vérification triviale

Autrement dit, la dérivée $D^1P(X) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{E}\,;\odot_r\mathbb{E})$ est, dans le cas particulier où P est spécial, un opérateur de multiplication tensorielle symétrique.

On peut itérer l'opérateur ∇ . Cela permet de transcrire (1) sous la forme

$$P(X) = P(A) + \nabla^1 P(A) \odot (X-A) + \dots\dots \nabla^r P(A) \odot \left(\frac{X-A}{r!}\right)^r .$$

Remarque : Ces deux propositions mettent en évidence une analogie entre les polynômes spéciaux et les polynômes d'une seule variable réelle. En particulier, pour les fonctions d'une seule variable, on distingue généralement la dérivée $h \to f'(x)\,h$ et le nombre dérivé $f'(x)$, qui est le coefficient numérique de la dérivée. Pour un polynôme spécial P, $\nabla^1 P(X)$ joue le rôle de nombre dérivé .

§ 3. LA FORMULE INTEGRALE

Définition : Une 0-chaine finie d'augmentation nulle est une somme formelle de points pondérés (par des coefficients réels) :

$$\gamma = \Sigma\, \lambda_i A_i \ , \text{ avec } \Sigma\, \lambda_i = 0.$$

Une telle 0-chaine s'écrit aussi d'une infinité de façons sous la forme $\gamma = \Sigma\, \lambda_{i_j} (A_j - A_i)$ et il existe des 1-chaines $\Gamma = \Sigma\, \lambda_{i_j} \widehat{A_i A_j}$ dont le bord est γ.

L'espace vectoriel des 0-chaines finies d'augmentation nulle dont le support est contenu dans $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ sera désigné par $\Gamma(\mathbb{F})$.

Théorème : Si Γ est une 1-chaine dont le bord est $\gamma = \Sigma\, \lambda_i A_i \in \Gamma(\mathbb{K})$, et si $P \in \mathcal{J}_r$ et $f \in \mathcal{C}^{r+1}(\mathbb{K}\,;\mathbb{H})$, on a :

(4) $$\sum_i \lambda_i \sum_{o\leq k\leq r} (-1)^k D^k f(A_i)[\nabla^{r-k} P(A_i)] = (-1)^r \int_\Gamma D^{r+1} f(X)[P(X) \odot dX]$$

Cette formule s'obtient formellement par intégration par partie itérée, légitime en vertu des propriétés des polynômes spéciaux.

Cas particulier : Si l'on choisit $P(X)= \frac{(M-X)^r}{r!}$ (où $M \in \mathcal{E}$) on trouve

$$\Sigma\, \lambda_i T^{(r)}_{A_i} f(M) = \int_\Gamma D^{r+1} f(X)[\frac{(M-X)^r}{r!} \odot dX].$$

Si l'on choisit $P(X)= \frac{(M-X)^{r-k}}{(r-k)!} \odot S_k$ (avec $S_k \in \odot_k \mathbb{E}$),

on obtient une formule analogue, avec des développements de Taylor d'ordre r-k pour la fonction $D^k f(X)[S_k]$.

Proposition 3 : a) Toute distribution T d'ordre $\leq r$, à support ponctuel est représentée canoniquement par un couple $(A\ ;\ P) \in \mathbb{K} \times \mathcal{S}_r$ grâce à

$$f \to \langle f,T \rangle = \sum_k (-1)^k D^k f(A)[\nabla^{r-k} P(A)]\ .$$

Par abus de langage, on écrira aussi

(6) $$T = \Sigma\, (-1)^k\, \nabla^{r-k}\, P(A)\ .$$

b) Il existe un isomorphisme canonique t_{BA}, appelé transport de A à B, entre les espaces de distributions d'ordre $\leq r$, de supports respectifs $\{A\}$ et $\{B\}$ qui associe à $(A\ ;\ P)$ la distribution, $t_{BA}(A\ ;\ P) = (B\ ;\ P)$. Et $(B\ ;\ P)$ est l'unique distribution de support $\{B\}$ telle que $(A\ ;\ P) - (B\ ;\ P)$ soit péanienne.

Remarque : Ne pas confondre le transport (opération fondamentale) avec la translation (mieux connue, mais d'intérêt moindre).
Par exemple : La translatée en B de la mesure de Dirac δ_A est δ_B alors que $t_{BA}(\delta_A) = \{f \to T_B f(A)\}$,

<u>Proposition 4</u> : L'espace $\Gamma^r(\mathbb{F})$ des distributions péaniennes d'ordre $\leq r$ à support fini, contenu dans $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$, est engendré par des distributions biponctuelles.

Il suffit de le prouver lorsque $\mathbb{F}$ est un ensemble fini, et l'on raisonne par récurrence sur le cardinal de $\mathbb{F}$.

Si Card $\mathbb{F} \leq 1$, $\Gamma^r(\mathbb{F}) = \{0\}$. Dans le cas contraire, soient A et B deux points distincts de $\mathbb{F}$. Si $T \in \Gamma^r(\mathbb{F})$, soit T_A la composante en A de T. Alors $T = \{T_A - t_{BA}T_A\} + \{T - T_A + t_{BA}T_A\}$. Le premier terme est une distribution bijonctuelle, et le point A ne figure pas au support du second terme : d'après l'hypothèse de récurrence, ce second terme peut se décomposer en somme de distributions biponctuelles appartenant à $\Gamma^{(r)}(\mathbb{F})$.

<u>Théorème de Péano généralisé</u> : <u>L'espace $\Gamma^r(\mathbb{F})$ des distributions péaniennes d'ordre $\leq r$, à support fini, contenu dans $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$, est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\Gamma(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{J}_r$.</u>

Il suffit de le prouver, dans le cas où $\mathbb{F}$ est un ensemble fini. A l'application bilinéaire, qui associe à $(\gamma, P) \in \Gamma(\mathbb{F}) \times \mathcal{J}_r$ la distribution $f \to \int_\Gamma D^{r+1}f(X)[P(X) \odot dX]$, (où Γ est une 1-chaine quelconque telle que $\partial\Gamma = \gamma$) correspond une application linéaire de $\Gamma(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{J}_r$ dans $\Gamma^r(\mathbb{F})$. Cette application est surjective, d'après la proposition 4 comme le but et la source sont tous deux; de dimension $(\text{Card } \mathbb{F} - 1) \times \binom{n+r}{r}$, c'est bien un isomorphisme.

<u>Corollaire</u> : 1° <u>Toute distribution $T \in \Gamma^r(\mathbb{K})$ de support $\{A_i\}$ $(i \leq k)$ est représentée canoniquement par une somme</u> (cf. Prop 3)

$$T = \Sigma\ (A_i\ ;\ P_i), \text{ avec } \Sigma\ P_i = 0$$

2^o Le système d'équations (aux inconnues $P_{ij} \in \mathcal{J}_r$ satisfaisant à $P_{ij} + P_{ji} = 0$)

$$\sum_{j \leq k} P_{ij} = P_i$$

admet toujours des solutions, lorsque $\sum P_i = 0$, et T admet alors des représentations

$$T = \frac{1}{2} \Sigma \, (A_i - A_j) \otimes P_{ij} \, .$$

§ 4. STRUCTURES EUCLIDIENNES

On se propose d'exploiter les résultats précédents pour aborder l'étude métrique des distributions péaniennes à support fini.

Pour obtenir des résultats précis, on a dû se livrer à une étude métrique préalable de $\odot_k \mathbb{E}$, son dual $\mathcal{J}_r$, etc.

Nous nous bornons ici à énoncer quelques résultats qui complètent ceux de [2], [3], et [4].

Proposition 5 : a) $\mathbb{E}$ étant muni d'une structure euclidienne, il existe sur $\odot_k \mathbb{E}$ une structure euclidienne unique caractérisée par l'égalité

$$\forall \, \vec{V} \in \mathbb{E}, \; \left\| \frac{\vec{V}^k}{k!} \right\| = \|\vec{V}\|^k$$

b) Il existe une constante $K(n \; ; \; p,q)$ (que nous conjecturons égale à $\binom{p+q}{p}^{1/2}$) telle que, pour tout $(S,T) \in \odot_p \mathbb{E} \times \odot_q \mathbb{E}$:

$$K(n \; ; \; p,q) \|S\| \, . \|T\| \leq \|S \odot T\| \leq \binom{p+q}{p} \|S\| \, . \|T\|$$

En particulier,

$$\binom{p+q}{p}^{1/2} \|\vec{V}\|^p \|T\| \leq \left\| \frac{\vec{V}^p}{p!} \odot T \right\| \leq \binom{p+q}{p} \|\vec{V}\|^p . \|T\|$$

(ce sont les meilleures constantes, dès que $n > 1$.)

On a aussi

$$(k!)^{1/2}\|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|\dots\|\vec{v}_k\| \leq \|\vec{v}_1 \odot \vec{v}_2 \dots \odot \vec{v}_k\| \leq k!\|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|\dots\|\vec{v}_k\|$$

(ici, ce sont les meilleures constantes si $k \leq n$).

Proposition 6 : a) Sur $\mathrm{Hom}(\odot_k \mathbb{E} ; \mathbb{R})$, canoniquement isomorphe à $\odot_k \mathbb{E}^*$, la norme duale est égale au produit par $k!$ de la norme canonique sur $\odot_k \mathbb{E}^*$ (définie à la prop 5)

b) Si $L \in \mathrm{Hom}(\odot_k \mathbb{E} ; \mathbb{R})$ et $S \in \odot_h \mathbb{E}$, avec $h \leq k$, le produit intérieur $S \lrcorner L$ satisfait à

$$\|S \lrcorner L\| \leq \binom{k}{h} \|L\|.\|S\|.$$

c) Si $P \in \mathcal{J}^r$ et $A \in \mathbb{K}$

$$\binom{r}{k}^{1/2} \|\nabla^k P(A)\| \leq \|D^k P(A)\| \leq \binom{r}{k} \|\nabla^k P(A)\|.$$

d) Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}$ et si A, B sont deux points distincts de $\mathbb{K}$, il existe un point C sur le segment $[AB]$ tel que

$$\sqrt{r+1}\ \|D^{r+1} f(C)\| \leq \frac{\|D^r f(B) - D^r f(A)\|}{\|AB\|} \leq (r+1)\|D^{r+1} f(C)\|$$

Pour définir maintenant les normes $\|.\|_{-(r+1)}$ et $\|.\|_{-(r+\omega)}$, il faut, au préalable préciser les normes choisies sur $\mathcal{C}^{r+1}$ et $\mathcal{C}^{r+\omega}$ etc. En fait, nous n'utiliserons que des <u>semi-normes</u> dont le noyau est l'espace des polynômes de degré $\leq r$, ce qui n'a pas d'inconvénients puisque l'on cherche uniquement à normer des distributions péaniennes.

Sur $\mathcal{C}^{r+1}(\mathbb{K})$ (ou sur $\mathcal{C}^{r+4p}(\mathbb{K})$) on adopte

$$\|f\|^{r+1} = \mathrm{Sup}\ \frac{\|D^r f(A) - D^r f(B)\|}{\|AB\|},$$ où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des couples $(A,B) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ tels que $A \neq B$.

D'après (6,d), pour $A \in \mathbb{K}$

$$\|D^{r+1} f(A)\| \leq (r+1)^{-1/2} \|f\|^{r+1} \ .$$

De même sur $\mathcal{C}^{r+\omega}$

$$\|f\|^{r+\omega} = \operatorname{Sup} \frac{\|D^r f(A) - D^r f(B)\|}{\omega\ (\|AB\|)} .$$

§ 5. THEOREMES D'EQUIVALENCE

Sur $\Gamma^r(\mathbb{K})$ nous définissons deux sortes de normes :

1° Les normes "fonctionnelles" définies par dualité forte avec $\mathcal{C}^{r+1}$ ou $\mathcal{C}^{r+\omega}$. On les désigne par $\|\ \|_{-(r+1)}$ et $\|\ \|_{-(r+\omega)}$ respectivement.

2° Les normes "géométriques" dont le calcul ne fait intervenir que des manipulations sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{J}_r$ munis de structures euclidiennes de dimension finie.

Pour tout $T \in \Gamma^r(\mathbb{K})$ considérons l'ensemble des décompositions "externes" $T = \frac{1}{2} \Sigma\ (A_i - A_j) \otimes P_{ij}$ (où les points A_i et A_j n'appartiennent pas nécessairement au support de $\mathfrak{T}$.

Posons alors

$$|T|^{\flat}_{-r} = \operatorname{Inf} \{ \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \int_{[A_i A_j]} \|P_{ij}(X)\| dX \}$$

$$M(T)_{-(r+\omega)} = \operatorname{Inf} \{ \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \omega\ (\|A_i A_j\|) [\|P_{ij}(A_i)\| + \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{[A_i A_j]} \|\nabla^1 P_{ij}(X)\| dX]$$

où les bornes inférieures sont calculées sur l'ensemble de ces décompositions et où les intégrales sont calculées le long de segments rectilignes.

<u>Théorème</u> : <u>Pour tout $T \in \Gamma^r(\mathbb{K})$, on a</u>

$$|T|^{\flat}_{-r} \leq \|T\|_{-(r+1)} \leq \sqrt{r+1}\ \ |T|^{\flat}_{-r}$$

$$M(T)_{-(r+\omega)} = \|T\|_{-(r+\omega)}$$

<u>Démonstration</u> : 1° La première inégalité de droite s'obtient immédiatement en majorant

$$\int_{[A_iA_j]} D^{r+1}f(X)[P_{ij}(X) \odot dX] = \int_{[A_iA_j]} (P_{ij}(X) \lrcorner\ D^{r+1}f(X))\,dX$$

compte tenu de la proposition 6b).

Et, on obtient, de même $\|T\|_{-(r+\omega)} \leq M(T)_{-(r+\omega)}$.

On en déduit que les expressions $|T|^{\flat}_{-r}$ et $M(T)_{-(r+\omega)}$ sont bien des normes.

2° Pour démontrer les inégalités opposées remarquons d'abord que le dual algèbrique de $\mathcal{C}_f^{-r}$ s'identifie à l'espace des champs de polynômes de degré $\leq r$ sur $\mathbb{K}$. (Puisque $\mathcal{C}_f^{-r}$ est une somme directe d'espaces de distributions ponctuelles).

Soit $T \in \Gamma^r(\mathbb{K})$. D'après le théorème de Hahn-Banach il existe une forme linéaire φ sur $\Gamma^r(\mathbb{K})$ satisfaisant à

$$< \varphi, T > = |T|^{\flat}_{-r}\ , \text{ et pour tout } S \in \Gamma^r(\mathbb{K}) \text{ à } < \varphi, S > \leq |S|^{\flat}_{-r}\ ;$$

φ peut se représenter par un champ de polynômes.

En remplaçant ici S par les distributions biponctuelles fondamentales $\nabla^k(A\ ;\ B)$ cf (exposé précédent) qui satisfont trivialement à

$|\nabla^k(A,B)|^{\flat}_{-r} \leq \binom{r}{k}\|AB\|^{r-k}$, on obtient des inégalités $|D^k\varphi(B) - T^k_A\ \varphi(B)|$

$$\leq K\ \|AB\|^k.\ \|AB\|$$

ce qui prouve que φ est le champ des polynômes de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+\mathcal{L}ip}$.

Et, plus particulièrement, lorsque $k = 0$ on trouve que

$\|D^r\varphi(A) - D^r\varphi(B)\| \leq \|AB\|$, ce qui prouve que $\|\varphi\|^{r+1} \leq 1$.

On démontre ainsi

$$|T|^{\flat}_{-r} \leq \|T\|_{-(r+1)}$$

Et par un argument analogue, que

$$M(T)_{-(r+\omega)} \leq \|T\|_{-(r+\omega)}.$$

<u>Remarque</u> : Pour $r = 0$, la formule exprime une isométrie sur l'espace des 0-chaines d'augmentation nulle, à support fini. J'ai relaté dans [6], les péripéties de la découverte de ce théorème élémentaire.

On peut prouver très simplement, que sous réserve que le diamètre de $\mathbb{K}$ soit inférieur à 1, notre norme $|\ |^{\flat}_{-0}$ est égale aux normes $|\ |^{\flat}$ et $|\ |^{\#}$ que Whitney à introduites dans sa théorie de l'intégration géométrique ([2],[8]).

§ 6. CALCULS INTERNES

Le calcul de $|\ |^{\flat}_{-r}$ et de $M(T)_{-(r+\omega)}$ est rendu malaisé du fait qu'il fait intervenir des décompositions $T = \frac{1}{2}\,\Sigma(A_i - A_j)\otimes P_{ij}$ où les A_i ne figurent pas tous au support de T.

Par exemple, pour une distribution bijonctuelle $(A-B)\otimes P$, on peut joindre A et B par un arc et inscrire une ligne polygonale $A_0 = A, A_1 \ldots, A_{k-1}, A_k = B$ dans cet arc, pour calculer $\sum_{i\leq k}\int_{[A_i A_{i+1}]} \|P(X)\|\,dX$.

La valeur de $|(A-B)\otimes P|^{\flat}_{-r}$ apparait alors comme la solution d'un problème de calcul de variations.

On peut aussi envisager d'associer à T le nombre

$I(T) = \mathrm{Inf}\ \{\Sigma\ \frac{1}{2} \int_{[A_i A_j]} \|P_{ij}(X)\| dX\}$, où la borne inférieure est calculée sur l'ensemble des décompositions <u>internes</u>

$T = \frac{1}{2}\ \Sigma(A_i - A_j)\otimes P_{ij}$, où tous les A_i figurent au support de T.

On obtient ainsi une expression plus facile à étudier et à calculer, mais qui est une <u>prénorme</u> (non une norme).

<u>Proposition 7</u> : Pour tout entier $N \geq 2$, il existe une constante Γ_N telle que, pour toute distribution $T \in \Gamma^r(\mathbb{K})$ dont le support à un cardinal $\leq N$, on a

$$|T|^{\flat}_{-r} \leq I(T) \leq \Gamma_N\ |T|^{\flat}_{-r}$$

Raisonnons par l'absurde. Si la conclusion était fausse, on pourrait trouver une suite T_α de distributions, appartenant à $\Gamma^r(\mathbb{K})$, dont le support comporte N points, et telles que $|T_\alpha|^{\flat}_{-r}$ tende vers 0, alors que $I(T_\alpha) = 1$.

Comme $\|T_\alpha\|_{-(r+1)} \leq |T_\alpha|^{\flat}_{-r}$, les T_α tendraient vers 0, au sens de la topologie forte du dual de $\mathcal{C}^{r+1}$.

Mais par ailleurs, après extraction de sous-suites, on pourrait faire en sorte que le support de T_α tende (au sens de la métrique de Hausdorff) vers un ensemble $\mathbb{S}$ de cardinal $\leq N$.

Si les deux points A_i, A_j du support de T_α convergent vers deux points distincts $(B_i, B_j) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ on associera $(B_i - B_j)\otimes P_{ij}$ au terme $(A_i - A_j)\otimes P_{ij}$ de T_α.

Si, au contraire, (A_i, A_j) converge vers un même point $B_k \in \mathbf{S}$, on associera à la distribution d'ordre $\leq r$: $(A_i - A_j) \otimes P_{ij}$, la distribution d'ordre r+1 définie par le tenseur symétrique $P_{ij}(B_k) \odot \overrightarrow{A_i A_j}$

Compte tenu du fait que la prénorme I est une norme en restriction sur l'ensemble des distributions de support contenu dans $\mathbf{S}$, on en déduit facilement que les T_α convergent nécessairement vers une distribution non nulle portée par $\mathbf{S}$, ce qui conduit à une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Ph.J. DAVIS : Interpolation and approximation. New-York 1963- Blaisdell Publesling Company

[2] H. FEDERER Geometrie Measure theory . Berlin 1969. (Springer Verlag)

[3] G. GLAESER Etude de quelques algèbres Tayloriennes. Jérusalem 1958. Journal d'analyse Math.

[4] G. GLAESER Théorie intrinsèque des polynômes et dualités. (Bull. des Sciences Math 2ième série 85-1961-p17-28.)

[5] G. GLAESER Prolongement extremal des fonctions différentiabes d'une variable (A paraître dans "Journal of approximation theory).

[6] G. GLAESER Une petite aventure Mathématique (A paraître au bulletin de l'A.P.M)

[7] G. PEANO Résiduo in formulas de quadratura-Mathesis (4). Vol 34 (1914)

[8] H. Whitney Geometrie integration theory Princeton University Press 1957.